Metoda fazy stacjonarnej

Piotr Nayar

4 marca, 2009

Spis treści

1 Motywacje fizyczne

1.1 Fale kuliste

W niniejszej pracy badamy funkcje $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci

$$F(k) = \int_{\mathbb{R}^n} a(y) e^{ik\phi(y)} \, \mathrm{d}y,$$

gdzie $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką (klasy C^∞) o zwartym nośniku i $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest gładka. Okazuje się, że całki tego typu pojawiają się w zagadnieniach związanych z optyką falową. Konkretnie, powyższą całkę możemy interpretować jako superpozycję elementarnych radialnych fal płaskich e^{ikr}, pochodzących od źródeł rozłożonych na pewnej podrozmaitości $M \subset \mathbb{R}^3$. Takie superpozycje nazywa się często paczkami falowymi.

Aby się o tym przekonać rozważmy równanie falowe z prędkością fali $c = 1$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = 0.$$

Poszukujemy radialnie symetrycznych rozwiązań tego równania, czyli rozwiązań postaci $u = u(t, r)$. Operator Laplace'a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

zapisujemy w postaci biegunowej[1]

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad .$$

Dla funkcji zależącej jedynie od zmiennych radialnych mamy

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(u + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ur) . \end{aligned}$$

Nasze równanie sprowadza się zatem do równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ur) \ .$$

[1] Por. [GA], str. 2.

Niech $v = ru$. Wówczas

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ur) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

zatem otrzymaliśmy jednowymiarowe równanie struny. Bez trudu sprawdzamy, że dowolna funkcja postaci

$$v(r,t) = f(r+t) + g(r-t),$$

gdzie $f, g \in C^\infty$, jest rozwiązaniem powyższego równania. Otrzymaliśmy zatem klasę rozwiązań radialnego równania falowego postaci

$$u(r,t) = \frac{f(r+t)}{r} + \frac{g(r-t)}{r}.$$

Pierwszy składnik reprezentuje falę radialną biegnącą w kierunku środka układu współrzędnych, drugi składnik jest zaburzeniem rozchodzącym się ze środka układu współrzędnych. Z fizycznego punktu widzenia mamy falę emitowaną ze źródła umieszczonego w punkcie $r = 0$ i falę odbitą (np. na skutek umieszczenia sfery ograniczającej obszar rozchodzenia się zaburzenia). Jeśli rozwiązanie ma opisywać falę emitowaną z punktu $r = 0$ do jednorodnej przestrzeni, należy przyjąć $f \equiv 0$.

Otrzymaliśmy zatem fizyczne rozwiązanie postawionego problemu radialnie symetrycznej emisji falowej. Funkcja

$$u(t,r) = \frac{g(r-t)}{r}$$

spełnia równanie falowe na $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. My ograniczymy się w tej chwili do punktowych źródeł fal o ustalonej częstości. Takie fale nazywamy falami sinusoidalnymi lub radialnymi falami płaskimi. Rozwiązań będących falami sinusoidalnymi poszukujemy w postaci

$$w_k(t,r) = E_k(r)e^{-ikt}.$$

Liczba $k \in \mathbb{R}$ jest częstością fali[2]. Wstawiając funkcję w_k do równania falowego otrzymujemy

$$\left(\Delta + k^2\right) E_k = 0.$$

W obszarze $r > 0$ spełnia to równanie funkcja $E_k(r) = e^{ikr}/r$. Wynika to natychmiast z faktu, że funkcja

$$u(t,r) = \frac{e^{ik(r-t)}}{r}$$

[2]Zwykle częstość fali oznacza się grecką literą ω, jednak tu jest ona równa modułowi wektora falowego k ze względu na przyjętą konwencję $c = 1$.

jest rozwiązaniem równania falowego z czasem (wystarczy położyć $g(s) = e^{iks}$).

Udowodnimy stwierdzenie (które traktujemy tutaj jako dygresję) pokazujące, że funkcję $E_k(r)e^{-ikt}$ można interpretować jako sinusoidalną falę, której źródło znajduje się w punkcie $r = 0$.

