Kolokwium 2020

Zadanie 1

Podpunkt (a). Mamy kanał o m symbolach wejściowych i n symbolach wyjściowych. Powiększamy alfabet wejściowy o nowy symbol, a macierz kanału o nowy wiersz, odpowiadający temu symbolowi. Wartości w nowym wierszu są dowolne pod warunkiem, że są nieujemnne i sumują się do 1. Otrzymujemy w ten sposób nowy kanał opisany macierzą $(m+1) \times n$.

Jak zmieniła się przepustowość (ang. *capacity*) — czy może zmaleć, wzrosnąć, pozostać bez zmian? Dla każdej z możliwych odpowiedzi proszę podać przykład, który ją potwierdza.

Uwaga. Dodatkowy bonus, jeżeli ktoś oprócz przykładów poda jakiś ogólniejszy warunek.

Podpunkt (b). Który z poniższych kanałów ma większą przepustowość? Odpowiedź proszę uzasadnić.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 2

Wykaż nierówność $H(A,B,C) - H(A,B) \leq H(A,C) - H(A)$ i wskaż warunki, przy których zachodzi równość.

Wykaż $I(A;B \mid C) \geq I(B;C \mid A) - I(B;C) + I(A;B)$ i wskaż warunki, przy których zachodzi równość.

Zadanie 3

Rzucamy sprawiedliwą monetą, wynik opisany jest zmienną losową $C \in \{0,1\}$.

Niezależnie rzucamy sprawiedliwą kostką, wynik opisany jest zmienną losową $D \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Dla zmiennych losowych $C + D$ i $C \cdot D$ możemy utworzyć kody Huffmana. W którym przypadku średnia długość słowa kodowego jest większa?

Czy odpowiedź może się zmienić, jeśli dopuścimy, że moneta może nie być sprawiedliwa?