Zadanie zaliczeniowe nr 1 za 1 pt. Rozwiązania w formacie `pdf` można nadsyłać na adres `niwinski@mimuw.edu.pl` do poniedziałku **16 grudnia 2013**.

Zgadywanie kart

Rozważmy następującą grę. Gracz pierwszy rozkłada karty na blacie szklanego stolika tylną stroną do góry. Zakładamy, że ta sama karta może wystąpić wiele razy. Zadaniem drugiego gracza jest odgadnięcie rozłożonego ciąg kart. W tym celu może on jedynie zadawać pytania porównujące dwie wybrane karty. Interesuje nas, w ilu krokach (jeśli w ogóle) gracz drugi może zidentyfikować wszystkie karty. Można rozważać wariant tej sytuacji, w którym gracz zgadujący zna częstości występowania poszczególnych kart.

Sformułujemy problem bardziej abstrakcyjnie.

Niech A będzie zbiorem liniowo uporządkowanym o m elementach i niech $n \geq m$. Ciąg $\alpha : \{1, \ldots, n\} \to A$, w którym każdy element $a \in A$ występuje co najmniej raz, nazwiemy *n-prezentacją* zbioru A. Zakładamy, że na zbiorze wszystkich takich prezentacji $\mathcal{P}_{A,n}$ określona jest pewna miara prawdopodobieństwa.

Algorytm otrzymuje na wejściu prezentację α, do której ma dostęp jedynie przez wyrocznię, której może zadawać pytania

czy $\alpha(i) \leq \alpha(j)$?

(nie może wprost zapytać o $\alpha(i)$). W pewnym momencie algorytm przerywa zadawanie pytań i wypisuje w całości prezentację α.

Polecenia zadania. Podać dolne ograniczenie na średnią liczbę pytań zadawaną przez algorytm.

Dodatkowo rozważyć sytuację, gdy dana jest funkcja $count : A \to \mathbb{N}$, gdzie $n = \sum_{a \in A} count(a)$ i algorytm otrzymuje na wejściu jedynie takie prezentacje, w których każdy element $a \in A$ występuje dokładnie $count(a)$ razy. Zakładamy, że wszystkie takie prezentacje są jednakowo prawdopodobne (pozostałe prezentacje mają prawdopodobieństwo 0). W tym przypadku proszę sprecyzować dolne ograniczenie w zależności od funkcji $count$, a także zaproponować możliwie dobre ograniczenie górne.