Algorytmiczne aspekty teorii gier: Wykład 5

Wykład prowadził dr hab. Igor Walukiewicz
Notatki przygotował Dymitr Pszenicyn
<dp189434@zodiac.mimuw.edu.pl>

02-04-2003

Spis treści

1 Przypomnienie

1.1 Gry

Grą nazywamy:

$$G = \langle Pos_E, Pos_A, Moves, rank : Pos \to \omega, C \subseteq \omega^\omega \rangle$$

Ewa wygrywa rozgrywkę $p_0 p_1 p_2 \ldots$ jeśli $rank(p_1) rank(p_2) \ldots \in C$.
Ewa wygrywa rozgrywkę $p_0 p_1 p_2 \ldots p_n$ jeśli Adam jest zablokowany w p_n.
Twierdzenie: Nie wszystkie gry są zdeterminowane.

1.2 Gry na przetrwanie

$rank : Pos \to 0$ i $C = \{x_1 x_2 \ldots : \forall i x_i = 0\}$
Twierdzenie (Gale–Steward): Gry na przetrwanie są zdeterminowane.

1.3 Gry powtórkowe

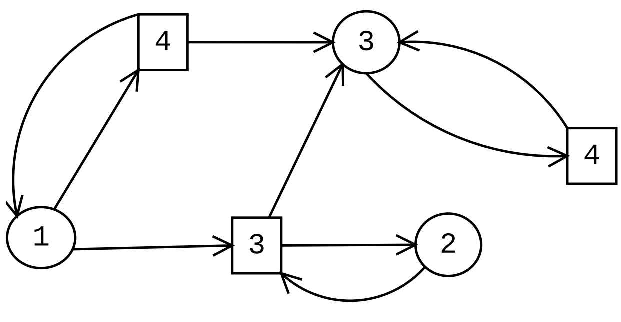
$rank : Pos \to 1, 2$ i $C = \{x_1 x_2 \ldots : \exists^\infty i x_i = 2\}$
Twierdzenie (Wolfe): Gry powtórkowe są zdeterminowane.

2 Gry parzystości

$$G = \langle Pos_E, Pos_A, Moves, rank : Pos \to \{1, \ldots d\} \rangle$$

Ewa wygrywa rozgrywkę $p_0 p_1 p_2 \ldots$ jeśli $limsup_{n \to \infty} rank(p_n)$ jest parzyste lub Adam nie może wykonać ruchu. Oznacza to, że największy z rank który powtarza się nieskończenie często, jest parzysty.

Ważne jest założenie, że funkcja rangi idzie w skończony zbiór.



Rysunek 1: Przykładowa gra parzystości

Na rysunku 1 oznaczono kółkami pozycje z których rusza się Ewa, a kwadracikami te z których rusza się Adam. W tej grze Ewa ma strategię wygrywającą.

3 Strategie

Definicja: Strategią dla Ewy jest $\sigma : Pos^* \times Pos_E \to Pos$ taka że $(v, \sigma(\vec{v}, v)) \in Moves$

Definicja: Strategią pozycyjną dla Ewy jest $\sigma : Pos_E \to Pos$

Definicja: Strategia σ dla Ewy jest wygrywająca od v jeśli wszystki rozgrywki od v zgodne ze strategią są wygrywające dla Ewy.

Twierdzenie (Emerson i Jutla, Mostowski): W każdym wierzchołku gry parzystości, jeden z graczy ma wygrywającą strategię pozycyjną.

Wniosek 1: Gry parzystości są zdeterminowane.

Wniosek 2: Znalezienie strategii dla gry parzystości jest w NP i w co-NP.

4 Warunki Mullera

Rozważmy

$$G =< Pos_E, Pos_A, Moves, rank : Pos \to \omega, C \subseteq \omega^\omega >$$

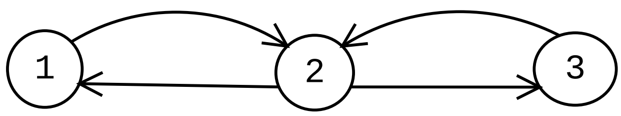
Załóżmy że $Rg = rank(Pos)$ jest skończony i C jest zdefiniowany przez $F \subseteq P(Rg)$ następująco:

Dla ścieżki $\vec{v} = v_0 v_1 \ldots$, niech $inf(\vec{v}) = \{x \in Rg : rank(v) = x \text{ dla niesk. wielu } v\}$
$C = \{\vec{v} : inf(\vec{v}) \in F\}$

Przykład (gry parzystości): $S \in F$ jeśli $max(S)$ jest parzyste.

