Egzamin z Teorii informacji. Zadania

10 lutego 2017

Rozwiązania zadań proszę pisać na oddzielnych, czytelnie podpisanych kartkach.
Punktacja: *za każde zadanie 0.8 punkta, za teorię 1.6 punkta.*

1. Niech C_i, dla $i = 1, 2$, będzie kodem liniowym nad ciałem $\mathbb{F}_2$ o minimalnej odległości słów kodowych d_i. Niech ponadto d_0 oznacza minimalną odległość słów kodowych kodu $C_1 \cap C_2$ oraz d_3 oznacza minimalną odległość słów kodowych kodu $C_1 + C_2 = \{a + b : a \in C_1,\ b \in C_2\}$. Niech d oznacza minimalną odległość słów kodowych kodu $\{(a + b, a' + b, a + a' + b) : a, a' \in C_1,\ b \in C_2\}$. Wykaż, że $d \geq \min(d_0, 2 \cdot d_1, 3 \cdot d_3)$.

2. Rozważmy kanał Γ_n, w którym alfabet wejściowy Σ_A oraz wyjściowy Σ_B są równe i wynoszą $\Sigma_A = \Sigma_B = \{0, 1\}^n$, natomiast przesłanie przez kanał pojedynczego symbolu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ powoduje obrót cykliczny* o k pozycji, $k < n$. Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ obrót ten wynosi 0 (czyli x pozostaje bez zmian), a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2(n-1)}$ obrót wynosi $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

*Obrót cykliczny ciągu $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ o k pozycji daje ciąg $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_k)$.

Dokładniej, niech dla słów $x, y \in \{0, 1\}^n$,

$$cycle(x, y) \quad = \quad \{k \in \{1, \ldots, n-1\} : x \text{ przesunięte cyklicznie o } k \text{ pozycji daje } y\}$$

Wówczas

$$\mathbb{P}(B = y | A = x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{2(n-1)} \cdot |cycle(x, y)| & \text{gdy } x \neq y \\ \frac{1}{2(n-1)} \cdot |cycle(x, y)| + \frac{1}{2} & \text{gdy } x = y. \end{cases}$$

Przykład: dla $n = 4$ mamy
$\mathbb{P}(B = 0000 | A = 0000) = \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{2} = 1$,
$\mathbb{P}(B = 1010 | A = 1010) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(B = 0101 | A = 1010) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B = 0011 | A = 1010) = 0$.

Udowodnij, że przepustowość tego kanału wynosi co najmniej $n - 1 - \frac{1}{2} \cdot \log(n-1)$.

Wskazówka. Rozważyć najpierw przypadek, gdy n jest liczbą pierwszą. (Jak wtedy może wyglądać zbiór $cycle(x, y)$?) Rozwiązania ograniczone do tego przypadku też będą punktowane.

3. Dowieść, że dla prawie wszystkich słów binarnych losowych w sensie Kołmogorowa (tzn. $C_U(w) \geq |w|$), liczba jedynek w słowie o długości n wynosi

(a) co najmniej $\sqrt{n}$,

(b) co najmniej $\frac{1}{4}n$.