Zadanie 1. Przypomnijmy, że stała Chaitina została zdefiniowana na wykładzie jako

$$\Omega = \sum_{M(\varepsilon)\downarrow} 2^{-\langle M \rangle}$$

gdzie $\langle M \rangle$ jest kodem maszyny Turinga M. Można przyjąć kodowanie z wykładu lub inne (teza zadania od tego nie zależy).

1. **(1 punkt)** Udowodnić, że Ω jest liczbą niewymierną.
2. **(1 punkt)** Udowodnić $\Omega \neq \pi, e$.

Problem (+ 1 punkt): Uogólnić oba powyższe stwierdzenia[1]. Przedyskutować niezależność wyniku od kodowania.

Zadanie 2. (1 punkt) Przypomnijmy, że w teorii złożoności Kołmogorowa ciąg $w \in \{0,1\}^*$ nazywa się *losowym*, jeśli $K(w) \geq |w|$. Utożsamiając liczby naturalne z ich zapisami binarnymi, dowieść, że liczby pierwsze nie są losowe (poza co najwyżej skończoną ilością).
Wskazówka. Twierdzenie o gęstości liczb pierwszych.
Problem (+ 2 punkty): Przedyskutować zależność $K(bin(n))$ od liczby dzielników, ich wzajemnych relacji itp.

Zadanie 3. (3 punkty) Uzupełnić szczegóły w dowodzie z ostatniego wykładu. Tzn. podać pełny dowód następującego twierdzenia.
Dla $x \in \{0,1\}^*$, określamy

$$p_U(x) = \sum_{M(\varepsilon)=x} 2^{-\langle M \rangle}$$

($p_U(x)$ można interpretować jako prawdopodobieństwo, że losowo wygenerowany program startujący z pustym wejściem zatrzyma się z wyjściem x).
Wtedy $p_U(x) \approx 2^{K(x)}$, dokładniej, istnieje stała c, że

$$K(x) - c \;\leq\; -\log_2(p_U(x)) \;\leq\; K(x) + c$$

W przypadku korzystania z literatury, proszę podać źródła.

Zadanie 4. (2 punkty) Pojęcie pary $\langle x, y \rangle$, gdzie $x, y \in \{0,1\}^*$ rozumiemy jak na ostatnim wykładzie (lub w notatkach pania M. Fronczak `http://zls.mimuw.edu.pl/~niwinski/Info/ti14.ps`).
Przypuśćmy, że zbiór wartości obliczanych przez maszynę Turinga M,

$$R_M = \{M(w) : w \in \{0,1\}^*\}$$

jest zbiorem par, przy czym

- $\langle x, y \rangle \in R_M \implies |x| = |y|$,
- $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in R_M \implies y = y'$ (tzn. R_M jest grafem funkcji częściowej).

Dowieść, że nie jest możliwe, by dla nieskończenie wielu $\langle x, y \rangle \in R_M$ zachodziło

$$(K(y) \geq |y|) \;\wedge\; (K(x) \leq f(|x|))$$

gdzie jest funkcją taką, że $(n - f(n)) \to \infty$.

[1] Oczywiście, jeśli uogólnienie faktycznie implikuje 1 i 2, to rozwiązanie samego *Problemu* wystarcza na ≥ 2 punkty.