Strategia bez pamięci to funkcja $\sigma : v_0 \to v_1$. Jest to podgraf grafu gry.

Istnieją gry z warunkami Mullera których strategie wygrywające potrzebują pamięci.



Rysunek 2: Przykładowa gra z warunkami Mullera

Niech w grze 2 będzie warunek Mullera $F = \{\{1, 2, 3\}\}$. Gracz 0 ma wygrywającą strategię w tej grze, ale nie ma strategii bez pamięci.

Jeśli $F = \{\{1, 2\}\}$ lub $F = \{\{1, 2\} \{2, 3\}\}$ to jest strategia bez pamięci.

Gry z warunkiem Mullera są zdeterminowane i istnieją strategie wygrywające ze skończoną pamięcią.

5 Atraktory

Dla każdego zbioru $F \subseteq V$ definiujemy $Attr(F)$ następująco:

$$Attr_E(F) = \mu X.F \cup (Pos_E \cap \Diamond X) \cup (Pos_A \cap \Box X)$$

$$Attr_E^0(F) = F$$

τ – porządkowa liczba graniczna

$$\begin{aligned} Attr_E^{\tau+1}(F) = & \ Attr_E^{\tau}(F) \cup \\ & \cup \{v \in Pos_E : \exists v\prime . E(v, v\prime) \wedge v\prime \in Attr_E^{\tau}(F)\} \cup \\ & \cup \{v \in Pos_A : \forall v\prime . E(v, v\prime) \rightarrow v\prime \in Attr_E^{\tau}(F)\} \end{aligned}$$

$$Attr_E^{\tau}(F) = \bigcup \rho < \tau Attr_E^{\rho}(F)$$

$$Attr_E(F) = \bigcup \tau Attr_E^{\tau}(F)$$

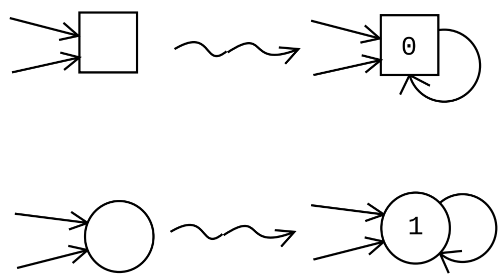
Uwaga: Z atraktora $Attr_E^{\omega+1}$ Ewa zawsze dojdzie do F w skończonej liczbie kroków, ale od Adama zależy ile to będzie.

Fakt: Z dowolnego wierzchołka należącego do $Attr_E(F)$ Ewa ma strategię pozycyjną żeby dojść do F. Z dowolnego wierzchołka należącego do $V \setminus Attr_E(F)$ Adam ma strategię pozycyjną żeby ominąć F.

6 Gładkość

Definicja: G jest gładka jeśli każdy wierzchołek ma następnika.

Możemy zrobić z naszej gry parzystości grę gładką. Patrz diagram 3.



Rysunek 3: Sposób postępowania z wierzchołkami z których nie ma wyjścia

Lemat: Dla każdego G, F zbioru pozycji w G jeśli G jest gładka to $G \setminus Attr_E(F)$ jest gładka i $G \setminus Attr_A(F)$ też jest gładka.

7 Twierdzenie: Zdeterminowanie gier parzystości

Twierdzenie: Z każdego wierzchołka gry parzystości, jeden z graczy ma strategię wygrywającą bez pamięci.

Dowód poprowadzimy osobno dla grafów skończonych i nieskończonych.

7.1 Dowód twierdzenia (dla grafów skończonych)

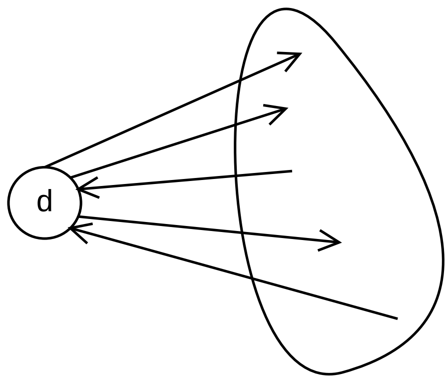
Dowód (dla grafów skończonych): Indukcja po liczbie wierzchołków.

