Pozycyjna determinacja gier parzystości

(notatki do wykładu)

Damian Niwiński

21 grudnia 2005

Pierwsza nieskończona liczba porządkowa, czyli zbiór liczb naturalnych, jest oznaczana ω.

Przypomnijmy (wykład[1] z 25.10.2005), że gra jest ogólnie zadana jako układ

$$G = \langle Pos_E, Pos_A, Mov, C \rangle$$

gdzie $Pos = Pos_E \dot{\cup} Pos_A$ i Mov tworzą arenę, a $C \subseteq Pos^\omega$ jest warunkiem wygrywającym dla Ewy. A zatem nieskończona rozgrywka $\pi = (p_0, p_1, \ldots)$ jest wygrana przez Ewę wtedy, gdy $\pi \in C$, a przez Adama wtedy, gdy $\pi \in \bar{C} = Pos^\omega - C$.

Gra z warunkiem parzystości dana jest przez arenę wraz z funkcją $rank : Pos \to \{0, 1, \ldots, n\}$, dla $n < \omega$, a warunkiem wygrywającym dla Ewy jest

$$C = \{(p_0, p_1, \ldots) : \limsup_{k \to \infty} rank(p_k) \text{ jest parzyste}\}$$

Grę z warunkiem parzystości (lub krótko: grę parzystości) będziemy zwykle przedstawiać przez $\langle Pos_E, Pos_A, Mov, rank \rangle$.

Zaczniemy od obserwacji, że dopełnienie warunku parzystości jest również warunkiem parzystości, z dokładnością do przesunięcia funkcji $rank$ o 1.

Dokładniej, przypuśćmy, że wartości funkcji $rank$ są w zbiorze $\{0, 1, \ldots, n\}$. Rozważmy grę G', w której $Pos'_E = Pos_A, Pos'_A = Pos_E$, $Mov' = Mov$ oraz $rank'(q) = rank(q) + 1$. Zauważmy, że pozycje i ruchy pozostały te same, tylko zmieniły właścicieli, a zatem strategia dobra dla Ewy w G jest dobra dla Adama w G' i *vice versa*. W szczególności pierwsza gra jest (pozycyjnie) zdeterminowana wtedy i tylko wtedy kiedy druga. Oczywiście wartości funkcji $rank'$ są w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$.

W dalszym ciągu grę parzystości gdzie $rank(Pos) \subseteq \{\iota, m\}$ będziemy nazywać grą z warunkiem $[\iota, n]$. Wystarczy rozważać $\iota = 0, 1$, bo w razie potrzeby można przeskalować o -2.

Twierdzenie Dowolna gra z warunkiem parzystości jest zdeterminowana. Co więcej, Ewa i Adam mają wygrywające strategie *pozycyjne*, S_E i S_A odpowiednio, takie, że $Pos \subseteq S_E \cup S_A$.

Tzn. każda pozycja jest wygrywająca dla jednego z graczy i zwycięzca może użyć strategii pozycyjnej zależnej tylko od gracza (a nie od pozycji początkowej).

Wykażemy tezę przez indukcję na długość przedziału $[\iota, m]$.

Przypadek $[0, 0]$ odpowiada grze, w której każda nieskończona rozgrywka jest wygrana przez Ewę. Jak wykazaliśmy na wykładzie 11.10.2005, zbiór pozycji wygrywających dla Ewy w tej grze (czyli ,,bezpiecznych") jest największym punktem stałym operatora *Ewa*. Natomiast jego dopełnienie, czyli najmniejszy punkt stały operatora *Adam* jest z kolei zbiorem pozycji

[1] Zob. ,,Co było na wykładzie ?", `http://zls.mimuw.edu.pl/~niwinski/Gry/cogry3.html`.

skończenie wygrywających dla Adama (wykład 18.10.2005), czyli pozycji wygrywających dla Adama w grze z warunkiem $[0, 0]$.

A zatem w tym przypadku dowiedliśmy już determinacji, a uwagi o pozycyjności strategii wynikają wprost z dowodów tamtych faktów.

Jak już zauważyliśmy wyżej, determinacja warunku $[0, m]$ pociaga za sobą determinację $[1, m + 1]$ i na odwrót. Dlatego w kroku indukcyjnym wystarczy rozważyć grę z warunkiem $[\iota, m]$, gdzie $m > 0$ jest *parzyste*.

