Rozwiązanie Zadania 2

Zadanie 2. Powiemy, że zbiór słów $L \subseteq \{0,1\}^+$ jest **przekrojem**, jeśli dowolny nieskończony ciąg zer i jedynek zawiera prefiks w L. Udowodnić, że jeśli zbiór L jest przekrojem i spełnia nierówność Krafta $\sum_{v \in L} 2^{-|v|} \leq 1$, to L jest skończony i jest kodem.

Uwaga. W oryginalnym sformułowaniu było $L \subseteq \{0,1\}^*$. Gdyby $\varepsilon \in L$, to z nierówności Krafta wynikałoby $L = \{\varepsilon\}$. Przez konwencję zbioru $\{\varepsilon\}$ nie uważa się za kod, jakkolwiek spełnia on w trywialny sposób warunek jednoznaczności rozkładu.

Rozwiązanie. Niech $\min L$ będzie zbiorem **minimalnych** elementów w L, ze względu na porządek bycia prefiksem $\leq$. Z definicji, $\min L$ jest bezprefiksowy.

Lemat 1. $\min L$ też jest przekrojem.

Dowód. Niech $\alpha = a_0 a_1 \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem zero-jedynkowym. Z założenia α zawiera prefiks w L, powiedzmy $a_0 a_1 \ldots a_k$. Gdyby on nie był minimalny, to z dobrego ufundowania porządku $\leq$ wynika, że ciąg ten posiadałby prefiks β minimalny w L. Prefiks ten jest zarazem prefiksem α i należy do $\min L$. A zatem $\min L$ jest przekrojem. QED

Lemat 2. $\min L$ jest skończony.

Dowód. Korzystamy z Lematu Königa. Rozważmy drzewo

$$T = \{u : (\exists v \in \min L)\, u \leq v\}.$$

Gdyby to drzewo było nieskończone, zawierałoby nieskończoną gałąź α. Skoro $\min L$ jest przekrojem, ta gałąź miałaby prefiks $a_0 a_1 \ldots a_k \in \min L$.
Ale $a_0 a_1 \ldots a_k a_{k+1} \in T$, a zatem mielibyśmy

$$\min L \ni a_0 a_1 \ldots a_k < a_0 a_1 \ldots a_k a_{k+1} \leq v \in \min L$$

dla pewnego v, co jest niemożliwe, bo $\min L$ jest bezprefiksowy. QED

A zatem $\min L$ jest skończonym zbiorem bezprefiksowym. Co więcej, jest **maksymalnym** zbiorem bezprefiksowym, ponieważ jest przekrojem. (Jeśli $v \notin \min L$, to dowolne rozszerzenie v do nieskończonego ciągu zawiera słowo z $\min L$ porównywalne z v.)

Lemat 3. Jeśli M jest skończonym maksymalnym zbiorem bezprefiksowym, to

$$\sum_{v \in M} 2^{-|v|} = 1.$$

Dowód. Niech $N = \max\{|v| : v \in M\}$. Każde słowo $w \in \{0,1\}^N$ ma jakiś (dokładnie jeden) prefiks w M. Elementarny rachunek pokazuje, że

$$\sum_{v \in M} 2^{-|v|} = \sum_{w \in \{0,1\}^N} 2^{-|w|} = 1.$$

QED

A zatem $\sum_{v \in \min L} 2^{-|v|} = 1$. Skoro jednak L spełnia nierówność Krafta, wnioskujemy

$$L = \min L.$$

A zatem L jest (maksymalnym) skończonym kodem bezprefiksowym.