Zadanie 1 (Przepustowość bezbłędna, 1 punkt). Mamy dany kanał przesyłający znaki z alfabetu $\{0,1,2,3,4\}$, z prawdopodobieństwami transmisji $X \to Y$ określonymi następująco:

$$p(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ gdy } y = x \pm 1 \pmod 5 \\ 0 \text{ wpp.} \end{cases}$$

Oblicz przepustowość tego kanału. Kanał ten można wykorzystać do przesyłania danych z zerowym prawdopodobieństwem błędu ograniczając alfabet (np. przez wysyłanie tylko znaków 0 i 1). Zaprojektuj sposób przesyłania danych za pomocą bloków tak, by uzyskać większą informację wzajemną w przeliczeniu na znak, zachowując zerowe prawdopodobieństwo błędu.
Problem (2 punkty): Rozstrzygnij jaka jest maksymalna możliwa do uzyskania informacja wzajemna w przeliczeniu na znak.

Zadanie 2 (Efektywne testy przesiewowe, 1 punkt). Załóżmy że mamy do przebadania pod kątem obecności jakiegoś wirusa N próbek krwi. Prawdopodobieństwo pozytywnego wyniku p dla każdej próbki jest niewielkie (np. $p = 1/100$), a każdy test jest kosztowny. Zamiast badać każdą próbkę osobno, możemy badać mieszaniny fragmentów próbek (zakładamy że wynik jest pozytywny jeśli choć jedna z wymieszanych próbek zawiera wirusa). Ostatecznie musimy jednak dla każdej próbki znać z pewnością jej wynik. O ile możemy zmniejszyć oczekiwaną liczbę testów do wykonania? Zaprojektuj efektywne badanie dla $p = 1/100$ i $N = 300$, policz oczekiwaną liczbę testów.

Zadanie 3 (Generowanie korelacji, 3 punkty). Chcemy generować (np. dla celów kryptograficznych) pary $(x, y) \in \{0,1\}^2$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $p(00) = p(11) = \frac{1-f}{2}$, $p(01) = p(10) = \frac{f}{2}$, dla zadanego $0 < f < 1$. Wartości x i y musimy jednak generować osobno u dwóch graczy, którzy nie mogą się ze sobą komunikować. Mogą natomiast korzystać ze wspólnego źródła losowości r, oraz swoich losowych bitów. Prawdopodobieństwa uzyskania konkretnych par muszą zatem mieć postać:

$$P(x, y) = \textstyle\sum_r P(r)P(x|r)P(y|r).$$

Celem jest znalezienie $P(r)$, $P(x|r)$ i $P(y|r)$, tak aby entropia r była jak najmniejsza. Przykładowo dla rozkładów:

$$r = \begin{cases} 0 \text{ z prawd. } \frac{1}{2} \\ 1 \text{ z prawd. } \frac{1}{2} \end{cases} \quad ; \quad x = r \quad ; \quad y = \begin{cases} r \text{ z prawd. } 1-f \\ 1-r \text{ z prawd. } f \end{cases}$$

uzyskujemy żądany rozkład, a entropia r wynosi 1. Zaprojektuj rozkład z mniejszą entropią. Jakie jest dolne ograniczenie na tę entropię?
Problem (2 punkty): Czy można zmniejszyć entropię/parę przez generowanie kilku par jednocześnie? Dokładniej, zakładamy, że każdy z graczy może zamiast jednego generować k bitów (niekoniecznie niezależnych) i interesuje nas minimalizacja stosunku $\frac{H(r)}{k}$.

Zadanie 4 (Pojemność kanału gubiącego, 2 punkty). Kanał B na wejściu przyjmuje blok 8 bitów, na wyjściu daje 7 bitów, gubiąc zawsze losowo jeden z wejściowych (każdy z takim samym prawdopodobieństwem). Określ pojemność tego kanału, zaprojektuj kod do efektywnego przekazywania informacji z zerowym prawdopodobieństwem błedu.