Ustalmy taką grę

$$G = \langle Pos_E, Pos_A, Mov, rank\rangle$$

Niech $F = \{q : rank(q) = m\}$.

Pomocniczo określimy pewną klasę gier G_-, używających o jeden ,,rank" mniej. Dokładniej, dla dowolnego zbioru pozycji $M \subseteq Pos$, określamy grę $G_-(M)$ przez następujące warunki:

- Dla każdej pozycji $q \in M$ usuwamy wszystkie ruchy $(q, p) \in Mov$ i czynimy ją pozycją Adama (a więc Ewa wygrywa w q).
- Dla każdej pozycji $q \in M$ dodajemy nową pozycję $\widehat{q}$ (należącą do Ewy lub Adama w zależności od tego, czyja była pozycja q) oraz ruchy $(\widehat{q}, p)$, o ile $(q, p) \in Mov$.

  Tak więc z pozycji $\widehat{q}$ można wyjść tak samo jak kiedyś z q, natomiast nie można do niej dojść. Natomiast do pozycji $q \in M$ można dojść jak dawniej, ale nie można z niej wyjść. Dla porządku kładziemy $rank(\widehat{q}) = 0$, dla $q \in M$.
- Dla $q \in Pos - M$, przyjmujemy $\widehat{q} = q$.
- Dla pozycji $q \in F$ obniżamy $rank^{++}(q) := rank(q) - 1$.

Określamy

$$Reach_E^{++}(M) = \{q : \widehat{q} \text{ jest pozycją wygrywającą dla Ewy w } G_-(M)\}$$

Lemat A Ewa ma wygrywającą strategię pozycyjną S_E w grze G, taką, że

$$S_E \supseteq \nu Z.Reach_E^{++}(Z \cap F)$$

(patrz wykład z 11.10.2005).

Niech $Z_0 = \nu Z.Reach_E^{++}(Z \cap F)$, mamy więc

$$Z_0 = Reach_E^{++}(Z_0 \cap F)$$

Określimy poszukiwaną strategię pozycyjną dla Ewy na pozycjach z Z_0.

Z założenia indukcyjnego dla gry $G_-(Z_0 \cap F)$ mamy wygrywającą strategię pozycyjną dla Ewy, powiedzmy S', zawierającą wszystkie pozycje wygrywające Ewy w tej grze. Jeśli $\widehat{p}$ jest taką pozycją, to niech $S'(\widehat{p})$ oznacza jedyną pozycję q taką, że $\widehat{p}q \in S'$. (Tzn. traktujemy S' jako funkcję; w dalszym ciągu będziemy podobnie traktować wszystkie strategie pozycyjne.) Dla $p \in Z_0 = Reach_E^{++}(Z_0 \cap F)$, $\widehat{p}$ jest pozycja wygrywającą w $G_-(Z_0 \cap F)$ (z definicji operatora $Reach_E^{++}$). Jeśli $p \in Pos_E$ (w oryginalnej grze G), kładziemy

$$S_E(p) = S'(\widehat{p})$$

Upewnimy się najpierw, że ta definicja poprawnie określa strategię w sensie Wykładu z 4.10.2005.[2] Powiemy, że ruch $(p,q) \in Mov$ jest *zgodny* ze strategią S_E jeśli $q = S_E(p)$ lub $p \in Pos_A$. Otóż pokażemy, że jeśli $p \in Z_0$ i ruch (p,q) jest zgodny z S_E, to $q \in Z_0$. Wiemy, że $\widehat{p}$ jest pozycją wygrywającą w $G_-(Z_0 \cap F)$ i ruch $(\widehat{p},q)$ jest zgodny z S', a zatem q jest pozycja wygrywającą dla Ewy w $G_-(Z_0 \cap F)$. Jeśli $q \notin Z_0 \cap F$, to $\widehat{q} = q$, a zatem $q \in \mathit{Reach}_E^{++}(Z_0 \cap F) = Z_0$. W przeciwnym razie $q \in Z_0 \cap F \subseteq Z_0$. A więc każda rozgrywka startująca z Z_0 i zgodna ze strategią S_E pozostaje w Z_0.

Pozostaje wykazać, że strategia S_E jest wygrywająca dla Ewy.

Żadna skończona rozgrywka zgodna z S_E nie może być przegrana przez Ewę, bo żadna pozycja w Z_0 nie jest terminalna dla Ewy (skoro odpowiednia pozycja $\widehat{p}$ jest wygrywająca w grze $G_-(Z_0 \cap F)$).

