Zadanie domowe nr 1 z Teorii informacji

Zakładamy, że mamy pewne początkowe uporządkowanie talii kart i zmienna losowa X opisuje pozycję asa pik w tym uporządkowaniu. Np. $X = 52$ oznacza, że as pik występuje na ostatniej pozycji. Niech zmienna losowa T opisuje tasowanie talii; jej wartościami są permutacje zbioru $\{1, 2, \ldots, 51, 52\}$. Zmienna $T(X)$ opisuje pozycję asa pik po potasowaniu. Dowieść, że jeśli T i X są niezależne, to

$$H(T(X)) \quad \geq \quad H(X).$$

Przykładowe rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że przy założeniu niezależności X i T mamy

$$p(T(X) = i | T = t) = \frac{p(T(X) = i \wedge T = t)}{p(T = t)} = \frac{p(X = t^{-1}(i) \wedge T = t)}{p(T = t)} = \frac{p(X = t^{-1}(i)) \cdot p(T = t))}{p(T = t)} = p(X = t^{-1}(i)).$$

Zatem dla konkretnej permutacji t mamy

$$\begin{aligned} H(T(X)|T = t) &= \sum_i p(T(X) = i|T = t) \log \frac{1}{p(T(X) = i|T = t)} \\ &= \sum_i p(X = t^{-1}(i)) \log \frac{1}{p(X = t^{-1}(i))} \\ &= \sum_j p(X = j) \log \frac{1}{p(X = j)} \\ &= H(X). \end{aligned}$$

Stąd

$$H(T(X)) \geq H(T(X)|T) = H(X).$$