AATG Zadania I seria. Termin rozwiązania: 22 czerwca 2009

Rozwiązania proszę składać **jedynie w postaci wydruku lub elektronicznie .pdf** na adres niwinski@mimuw.edu.pl. Rekomendowanym sposobem jest podanie adresu **URL** pliku.

Zasady punktacji: Uzyskana liczba punktów plus punkty uzyskane z ćwiczeń dają ocenę (po stosownym zaokrągleniu).

1. (1 punkt) Rozważamy arenę gry $\mathcal{A} = (Pos_E, Pos_A, Mov)$ z wyróżnioną pozycją $p_0 \in Pos$. Określmy funkcję użyteczności dla Ewy na maksymalnych ścieżkach w $\mathcal{A}$:

$$u_E(\pi) = \begin{cases} 1 & last(\pi) \in Pos_A \\ -1 & last(\pi) \in Pos_E \\ 0 & \pi \text{ } nieskonczona \end{cases}$$

Niech $\mathcal{S}_E$ i $\mathcal{S}_A$ będą zbiorami strategii dla Ewy i Adama w rozumieniu pierwszego wykładu. Każda para strategii S_E (Ewy) i S_A (Adama) wyznacza jednoznacznie pewną rozgrywkę w $\mathcal{A}$ startującą z pozycji p_0. Razem z powyższą funkcją u_E oraz funkcją użyteczności dla Adama $u_A = -u_E$ otrzymujemy grę antagonistyczną.

Jakie liczby rzeczywiste mogą być wartościami tej gry ?

(Przez wartość gry rozumiemy wartość funkcji użyteczności Ewy w punkcie równowagi w strategiach mieszanych.)

2. (1 punkt) Rozważmy grę symetryczną o sumie zerowej na zbiorze strategii $\{1, \dots, n\}$. (Przykładem jest gra *papier–kamień–nożyce*.)

Czy z tego już wynika, że profil, w którym obaj gracze wybierają prawdopodobieństwo jednorodne ($p(i) = \frac{1}{n}$, dla $i = 1, \dots, n$) jest punktem równowagi Nasha ?

3. (1 punkt) Dwóch graczy gra na szachownicy $n \times n$, gdzie n nieparzyste, pierwszy stawia kółka, drugi krzyżyki. Na początku wszystkie pola są puste, tylko w lewym dolnym rogu jest kółko, a w prawym górnym krzyżyk. Zaczyna gracz pierwszy. Ruch gracza polega na postawieniu swojego znaczka na wolnym polu sąsiadującym przez krawędź z polem, na którym jest już postawiony jego znaczek. Gry gracz nie może wykonać ruchu, traci go (ale jeszcze nie przegrywa). Gra kończy się, gdy żaden z z graczy nie moze wykonać ruchu. Grę wygrywa gracz, który postawił więcej znaczków. Rozstrzygnij, który z graczy posiada strategię wygrywajacą.

3. (2 punkty) Rozważamy grę na grafie skierowanym z dowma wyróżnionymi wierzchołkami. Na początku pionek stoi w wierzchołku *Start*, zadaniem gracza 1 jest doprowadzenie go do wierzchołka *Meta*. W każdym innym przypadku wygrywa gracz 2.

Gracze poruszają się na przemian. Gracz 1 (który zaczyna) przesuwa pionek o jedno pole zgodnie z krawędziami grafu. Tzn. jeśli pionek jest w punkcie p i istnieje krawędź $p \to q$, to gracz 1 może przesunąć pionek do punktu q.

Natomiast gracz 2 może „przekierowywać strzałki". Tzn. jeśli pionek jest aktualnie w punkcie p, to gracz 1 może zastąpić dowolną krawędź $p \to q$ przez dowolną krawędź

$p \to q'$, której wcześniej nie było w grafie[1]. (Jesli nie ma takiej mozliwości, gracz 2 traci ruch, ale nie przegrywa.) Gracz 2 **nie** moze jednak przekierowywać strzałek prowadzących bezpośrednio do *Mety* (tzn. jeśli w powyższym opisie $q = Meta$).

Który z graczy ma strategię wygrywającą, gdy graf jest

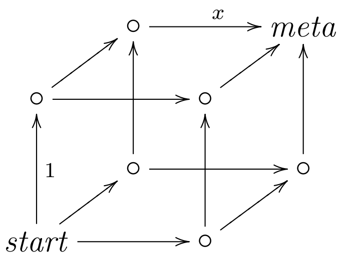
(a) Drzewem z orientacją od dziecka do rodzica, *Start* jest jednym z liści a *Metą* jest korzeń ?

(b) Kratą $n \times n$ ze *Startem* i *Metą* w przeciwległych wierzchołkach ? Tzn. krawędzie są postaci $(i, j) \to (i + 1, j)$ oraz $(i, j) \to (i, j + 1)$, o ile $+1$ jest określone, $Start = (1, 1)$, $Meta = (n, n)$.

(c) Kratą trójwymiarową $n \times n \times n$?

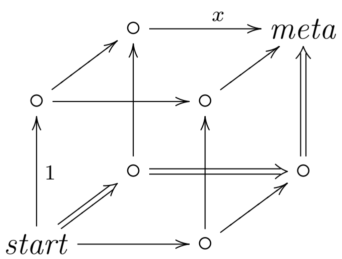
Nazskicować algorytm, który dla danego grafu rozstrzyga, czy gracz 1 ma strategię wygrywajacą. Algorytm może działać w czasie wykładniczym, dobrze jednak, żeby używał pamięci wielomianowej w stosunku do rozmiaru grafu.

Problem (3 punkty) Rozważamy sieć dróg w kształcie sześcianu:



Podobnie jak w przykładach z pierwszego wykładu, zakładamy, że N graczy chce przejechać ze *startu* do *mety*. Przyjmujemy, że czas przejazdu każdą krawędzią jest taki sam, tym razem jednak interesuje nas **koszt** przejazdu. Koszt przejazdu każdą „pionową” krawędzią jest 1, natomiast koszt przejazdu „poziomą” krawędzią jest zmienny i wynosi $\frac{m}{N}$, gdzie m jest liczbą graczy, którzy jadą tą krawędzią w tym samym czasie.

Strategią każdego gracza jest wybór trasy, np.



Oczywiście, każdy gracz chce zminimalizować swój koszt. Czy istnieją czyste punkty równowagi Nasha?

[1] Podkreślmy, że gracze poruszają się na przemian; w szczególnosci „przekierowanie” nie moze nastąpić „w trakcie” przesuwania pionka.

Jaki jest minimalny średni koszt przejazdu (przy pewnym profilu), a jaki jest najgorszy koszt w punktach równowagi Nasha?

Spróbować rozważyć bardziej skomplikowany wariant gry, w którym, jadąc daną krawędzią, gracz dowiaduje się, ilu uczestników jedzie razem z nim i w zależności od tego, może zmienić trasę. Czy ma to wpływ na koszt przejazdu?