TI Zadania. Termin rozwiązania: 29 stycznia 2009, godz. 15:00.

Rozwiązania proszę przesłać **elektronicznie .ps lub .pdf** na adres <niwinski@mimuw.edu.pl> z kopią do <tkazana@mimuw.edu.pl> **lub** złożyć do mojej przegródki w **sekretariacie**. W tym drugim przypadku rękopis powinien być podpisany i **bardzo czytelny**.

Zasady punktacji: Uzyskana liczba punktów plus liczba punktów za ćwiczenia oznacza zarazem ocenę (po stosownym zaokrągleniu), np. 3.14 punktów = dostateczny. Można rozwiazywać zadania w zespołach, wtedy jednak liczba zdobytych punktów dzieli się przez liczbę uczestników.

1. **(1 pt.)** Oblicz przepustowość kanału opisanego poniższą macierzą $n \times n$, $n \geq 2$. Wskaż rozkład, który realizuje odpowiednie maksimum:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \dots & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

2. **(1 pt.)** Dla następujących zmiennych losowych określ entropię, kod Huffmana i średnią długość słowa w kodzie Huffmana:

   - suma oczek przy dwóch niezależnych rzutach kostką,
   - liczba orłów przy 5 rzutach monetą.

   Jeśli X zmienna jak wyżej, to jak zmieni się entropia i srednia długość słowa kodowego dla $Y = \log X$?

3. **(2 pt.)** Niech:

$$d_1(X,Y) = H(X|Y) + H(Y|X)$$

   oraz

$$d_2(X,Y) = \sum_{z \in X \cup Y} p_X(z) \log \frac{p_X(z)}{p_Y(z)}$$

   (gdzie $p_Z(z) = p(Z = z)$).

   Rozstrzygnij, czy d_1 i d_2 są metrykami.

4. **(1 pt.)** Czy istnieje nieskończenie wiele liczb losowych w sensie Kołmogorowa następujacej postaci:

   (a) $N!$,

   (b) p_N (N–ta liczba pierwsza),

   (c) $2N$,

   (d) $2N + 1$,

(e) liczby mające dokładnie k jedynek w zapisie dwójkowym,

(f) liczby mające co najmniej k jedynek w zapisie dwójkowym.

5. **(2 pt.)** Czy istnieje słowo x, dla którego prawdopodobieństwo algorytmiczne

$$p_U(x) = \sum_{v:U(v)=x} \frac{1}{2^{|v|}}$$

jest liczbą wymierną[1]?

6. **(1 pt.)** W wyścigu startują 3 konie. Bukmacher jest bardzo uczciwy: za dobry typ oddaje potrojoną stawkę wejsciową. Wiemy, że rozkład prawdopodobieństwa zwycięstw poszczególnych koni jest $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (w kazdej gonitwie niezależnie i tak samo). Mamy 100 zł i będziemy grać 100 razy, każdorazowo stawiając cały posiadany kapitał (ale być może dzieląc go na poszczególne konie). Ile *„powinniśmy”* maksymalnie wygrać?

7. **(2 pt.)** Niech X będzie wyborem kart do gry, tzn.zmienną losową o wartościach w $\{1, 2, \ldots, 52\}$ i niech T będzie zmienną losową, która z jednorodnym prawdopodobieństwem wybiera w sposób niezależny od X pewną permutacją (tasowanie kart). Dowieść, że $H(TX) \geq H(X)$. Czy teza pozostaje prawdziwa, jeśli X i T nie są niezależne?

8. **(1 pt.)** Wykazać $R(X, Y, Z) \leq I(X, Y) \leq H(X)$. Czy któraś z tych liczb moze być ujemna? Jeśli tak, podać przykład.

9. **(1 pt.)** Kod jest *wyczerpujący*, gdy każdy dostatecznie długi ciągu symboli zawiera pewne słowo kodowe jako swój prefiks. (W konsekwencji każdy nieskończony ciągu symboli rozkłada się na słowa kodowe.) Jak sprawdzić, czy dany kod jest wyczerpujący?

[1] Na wykładzie dyskutowana była także alternatywna definicja, „przeskalowana” względem Ω, $p(x) = \frac{p_U(x)}{\Omega}$. W tym przypadku pytanie o wymierność $p(x)$ wydaje się znacznie trudniejsze. W każdym razie, jeśli ktoś znajdzie poprawną odpowiedź, to za to jedno zaliczy wykład z oceną „**5!**”.