Rozważmy nieskończoną rozgrywkę $\pi = (p_0, p_1, \ldots)$. Rozpatrzmy dwa przypadki.

1. Dla nieskończenie wielu ℓ, $p_\ell \in F \cap Z_0$. Wtedy, zgodnie z definicją F, najwyższy parzysty *rank*, m, jest przyjmowany nieskończenie często, a więc rozgrywka jest wygrana przez Ewę.

2. Od pewnego miejsca $p_\ell = \widehat{p_\ell}$. Od tego miejsca rozgrywka jest zgodna ze strategią S', a zatem jest wygrana w grze $G_-(Z_0 \cap F)$. Ale w tej ostatniej grze funkcja *rank* była „pogorszona” dla Ewy, więc tym bardziej ta rozgrywka jest wygrana w grze G. Mamy bowiem
$$\limsup_{\ell\to\infty} \mathit{rank}(p_\ell) = \max \{\limsup_{\ell\to\infty} \mathit{rank}^{++}(p_\ell), m\}$$

Ta uwaga kończy dowód Lematu A.

Z kolei dla dowolnego $M \subseteq Pos$ określamy
$$\mathit{Remain}_A^{++}(M) = \overline{\mathit{Reach}_E^{++}(\overline{M})}$$

Zgodnie z definicją operatora Reach_E^{++}, $p \in \mathit{Remain}_A^{++}(M) \iff$ w grze $G_-(\overline{M})$ Ewa nie ma strategii wygrywającej z pozycji $\widehat{p}$. Z założenia indukcyjnego, pozycja ta jest wówczas wygrywająca dla Adama; co więcej Adam ma pozycyjną strategię zawierającą wszystkie pozycje $\widehat{p}$, takie że $p \in \mathit{Remain}_A^{++}(M)$.

Korzystając z praw De Morgana oraz analogicznego prawa dla punktów stałych: $\overline{\nu x.f(x)} = \mu x.\overline{f(\bar{x})}$, otrzymujemy
$$\begin{aligned}\overline{\nu Z.\mathit{Reach}_E^{++}(Z \cap F)} &= \mu Z.\overline{\mathit{Reach}_E^{++}(\bar{Z} \cap F)} \\ &= \mu Z.\mathit{Remain}_A^{++}(Z \cup \bar{F})\end{aligned}$$

Lemat B Adam ma wygrywającą strategię pozycyjną S_A w grze G, taką, że
$$S_A \supseteq \mu Z.\mathit{Remain}_A^{++}(Z \cup \bar{F})$$

Przyjmijmy skróty
$$\begin{aligned}\mathcal{R}(Z) &= \mathit{Remain}_A^{++}(Z \cup \bar{F}) \\ \mu Z.\mathcal{R}(Z) &= Z_1\end{aligned}$$

[2] Dowolna funkcja na Pos_E nie musi definiować strategii, bo może nas doprowadzić do punktu, w którym nie jest określona.

Mamy zatem

$$Z_0 \quad = \quad \bigcup_{\xi \in Ord} \mathcal{R}^{\xi}(\emptyset)$$

gdzie, jak zwykle,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\xi+1}(\emptyset) &= \mathcal{R}(\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset)) \\ \mathcal{R}^{\eta}(\emptyset) &= \bigcup_{\xi < \eta} \mathcal{R}^{\xi}(\emptyset) \end{aligned}$$

gdy η jest liczbą graniczną.

Dla $p \in Z_1$, niech min (p) będzie najmniejszą liczbą porządkową ξ', taką że $p \in \mathcal{R}^{\xi'}(\emptyset)$. Nietrudno jest widzieć, że min (p) jest postaci $\xi + 1$, dla pewnego ξ (nie jest liczbą graniczną).

Podobnie jak w dowodzie Lematu A, określimy poszukiwaną strategię pozycyjną dla Adama na pozycjach z Z_1. Niech $p \in Z_1$ i min $(p) = \xi + 1$, wtedy

$$p \in \mathit{Remain}_A^{++}(\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset) \cup \bar{F})$$

a zatem pozycja $\widehat{p}$ jest wygrywająca dla Adama w grze $G_{-}(\overline{\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset)} \cap F)$. Niech S_{ξ} będzie wygrywającą strategią pozycyjną Adama w tej grze, zawierającą jego wszystkie pozycje wygrywające (strategia taka istnieje z założenia indukcyjnego o grach G_{-}).