Załóżmy, że mamy specjalne znaczniki $\top$ i $\perp$ w których Ewa odpowiednio natychmiast wygrywa i natychmiast przegrywa. Wierzchołków ze specjalnymi znacznikami nie będziemy wliczać do rozmiaru grafu.

Weźmy wierzchołek o randze d. Rozważmy następujące przypadki:

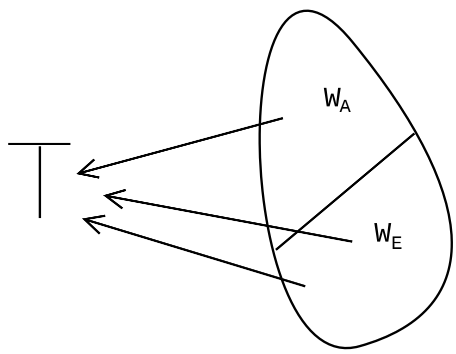
1. d jest parzyste i wybrany wierzchołek jest wierzchołkiem dla Ewy.

   Ten przypadek jest przedstawiony na diagramie 4.



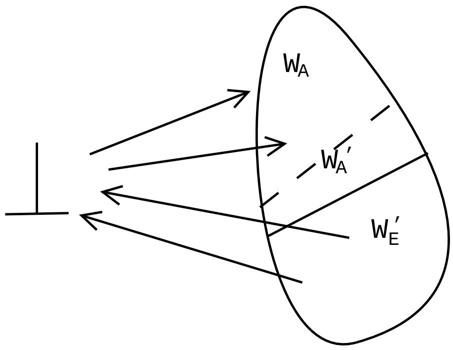
Rysunek 4: Graf gry z wybranym wierzchołkiem dla Ewy

Zmieniamy wybrany wierzchołek na wierzchołek wygrywający dla Ewy. Nowa gra ma mniej wierzchołków, więc znajdujemy podział na W_A i W_E. W W_A Adam na pewno ma strategie wygrywającą. Natomiast Ewa „chodzi" wewnątrz W_E, albo wchodzi do $\top$. Patrz diagram 5.



Rysunek 5: Graf z wybranym wierzchołkiem Ewy ustawionym na $\top$

Jeśli z $\top$ nie ma strzałki do W_E, to $\top$ jest przegrywający dla Ewy, więc zamieniamy go na $\perp$ i jeszcze raz przeliczamy. Patrz diagram 6.

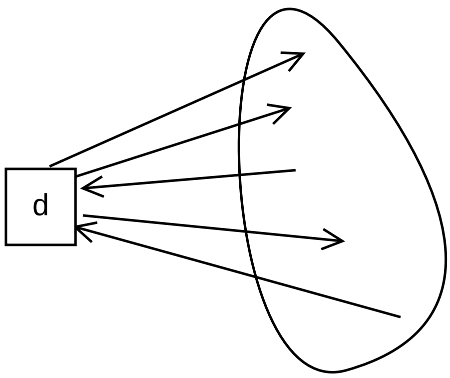


Rysunek 6: Graf z wybranym wierzchołkiem Ewy ustawionym na $\perp$

Startując z $W_A\prime \setminus W_A$ – albo zostajemy w W_A, albo dojdziemy do $\perp$, ale wszystkie strzałki z $\perp$ są do W_A, czyli wygrywa Adam.

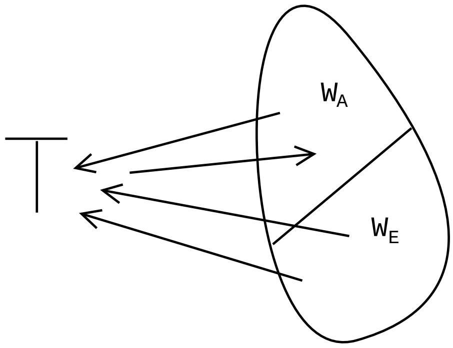
2. d parzyste i wybrany wierzchołek Adama.

   Ten przypadek jest przedstawiony na diagramie 7.



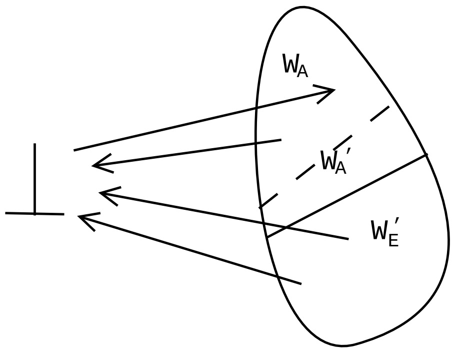
Rysunek 7: Graf gry z wybranym wierzcholkiem dla Adama

Zmieniamy wybrany wierzchołek na wierzchołek wygrywający dla Ewy. Nowa gra ma mniej wierzchołków, więc znajdujemy podział na W_A i W_E. W W_A Adam na pewno ma strategie wygrywającą. Natomiast Ewa „chodzi” wewnątrz W_E, albo wchodzi do $\top$. Patrz diagram 8.



