AATG Zadania I seria. Termin rozwiązania: 16 czerwca 2008

Rozwiązania proszę składać **jedynie w postaci wydruku lub elektronicznie .ps lub .pdf** na adres niwinski@mimuw.edu.pl.

Zasady punktacji: Uzyskana liczba punktów oznacza zarazem ocenę (po stosownym zaokrągleniu), np. 3.14 punktów = dostateczny. Można rozwiazywać zadania w zespołach, wtedy jednak liczba zdobytych punktów dzieli się przez liczbę uczestników.

1. (1 punkt) Załóżmy, że $Pos = Pos_0 \cup Pos_1 \cup Pos_2$, gdzie zbiory Pos_i są skończone i rozłączne. Rozważamy grę **trojga** graczy: 0, 1 i 2, gdzie zbiór Pos_i jest zbiorem pozycji gracza i. Jak zwykle $Mov \subseteq Pos \times Pos$, przy czym zakładamy, że $(\forall p)\,(\exists q)\, Mov(p,q)$. Ponadto jest określona funkcja $rank : Pos \to \mathbb{N}$. Gracz i wygrywa nieskończoną rozgrywkę $\pi = (p_0, p_1, \ldots)$, jeśli $\limsup_{n\to\infty} rank(p_n) = i \bmod 3$, dla $i = 0, 1, 2$.

Czy jest prawdą, że dla każdej pozycji $p \in Pos$, jeden z graczy ma strategię wygrywającą z tej pozycji ?

2. (2 punkty) Przy założeniach z poprzedniego zadania, zaprojektować algorytm, który dla danej pozycji rozstrzyga, który z graczy (jeśli w ogóle) ma strategię wygrywającą.

3. (1 punkt) Rozważamy skończoną arenę $\langle Pos_E, Pos_A, Mov\rangle$ z funkcją kosztu określoną na krawędziach, $c : Mov \to \mathbb{N}$. Zakładamy, że zawsze jest możliwy ruch, tzn. $(\forall p)\,(\exists q)\, Mov(p,q)$. Przyjmujemy, że rozgrywka kończy się z chwilą zamknięcia pierwszej pętli

$$\pi = (p_0, p_1, \ldots, p_m, \ldots, p_n = p_m)$$

i Ewa wygrywa, jeśli suma

$$\sum_{i=m}^{n-1} c(p_i, p_{i+1})$$

jest parzysta; w przeciwnym razie wygrywa Adam. Udowodnić, że dla każdej pozycji, jeden z graczy ma strategię wygrywajacą z tej pozycji. Czy możemy założyć, że jest to strategia pozycyjna ?

4. (2 punkty) Przy założeniach z poprzedniego zadania (nr 3), zaprojektować algorytm, który dla danej pozycji rozstrzyga, który z graczy ma strategię wygrywającą i znajduje strategię dla zwycięzcy.

5. (2 punkty) Rozważamy grę na arenie $\langle Pos_E, Pos_A, Mov\rangle$ z funkcją $rank : Pos \to \mathbb{N}$, przyjmującą skończenie wiele wartości, w której Ewa wygrywa nieskończoną rozgrywkę $\pi = (p_0, p_1, \ldots)$, o ile $\sup\{rank(p_i) : i = 0, 1, \ldots\}$ jest parzysty (zauważmy, że ten warunek zależy od prefiksu).

(a) Udowodnić, że dla dowolnej pozycji, jeden z graczy ma strategię pozycyjną wygrywającą z tej pozycji.

(b) Podać algorytm, który dla danej areny skończonej oblicza zbiory pozycji wygrywających dla Ewy i Adama (o jak najlepszej złożoności).

6. (2 punkty) Rozważamy grę na arenie $\langle Pos_E, Pos_A, Mov \rangle$ z funkcją $rank : Pos \to \{0, 1\}$, w której Adam wygrywa nieskończoną rozgrywkę, jeśli 3 razy pod rząd pojawi sie ta sama etykieta.

(a) Udowodnić, że dla dowolnej pozycji, jeden z graczy ma strategię wygrywającą.

(b) Czy możemy założyć, że jest to strategia pozycyjna ? Jeśli nie (dla któregoś z graczy), oszacować rozmiar potrzebnej pamięci.

(c) Podać algorytm, znajdujacy rozbicie na zbiory pozycji wygrywających Adama i Ewy.

7. (1 punkt) Zakładamy, że gra dwóch graczy w ujęciu strategicznym jest antagonistyczna, tzn. $u_1(p, q) = -u_2(p, q)$, oraz symetryczna, tzn. $u_1(p, q) = u_2(q, p)$. Znaleźć wartość gry (tzn. wypłatę graczy w punkcie równowagi).

Problem (od 0 do 5 pt.) Przeanalizować z punktu widzenia teorii gier ponizszą sytuację – zbudować odpowiednią grę, wskazać punkty równowagi Nasha itp.

Pan dr X ma w grupie ćwiczeniowej 20 studentów. Na każdych zajęciach sprawdza listę obecności, ale w nieco uproszczony sposób: gdy widzi, że brakuje K osób, sprawdza tylko K losowo wybrane nazwiska z listy. (Np. gdy brakuje jednej osoby, to losuje 1 pozycję na liscie.) Zakładamy, że w semestrze jest 15 ćwiczeń, nieobecność (wykryta) na 20 % zajeć powoduje niezaliczenie cwiczeń.

Z punktu widzenia studenta, koszt udania się na ćwiczenia jest -2 („stracone" dwie godziny), jednak koszt niezaliczenia cwiczeń jest -60.

Jak często wystarczy przychodzić na zajęcia, by bezpiecznie zaliczyć ćwiczenia jak najmniejszym kosztem ?