Twierdzenie 1.1 *Funkcja*

$$E_k(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

jest elementem przestrzeni $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *i spełnia równanie*

$$\left(\Delta + k^2\right) E_k = -4\pi\delta_{\{0\}}$$

w sensie dystrybucyjnym, czyli

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_k \left(\Delta\phi + k^2\phi\right) dx = -4\pi\phi(0) \qquad \textit{dla } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Dowód. Niech $e_r = \vec{r}/r$. Dla $u = u(r)$ mamy $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r$. Stąd

$$\nabla E_k = \nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \left(ik\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2}\right) e_r.$$

Stąd dla $R > 0$ mamy

$$\int_{B(0,R)} |\nabla E_k(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_0^R 4\pi(kr + 1) \, \mathrm{d}r < \infty,$$

zatem $E_k \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Niech $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ i niech $\varepsilon > 0$. Całkując przez części otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_k \Delta\phi \, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla E_k \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}x = -\int_{B(0,\varepsilon)} \nabla E_k \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla E_k \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}x.$$

Jako, że $|\nabla E_k|$ jest funkcją lokalnie całkowalną, mamy

$$\int_{B(0,\varepsilon)} \nabla E_k \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \, .$$

Na zbiorze $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\varepsilon)$ funkcja E_k jest dobrze określona w każdym punkcie. Całkując przez części otrzymujemy

$$-\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla E_k \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,\varepsilon)} \Delta E_k \phi \, \mathrm{d}x - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla E_k \cdot (-e_r)\phi \, \mathrm{d}A,$$

gdzie A jest miarą powierzchniową na sferze. Zauważyliśmy już poprzednio, że

$$\Delta E_k = -k^2 E_k,$$

zatem

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_k \left(\Delta\phi + k^2\phi\right) \mathrm{d}x = \int_{B(0,\varepsilon)} k^2 E_k \phi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla E_k \cdot e_r \phi \, \mathrm{d}A - \int_{B(0,\varepsilon)} \nabla E_k \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}x.$$

Pierwsza i trzecia całka są zbieżne do zera. Ponadto

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \nabla E_k \cdot e_r \phi \, \mathrm{d}A &= \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \left(ik\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \phi \, \mathrm{d}A \\
&= \left(ik\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) 4\pi\varepsilon^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{B(0,\varepsilon)} \phi \, \mathrm{d}A \xrightarrow[n\to\infty]{} -4\pi\phi(0),
\end{aligned}$$

bo ϕ jest funkcją ciągłą. $\square$.

1.2 Paczki falowe

Ustaliliśmy, że funkcja $w_k(t, |x-y|)$ opisuje falę w punkcie $x \in \mathbb{R}^3$ w chwili $t \in \mathbb{R}$, której źródło znajduje się w punkcie $y \in \mathbb{R}^3$. Liczba k jest częstością fali. Jeśli źródła rozłożone są na pewnej zwartej rozmaitości dwuwymiarowej M z gęstością opisaną funkcją gładką $c : M \to \mathbb{C}$, to przez paczkę falową rozumiemy tutaj funkcję

$$\int_M c(y) w_{k(y)}(t, |x-y|) \, \mathrm{d}A = e^{-ikt} I_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash S,$$

gdzie

$$I_k(x) = \int_M \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} c(y) \, \mathrm{d}A.$$

A jest miarą powierzchniową na M. W naszych rozważaniach częstość k nie zależy od punktu $y \in M$. Zwróćmy uwagę na fakt, że powyższa całka jest dobrze określona. Faktycznie funkcja $y \mapsto |x-y|$ jest oddzielona od zera na M (bo S jest zwarta), zatem funkcja $y \mapsto W_k(t, |x-y|)$ jest ograniczona. Funkcja c jest również ograniczona, jako funkcja ciągła określona na zbiorze zwartym. Funkcja c jest w ogólności zespolona. Odpowiada to za przesunięcia fazowe między poszczególnymi elementarnymi źródłami. U nas wszystkie źródła będą zgodne w fazie, będziemy zatem zakładać, że $c(y) \in \mathbb{R}$ dla $y \in M$.