Rysunek 8: Graf z wybranym wierzchołkiem Adama ustawionym na $\top$

Jeśli wszystkie strzałki z d prowadzą do W_E to Ewa wygrywa. Jeśli istnieje strzałka z d do W_A to wtedy zamieniamy $\top$ na $\perp$ i przeliczamy, bo Adam może pójść z wybranego wierzchołka do W_A i wygrać. Patrz diagram 9.



Rysunek 9: Graf z wybranym wierzchołkiem Adama ustawionym na $\perp$

3. sytuacje z d nieparzystym są symetryczne.

W ten sposób udowodniliśmy, że zachodzi krok indukcyjny. Znaleźliśmy podział grafu na wierzchołki wygrywające dla Adama i dla Ewy.

7.2 Dowód twierdzenia (dla grafów nieskończonych)

Dowód (dla grafów nieskończonych): Indukcja po wielkości skończonego zbioru rang $\{0, \ldots d\}$.

Zgodnie z konstrukcją przedstawioną na rysunku 3, przekształcimy naszą grę parzystości w grę gładką.

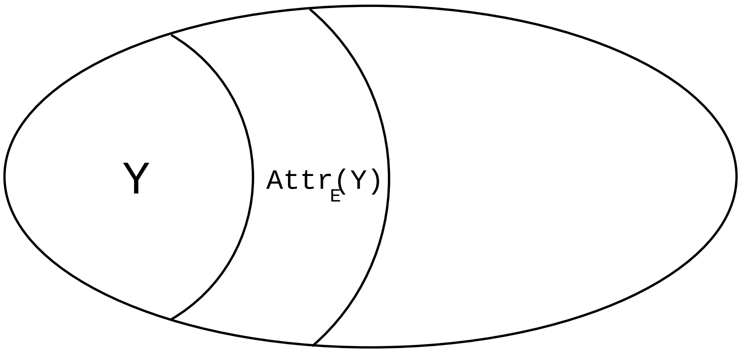
Najpierw rozpatrzmy proste przypadki. W przypadku gdy zbiór rang jest równy $\{0\}$, to wygrywa Ewa. Natomiast w przypadku gdy zbiór rang jest równy $\{1\}$, to wygrywa Adam.

Krok indukcyjny:

Załóżmy, że d – parzyste (przypadek nieparzysty jest symetryczny).

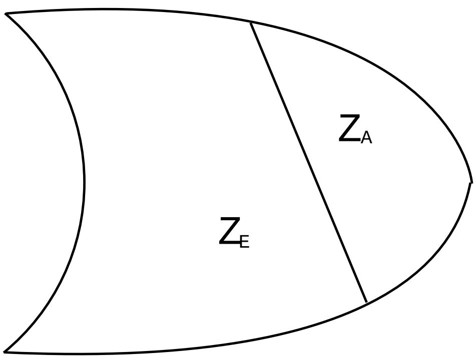
Niech zbiór $Y = rank^{-1}(d)$.

Wyznaczamy $Attr_E(Y)$ i otrzymujemy sytuację jak na rysunku 10.



Rysunek 10: Graf z wyznaczonym zbiorem Y i $Attr_E(Y)$

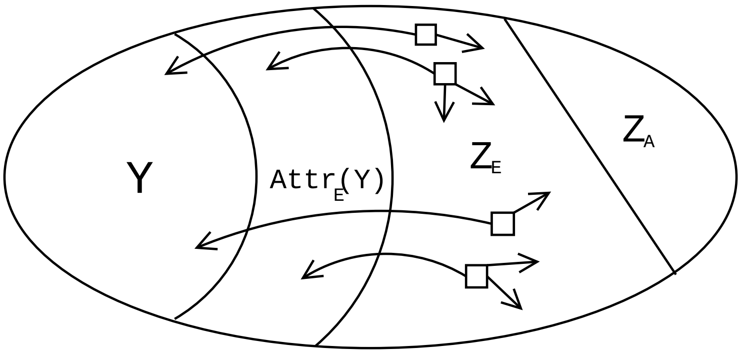
Następnie liczymy na reszcie grafu zbiory wygrywające dla graczy (indukcja). Patrz rysunek 11.



