Egzamin z Teorii informacji w II terminie. Zadania

23 lutego 2017

Rozwiązania zadań proszę pisać na oddzielnych, czytelnie podpisanych kartkach.

1. Dla rozkładu prawdopodobieństwa $\left(\frac{1}{48}, \frac{1}{48}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{2}{5}, \frac{7}{20}\right)$ skonstruuj

   a) kod Huffmana

   b) kod Shannona-Fano

   nad alfabetem $\Sigma = \{0, 1\}$.

2. Narysuj i wypełnij liczbami diagram Venna dla zmiennych losowych X, Y i Z takich, że

$$X = \begin{cases} 0 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2 \\ -1 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/4 \\ 1 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/2 \\ 2 & \text{z prawdopodobieństwem } 1/4 \end{cases}$$

   oraz $Z = X \cdot Y$, zakładając, że zmienne X i Y są niezależne.

3. Rozważamy kanał Γ_n, w którym alfabet wejściowy oraz wyjściowy są równe i wynoszą $\{0, 1\}^n$. Przesłanie przez kanał pojedynczego symbolu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ powoduje z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ odwrócenie słowa $y = x^R = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zanegowanie słowa $y = \overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$ (czyli zamianę zer i jedynek). W terminach macierzy kanału

$$\mathbb{P}(B = y | A = x) \quad = \quad \frac{1}{2}\,\chi(y = x^R) + \frac{1}{2}\,\chi(y = \overline{x})$$

   gdzie $\chi(\varphi)$ jest 1 lub 0 w zależności od tego, czy φ jest prawdą, czy fałszem.

   Wykaż, że przepustowość kanału Γ_n wynosi co najmniej $n - 1$. Dla jakich n zachodzi równość ?

Punktacja: *za każde zadanie 0.8 punkta, za teorię 1.6 punkta.*