Przy obliczaniu wartości $I_k(x)$ możemy posłużyć się lokalnymi parametryzacjami rozmaitości M. Wykorzystując ewentualnie gładki rozkład jedności możemy zakładać, że supp c jest w obrazie pewnej parametryzacji. Po przejściu do ograniczonego otwartego zbioru parametrów $U \subset \mathbb{R}^2$ i rozpatrzeniu parametryzacji $p : U \to p(U)$ mamy

$$\int_{p(U)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} c(y) \, \mathrm{d}A = \int_U \frac{e^{ik|p(u)-x|}}{|x-p(u)|} c(p(u)) \sqrt{|(\det g_{ij})(u)|} \, \mathrm{d}u,$$

gdzie

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial p}{\partial u_i}, \frac{\partial p}{\partial u_j} \right)$$

są współczynnikami pierwszej formy podstawowej powierzchni S. Otrzymana całka ma zatem postać

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(u) e^{ik\phi(u)} \, \mathrm{d}u,$$

gdzie funkcja $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma zwarty nośnik. W naszym fizycznym zagadnieniu $n = 2$, całkujemy funkcję po ograniczonym zbiorze parametrów, zatem funkcja a faktycznie ma nośnik zwarty. Zgodnie z zapowiedzią, sprowadziliśmy problem optyki falowej do problemu obliczania całki interesującego nas typu.

2 Metoda fazy stacjonarnej

W niniejszym rozdziale znajdziemy asymptotyczne zachowanie funkcji

$$F(k) = \int_{\mathbb{R}^n} a(y) e^{ik\phi(y)} \, \mathrm{d}y.$$

Zaprezentowana technika nosi nazwę metody fazy stacjonarnej.

2.1 Przypadek d$\phi \neq 0$

Zajmiemy się teraz sytuacją, gdy $\mathrm{d}\phi$ nie znika na nośniku funkcji a. Pokażemy, że wówczas funkcja F zanika szybko, gdy $k \to \infty$. Konkretnie udowodnimy

Twierdzenie 2.1 *Niech $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przypuśćmy, że $\mathrm{d}\phi(y) \neq 0$ dla $y \in$ supp a. Wówczas*

$$F(k) = \int_{\mathbb{R}^n} a(y) e^{ik\phi(y)} \, dy = o(k^{-N}),$$

gdy $k \to +\infty$ dla wszystkich $N \in \mathbb{N}$.

Dowód. Udowodnimy twierdzenie indukcyjnie. Dla $N = 0$ teza wynika z ograniczoności funkcji podcałkowej, jako funkcji ciągłej określonej na zbiorze zwartym. Przypuśćmy, że $F(k) = O(k^{-N})$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$. Definiujemy pole wektorowe (liniowy operator różniczkowy)

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Wówczas

$$\xi e^{ik\phi} = ik \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i} \right)^2 \right) e^{ik\phi} = ik|\xi|^2 e^{ik\phi}.$$

Zauważmy, że zgodnie z naszym założeniem $|\xi| \neq 0$ dla $y \in \operatorname{supp} a$, zatem dobrze określone (i ograniczone na zbiorze zwartym $\operatorname{supp} a$) jest pole wektorowe

$$\eta = \frac{-i}{k|\xi|^2} \xi.$$

Co więcej

$$\eta e^{ik\phi} = \frac{-i}{k|\xi|^2} \xi e^{ik\phi} = \frac{-i}{k|\xi|^2} ik|\xi|^2 e^{ik\phi} = e^{ik\phi}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} a(y) e^{ik\phi(y)} \,\mathrm{d}y &= \int_{\operatorname{supp} a} a(y) \eta e^{ik\phi(y)} \,\mathrm{d}y = \int_{\operatorname{supp} a} a(y) \frac{-i}{k|\xi|^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} e^{ik\phi(y)} \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{i}{k} \int_{\operatorname{supp} \phi} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a(y) \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \frac{1}{|\xi|^2} \right) e^{ik\phi(y)} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} b(y) e^{ik\phi(y)} \,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

gdzie

$$b(y) = i \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a(y) \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \frac{1}{|\xi|^2} \right)$$

jest funkcją gładką o zwartym nośniku. Oczywiście

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(y) e^{ik\phi(y)} \,\mathrm{d}y = O(1),$$