Rysunek 11: Graf z indukcyjnie wyznaczonymi zbiorami Z_E i Z_A

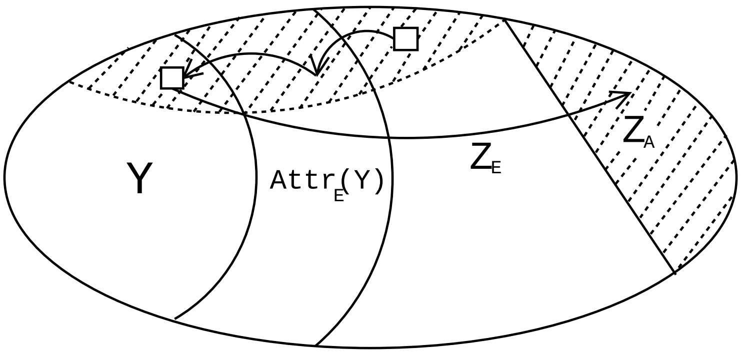
W obu grafach (bez zbioru $Attr_E(Y)$ oraz z nim) wierzchołki Z_A są wygrywające dla Adama. Jest tak dlatego, że wierzchołki w Z_A nie należą do atraktora dla Ewy zbioru Y więc Adam może pozostawać w Z_A i tam wygrać (tak samo jak w grze z wyrzuconymi wierzchołkami należącymi do $Attr_E(Y)$).

W Z_E nie ma kółek ze strzałkami do atraktora (bo byłyby one w atraktorze), ale mogą być kwadraciki ze strzałkami do atraktora. Patrz rysunek 12.



Rysunek 12: Graf z zaznaczonymi wierzcholkami Adama prowadzącymi do $Attr_E(Y)$

Z części atraktora Adam może się dostać do Z_A, a więc wygrać. Są to wierzchołki należące do atraktora Adama zbioru Z_A. Oznaczmy ten zbiór $W_A^1 = Attr_A^G(Z_A)$. Na rysunku 13 zaznaczono zbiór W_A^1.



Rysunek 13: Graf z zaznaczoną częścią w której widać, że wygrywa Adam

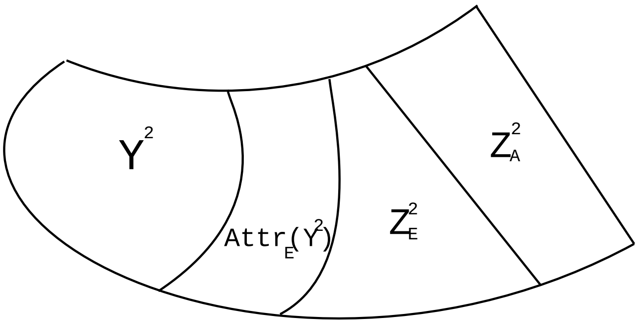
Wyrzucamy te części gdzie wyznaczyliśmy, że wygrywa Adam i powtarzamy kroki, aż wyznaczymy całe W_A zgodnie z następującymi wzorami. Patrz rysunek 14, na którym jest przedstawiony graf G_2.

Następny krok:

$$W_A^2 = Attr_A^{G_2}(Z_A^2) \cup W_A^1$$

Ogólnie:

$$W_A^{k+1} = Attr_A^{G_{k+1}}(Z_A^{k+1}) \cup W_A^k$$



Rysunek 14: Graf G_2, z wyrzuconą częścią w której na pewno wygrywa Adam (po pierwszym kroku wyznaczania W_A)

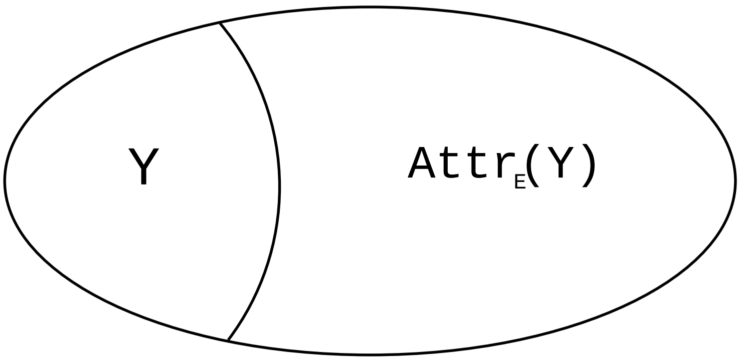
Dla τ – porządkowej liczby granicznej:

