Teoria informacji. Egzamin 30 stycznia 2007

1. Dane są zbiory słów nad alfabetem $\{0, 1\}$:

   (a) {110,00,10,01}

   (b) {0,01}

   (c) {00,01,101,100,11}

   (d) {01,010,001,011,11,10}

   (e) {100,01,10,011,110,1101} (*)

   Określ: które z nich są kodami? które są bezprefiskowe? które są maksymalne bezprefiksowe? Odpowiedzi uzasadnij.

2. Powiemy, że zbiór słów $L \subseteq \{0, 1\}^*$ jest **przekrojem**, jeśli dowolny nieskończony ciąg zer i jedynek zawiera prefiks w L. Udowodnić, że jeśli zbiór L jest przekrojem i spełnia nierówność Krafta $\sum_{v \in L} 2^{-|v|} \leq 1$, to L jest skończony i jest kodem.

3. Wykonujemy rzuty uczciwą monetą do momentu wyrzucenia orła. Niech X będzie liczbą wykonanych rzutów. Wyznacz entropię $H(X)$ w bitach.

4. Niech X_1, X_2 będą dyskretnymi zmiennymi losowymi o dodatniej entropii, okreśonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Zdefiniujmy:

$$\rho = 1 - \frac{H(X_1|X_2)}{H(X_1)} \ .$$

   Pokaż, że $\rho \in [0, 1]$. Dla jakich X_1 i X_2 zachodzi $\rho = 0$, a dla jakich $\rho = 1$? (Podaj warunki konieczne i dostateczne.)

5. Przypomnijmy, że kod $C \subseteq \{0, 1\}^n$ poprawia r błędów jeśli

$$(\forall u \in C, v \in \{0, 1\}^n) \ d(u, v) \leq r \Rightarrow \Delta(v) = u,$$

   gdzie d jest odległością Hamminga, a Δ regułą dobrosąsiedzką. Ile jest kodów $C \subseteq \{0, 1\}^3$ poprawiających jeden błąd ?

6. Dany jest kanał komunikacyjny Γ, opisany macierzą przejścia:

$$M_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

   Oblicz przepustowość tego kanału. Podaj rozkład prawdopodobieństwa symboli wejściowych, który realizuje przepustowość.

7. Udowodnij, że liczby postaci $\binom{2n}{n}$ dla $n \in \mathbf{N}$ *nie* są losowe w sensie Kołmogorowa, poza co najwyżej skończoną ilością.