Kładziemy

$$S_A(p) = S_{\xi}(\widehat{p})$$

Podobnie jak w dowodzie Lematu A, pokażemy najpierw, że jeśli $p \in Z_1$ i ruch (p, q) jest zgodny z S_A, to $q \in Z_1$, a co więcej min $(q) \leq$ min (p). Istotnie, pozycja q musi być wygrywająca dla Adama w grze $G_{-}(\overline{\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset)} \cap F)$, ale wtedy nie może należeć do $\overline{\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset)} \cap F$ (bo tam Adam przegrywa), tym samym $\widehat{q} = q$. Stąd $q \in \mathit{Remain}_A^{++}(\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset) \cup \bar{F}) = \mathcal{R}^{\xi+1}(\emptyset)$, a zatem min $(q) \leq \xi + 1 =$ min (p).

W szczególności każda rozgrywka zgodna ze strategią S_A pozostaje w Z_1.

Podobnie jak w dowodzie Lematu A, łatwo zauważamy, że żadna skończona rozgrywka zgodna z S_A nie może być przegrana przez Adama, bo żadna pozycja w Z_1 nie jest terminalna dla Adama (skoro odpowiednia pozycja $\widehat{p}$ jest wygrywająca w grze $G_{-}(\overline{\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset)} \cap F)$).

Rozważmy nieskończoną rozgrywkę $\pi = (p_0, p_1, \ldots)$. Z uczynionej powyżej obserwacji mamy

$$\min\ (p_0) \geq \min\ (p_1) \geq \min\ (p_2) \geq \ldots$$

a zatem od pewnego miejsca min (p_ℓ) przyjmuje tę samą wartość, powiedzmy $\xi + 1$. Od tego miejsca Adam gra zgodnie ze strategią S_{ξ}, a zatem rozgrywka byłaby wygrana przez Adama w grze $G_{-}(\overline{\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset)} \cap F)$. W grze tej priorytety w punktach z F zostały wprawdzie zmniejszone na korzyść Adama, jednak od wspomnianego miejsca rozgrywka nigdy już nie wchodzi do zbioru F. Istotnie, skoro Adam nie może się znaleźć w zbiorze $\overline{\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset)} \cap F$ (bo tam przegrywa), to hipotetyczna pozycja $p_\ell \in F$ musiałby jednocześnie należeć do $\mathcal{R}^{\xi}(\emptyset)$, ale wtedy min $(p_\ell) \leq \xi$, wbrew założeniu o ustaleniu się min.

A zatem od pewnego miejsca $\mathit{rank}^{++}(p_\ell)$ pokrywa się z $\mathit{rank}(p_\ell)$, czyli rozgrywka π jest wygrana przez Adama również w grze G.

Ta uwaga kończy dowód Lematu B.

Teza Twierdzenia wynika natychmiast z Lematów A i B, ponieważ

$$\nu Z.\mathit{Reach}_E^{++}(Z \cap F) \cup \mu Z.\mathit{Remain}_A^{++}(Z \cup \bar{F}) = \mathit{Pos}$$

Uwagi bibliograficzne Pozycyjna determinacja gier parzystości została udowodniona po raz pierwszy w pracy E. A. Emerson and C. S. Jutla, *Tree automata, mu-calculus and determinacy*, Proceedings 32th Annual IEEE Symp. on Foundations of Comput. Sci., 368–377, 1991, i niezależnie w nieopublikowanym raporcie A. W. Mostowski, *Games with forbidden positions*, Technical Report 78, Instytut Matematyki, University of Gdansk, 1991. Przejrzysty dowód oparty na μ-rachunku można znaleźć w pracy I. Walukiewicz, *Pushdown processes: Games and model checking*, Information and Computation 164(2):234–263, 2001, a dowód dla ogólniejszego przypadku gier z warunkiem Mullera w pracy W. Zielonka, *Infinite games on finitely coloured graphs with applications to automata on infinite trees*, Theoretical Computer science 200:135–183, 1998.

Dowód przedstawiony w obecnej notce wykorzystuje pomysł Eryka Kopczyńskiego zastosowany do dowodu pewnej ogólniejszej własności gier pozycyjnie zdeterminowanych.