zatem $F(k) = O(k^{-(N+1)})$. $\square$

2.2 Lemat Morse'a

Dążymy do rozważenia przypadku, gdy $\mathrm{d}\phi(y) = 0$ dla skończenie wielu punktów $y \in \operatorname{supp} a$. Będziemy badali funkcję ϕ w otoczeniu jej punktów krytycznych. Okaże się, że wkłady do całki pochodzące z takich otoczeń są dominujące. Będziemy chcieli wprowadzić układ współrzędnych, w którym funkcja ϕ zapisuje się w możliwie prosty sposób. Aby to było możliwe udowodnimy następujący, ważny

Lemat 2.1 *(Morse'a) Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie otoczeniem punktu 0 i niech $f : V \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką. Przypuśćmy, że $f(0) = 0$, $\mathrm{d}f(0) = 0$ i $Q = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(0)$ jest niezgedenetowaną formą kwadratową (tzn. Q ma macierz nieosobliwą). Wówczas istnieje U otoczenie punktu 0 i dyfeomorfizm $\phi : U \to V$, taki, że*

$$(f \circ \phi)(x) = Q(x, x).$$

Innymi słowy istnieje taki układ współrzędnych, w którym przekształcenie f przybiera postać niezdegenerowanej formy kwadratowej.

Dowód. Niech

$$f^t(x) = Q(x, x) + t\,(f(x) - Q(x, x)) \tag{1}$$

będzie homotopią od Q do f ($f^0 = Q$, $f^1 = f$). Oczywiście $\frac{\mathrm{d}f^t}{\mathrm{d}t} = f - Q$. Chcemy znaleźć rodzinę dyfeomorfizmów (ϕ^t) spełniających $\phi^0 = id$ i

$$f^t \circ \phi^t = f^0. \tag{2}$$

Wówczas $\phi = \phi^1$ będzie szukanym dyfeomorfizmem. Dla rodziny (ϕ^t) definiujemy pole wektorowe

$$\xi^t(\phi^t(x)) = \frac{\mathrm{d}\phi^t}{\mathrm{d}t}(x). \tag{3}$$

Różniczkując równanie (2) po zmiennej t otrzymamy (korzystając z reguły łańcuchowej)

$$\frac{\mathrm{d}f^t}{\mathrm{d}t}(\phi^t(x)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^t}{\partial y_i}(\phi^t(x))\frac{\partial \phi_i^t}{\partial t}(x) = \left(\left(\frac{\mathrm{d}f^t}{\mathrm{d}t} + \mathrm{d}f^t(\xi^t)\right) \circ \phi^t\right)(x) = 0.$$

Przypuśćmy, że znajdziemy rodzinę pól wektorowych (ξ^t), dla których

$$\frac{\mathrm{d}f^t}{\mathrm{d}t} + \mathrm{d}f^t(\xi^t) = 0.$$

Pamiętając o tym, że $\frac{\mathrm{d}f^t}{\mathrm{d}t} = f - Q = f^1 - f^0$ jest to równoważne znalezieniu pola wektorowego spełniającego

$$\mathrm{d}f^t(\xi^t) = f^0 - f^1. \tag{4}$$

Precyzyjniej

$$\mathrm{d}f^t_x(\xi^t(x)) = (f^0 - f^1)(x)$$

dla x z pewnego otoczenia 0. Określamy wtedy rodzinę dyfeomorfizmów (ϕ^t) jako rozwiązanie (3) z warunkiem początkowym $\phi^0(x) = x$. Wówczas funkcja $t \mapsto f^t \circ \phi^t$ jest stała i równa $f^0 \circ \phi^0 = f^0$.

