Egzamin z Teorii informacji w II terminie. Teoria. 23 lutego 2017.

1. Podaj najlepsze, jakie potrafisz, oszacowania górne i dolne na bezprefiksową złożoność obliczeniową Kołmogorowa dla palindromów, czyli $K_U(x)$ dla $x \in \{0,1\}^*$ będącego palindromem.

   Za wzorcowe uznajemy rozwiązanie
   $$0 \leq K_U(x) \leq \frac{1}{2}n + 2\log n + c.$$
   Składnik $\log n$ w górnym oszacowaniu można poprawić do $\log n + 2\log\log n$ itd., ale oszacowanie $\frac{1}{2}n + c$ jest za małe, bo popadamy w sprzeczność z nierównością Krafta. (Jednak takie rozwiązanie też było punktowane.) Oszacowanie dolne można poprawić do dowolnej stałej dla prawie wszystkich n, czyli $\omega(1)$, ale każda obliczalna funkcja rozbieżna do nieskończoności byłaby za duża.

2. Czy istnieje kod bezprefiksowy o długościach słów kodowych $(1, 3, 3, 3, 4, 4, 7)$ nad alfabetem $\{0, 1\}$?

   Nie, z powodu nierówności Krafta.

   A co, jeżeli nie będziemy wymagać, aby kod był bezprefiksowy (tzn., czy istnieje jakikolwiek kod o takich długościach słów kodowych)?

   Nie, z powodu nierówności Krafta i Tw. McMillana.

   Odpowiedz dodatkowo na powyższe pytania dla kodów nad alfabetem $\{x, y, z\}$.

   Tak, z powodu nierówności Krafta.

3. Czy istnieje kod blokowy, który poprawia dokładnie 3 błędy, a wykrywa 9 błędów? Odpowiedź uzasadnij.

   Nie. Jeśli minimalna odległość słów kodowych wynosi d, to kod wykrywa $d-1$ błędów, a poprawia $\lfloor \frac{1}{2}(d-1) \rfloor$. Liczby 3 i 9 nie pasują do tego schematu.

4. Przypomnijmy, że stałą Chaitina Ω_U definiujemy jako $\Omega = \sum_{U(v)\downarrow} 2^{-|v|}$, gdzie U jest bezprefiksową maszyną uniwersalną Turinga. Czy i) Ω_U nadal byłaby nieobliczalna oraz ii) mniejsza od 1, jeżeli definicję zmienilibyśmy w następujący sposób:

   a) U nie musi być uniwersalna, ale ciągle jest bezprefiksowa?

   Ad (i) **nie**, np. dla maszyny akceptującej tylko jedno słowo, stała Ω byłaby obliczalna.

   Ad (ii) z powodu bezprefiksowości stała **nadal** spełniałaby $\Omega \leq 1$, choć mogłaby zachodzić równość. Uznaliśmy, że określenie „nadal mniejsza” mogło być rozumiane na dwa sposoby ($<$ lub $\leq$), dlatego honorowane były **obie** odpowiedzi.

   b) U nie musi być bezprefiksowa, ale ciągle jest uniwersalna?

   Jeśli U jest uniwersalna w zwykłym sensie (nie bezprefiksowa), to w szczególności akceptuje wszystkie wejścia postaci $\langle T \rangle x$, gdzie T jest maszyną akceptującą wszystkie słowa, a zatem $\Omega = \infty$. Czyli odpowiedź na pytanie (ii) jest **nie**. Natomiast pytanie (i) **nie ma sensu** (taka byłaby właściwa odpowiedź!), ale w przypadku prawidłowej odpowiedzi na (ii), uznane były również *tak* i *nie*.

5. Jakie zależności zachodzą między wskazanymi wielkościami? Odpowiedź krótko uzasadnij.

   a) $H(X)$ i $H(K_U(X))$, gdzie X przyjmuje skończenie wiele wartości w zbiorze $\{0,1\}^*$,

   $H(K_U(X)) \leq H(X)$, bo tak jest dla dowolnej funkcji od X.

   b) $I(A + B; A)$ i $I(B; A)$, gdzie A i B przyjmują skończenie wiele wartości w zbiorze $\mathbb{R}$.

   $I(A + B; A) \bowtie I(A; B)$, tzn. w ogólności nie ma żadnej zależności. Np. gdy $B = -A$, możemy mieć $I(B; A) = H(B) - \underbrace{H(B|A)}_{0} > 0$, podczas gdy $I(A + B; A) = I(0; A) = H(0) - H(0|A) = 0$.

   Natomiast, gdy np. $B = 0$ i $H(A) > 0$, mamy z powodów jak wyżej $I(B; A) = 0$, podczas gdy $I(A + B; A) = I(A; A) = H(A)$.