$$W_A^\tau = \bigcup_{\rho<\tau} W_A^\rho$$

Otrzymujemy ciąg kolejnych W_A o których wiemy, że istnieje τ takie że:

$$W_A^1, W_A^2, \dots W_A^\tau = W_A^{\tau+1}$$

Na końcu indukcji otrzymamy następującą sytuację (patrz rysunek 15). Mamy tu zbiór Y i jego atraktor (dla Ewy). W tej sytuacji wygrywa Ewa gdyż wierzchołki w Y mają rank d (parzysty).



Rysunek 15: Graf, w którym pozostały tylko wierzchołki rangi d i atraktor tego zbioru

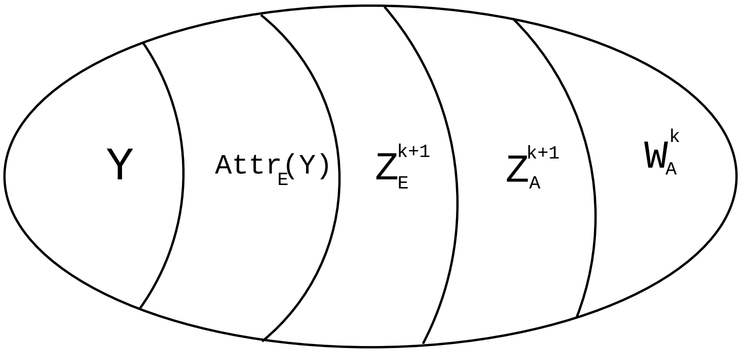
Żeby skończyć dowód, należy jeszcze pokazać że otrzymany zbiór $W_A = \bigcup_k W_A^k$ jest wygrywający dla Adama, a jego dopełnienie (zbiór $Pos \setminus W_A$) jest wygrywające dla Ewy. Skorzystamy więc z następujących lematów:

Lemat 1: Adam wygrywa w zbiorze $W_A = \bigcup_k W_A^k$.

Dowód: Weźmy dowolny wierzchołek $v \in W_A = \bigcup_k W_A^k$. Wynika z tego, że $v \in W_A^{k+1}$.

Z definicji wiemy że
$$v \in W_A^{k+1} = Attr_A(Z_A^{k+1} \cup W_A^k)$$
Czyli w v Adam wygrywa bo v należy do atraktora Adama zbioru wygrywającego dla Adama (z indukcji).

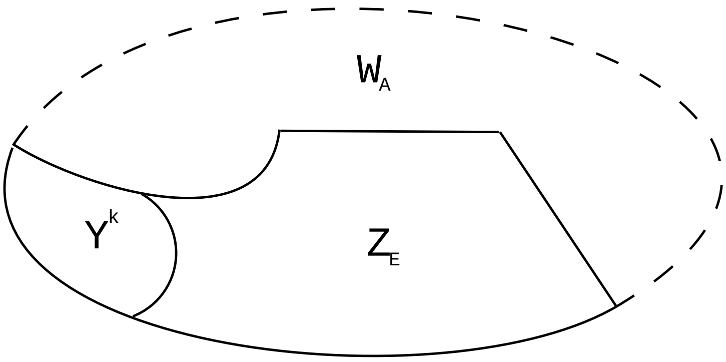
Patrz rysunek 16.



Rysunek 16: Graf, z wyznaczonymi zbiorami w pewnym kroku indukcji

Lemat 2: Ewa wygrywa z pozycji należących do zbioru $Pos \backslash W_A$ i ma strategię bez pamięci.

Dowód: Zgodnie z konstrukcją zbioru W_A, w zbiorze $Z_E \cup Y^k$ Ewa wygrywa, gdyż z Y^k Adam nie może już wyjść do W_A (bo leżałoby to w atraktorze W_A), a Ewa może wygrać w Z_E lub przejść do Y^k. W zbiorze Y^k są wierzchołki z rank d (parzysty) więc w tym zbiorze też wygrywa Ewa. Patrz rysunek 17.



Rysunek 17: Graf, z zaznaczonymi wierzchołkami wygrywającymi dla Adama i dla Ewy

W ten sposób udowodniliśmy, że gry parzystości (zarówno dla grafów skończonych jak i nieskończonych) są zdeterminowane.