Dla $x \in V$ dostatecznie bliskich 0 i dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\mathrm{d}f^t_x(v) = \mathrm{d}f^t_x(v) - \mathrm{d}f^t_0(v) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}f^t_{sx}(v)\,\mathrm{d}s,$$

gdzie $\mathrm{d}f^t_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest różniczką f w punkcie x. Skorzystaliśmy z faktu, że $\mathrm{d}f^t_0 = \mathrm{d}Q_0 = 0$. Skoro

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}f^t_{sx}(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(sx)v_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(sx)x_j v_i = \mathrm{d}^2 f^t_{sx}(x, v),$$

więc

$$\mathrm{d}f^t_x(v) = \int_0^1 \mathrm{d}^2 f^t_{sx}(x, v)\,\mathrm{d}s = B^t_x(x, v),$$

gdzie

$$B^t_x(u, v) = \int_0^1 \mathrm{d}^2 f^t_{sx}(u, v)\,\mathrm{d}s \quad (u, v \in \mathbb{R}^n).$$

Oczywiście B^t_x jest pewną formą kwadratową. Z (1) natychmiast otrzymujemy

$$B^t_x = B^0_x + t(B^1_x - B^0_x).$$

Ponadto $B^0_x = 2Q$, zatem B^0_x nie zależy od punktu x. W szczególności dla każdego $t \in [0, 1]$ macierz B^t_0 jest nieosobliwa, gdyż nieosobliwa jest macierz formy Q. Istnieje zatem pewne otoczenie 0, w którym B^t_x jest nieosobliwa dla wszystkich $t \in [0, 1]$. Faktycznie, gdyby istniał ciąg $x_n \to 0$ i ciąg $(t_n) \subset [0, 1]$ o tej własności, że $\det B^{t_n}_{x_n} = 0$, to wybierając podciąg zbieżny $t_{n_k} \to t$ otrzymamy $\det B^{t_{n_k}}_{x_{n_k}} \to 0 = B^t_0$, co jest niemożliwe. Korzystamy tu z ciągłej zależności wyznacznika od macierzy i gładkości funkcji Q, f.

Z założeń lematu mamy $(f^0 - f^1)(0) = 0$ i $(\mathrm{d}f^0 - \mathrm{d}f^1)(0) = 0$, zatem kładąc $g = f^0 - f^1$ i rozumując jak wyżej otrzymujemy

$$\begin{aligned}(f^0 - f^1)(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g(sx)\ \mathrm{d}s = \int_0^1 \mathrm{d}g_{sx}(x)\ \mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}g_{rsx}(x)\ \mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}^2 g_{rsx}(sx, x)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Wprowadzamy kolejne oznaczenie

$$C_x(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 \mathrm{d}^2 g_{rsx}(su, v)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}s \quad (u, v \in \mathbb{R}^n).$$

Równanie (4) możemy zatem zapisać jako

$$B_x^t(x, \xi^t(x)) = C_x(x, x).$$

Znajdziemy rozwiązanie szerszego problemu

$$B_x^t(u, \xi^t(x)) = C_x(u, x) \qquad (u \in \mathbb{R}^n).$$

Problem ten jest równoważny (przy utożsamieniu form z ich macierzami)

$$B_x^t \cdot \xi^t(x) = C_x \cdot x.$$

Istnienie rozwiązania $\xi^t(x)$ wynika z udowodnionego faktu, że macierze B_x^t są nieosobliwe. Oczywiście pola ξ^t są gładkie, bo formy C, B zależą w sposób gładki od punktu x. Ograniczając ewentualnie tak znalezione pole wektorowe ξ^t do mniejszego otoczenia 0 otrzymujemy istnienie rozwiązania (3). $\square$

2.3 Przypadek z niezdegenerowanymi punktami krytycznymi.

Przypuśćmy, że p jest niezdegenerowanym punktem krytycznym ϕ. Oznacza to, że $\mathrm{d}^2\phi_p = (\frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i \partial y_j})$ jest macierzą nieosobliwą. Na mocy lematu Morse'a istnieje dyfeomorfizm (układ współrzędnych) $\psi : U \to \mathbb{R}^n$, gdzie U jest otoczeniem p, spełniający

$$\phi(z) = \phi(p) + [-z_1^2 - \ldots - z_l^2 + z_{l+1}^2 + \ldots + z_n^2]/2 = \phi(p) + Q(z)/2,$$

gdzie $Q = \mathrm{d}^2\phi_p$. Liczbę l nazywamy sygnaturą formy Q. Załóżmy, supp $a \subset \psi(U)$. Jeśli $y = \psi(z)$, to $\frac{\partial y}{\partial z}$ jest macierzą Jacobiego ψ, to

$$\int_{\text{supp } a} a(y) e^{ik\phi(y)}\ \mathrm{d}y = e^{ik\phi(p)} \int_{\psi^{-1}(\text{supp } a)} a(\psi(z)) e^{ikQ(z)/2} |\det \frac{\partial y}{\partial z}(z)|\ \mathrm{d}z.$$

Niech $\tilde{Q}$ będzie macierzą formy Q. Macierz $\tilde{Q}$ jest diagonalna i ma wartości własne ± 1. Pokażemy, że

$$\tilde{Q} = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i \partial y_j}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right).$$

Mamy

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{ij} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2 \phi(\psi(z))}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y_l}(\psi(z))\frac{\partial \psi_l}{\partial z_j}(z)\right) \\
&= \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_l \partial y_k}(\psi(z))\frac{\partial \psi_l}{\partial z_j}\frac{\partial \psi_k}{\partial z_i}(z) + \frac{\partial \phi}{\partial y_l}(\psi(z))\frac{\partial^2 \psi_l}{\partial z_i \partial z_j}(z) \\
&= \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_l \partial y_k}(\psi(z))\frac{\partial \psi_l}{\partial z_j}\frac{\partial \psi_k}{\partial z_i}(z) = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i \partial y_j}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$1 = |\det \tilde{Q}| = |\det \frac{\partial y}{\partial z}(z)|^2 |\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i \partial y_j}(y)|,$$

zatem

$$|\det \frac{\partial y}{\partial z}(z)| = |\det \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i \partial y_j}(y)|^{-\frac{1}{2}}.$$

Otrzymaną równość wykorzystamy później. Mamy

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(y) e^{ik\phi(y)}\, \mathrm{d}y = \int_U f(z) e^{ikQ(z)/2}\, \mathrm{d}z,$$

gdzie

$$f(z) = e^{ik\phi(p)} a(\psi(z)) |\det \frac{\partial y}{\partial z}(z)|.$$

Udowodnimy twierdzenie dotyczące asymptotycznego zachowania tego typu całek. Za pomocą tego twierdzenia sformułujemy wynik dotyczący wyjściowego zagadnienia dla funkcji a i ϕ.

Twierdzenie 2.2 *Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką o zwartym nośniku. Niech*

$$Q(z) = -z_1^2 - \ldots - z_l^2 + z_{l+1}^2 + \ldots + z_n^2.$$

Wówczas

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{ikQ(z)/2}\, dz = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2} e^{i\pi(n-2l)/4} f(0) + O(k^{-\frac{n}{2}-1}),$$

gdy $k \to +\infty$.

Dowód. Udowodnimy następujący

Lemat 2.2 *Niech f będzie rzeczywistą funkcją gładką określoną na wypukłym podzbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$ zawierającym punkt 0. Wtedy istnieją takie funkcje rzeczywiste gładkie g_i $(i = 1, \ldots, n)$ określone na U takie, że $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial z_i}(0)$ oraz*

$$f(z) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} z_i g_i(z).$$

Dowód lematu (2.2). Mamy

$$f(z) = f(0) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(tz)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(tz) z_i\,\mathrm{d}t,$$

wystarczy zatem położyć

$$g_i(z) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z_i}(tz)\,\mathrm{d}t.$$

Gładkość funkcji g_i wynika z twierdzenia o różniczkowaniu całki z parametrem. $\square$

Korzystając z powyższego lematu i możliwości rozszerzenia funkcji f przez wartość 0 na pewien gwiaździsty podzbiór $\mathbb{R}^n$ zawierający punkt 0 przedstawiamy funkcję f w postaci

$$f(z) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} z_i f_i(z),$$

gdzie f_i $(i = 1, \ldots, n)$ są pewnymi funkcjami gładkimi. Problem polega na tym, że funkcje f_i nie muszą mieć zwartych nośników. Pokażemy jednak, że dla $i = 1, \ldots, n$ dobrze określone są całki

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2} z_j f_j(z)\,\mathrm{d}z$$

i

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2} \frac{\partial f_j}{\partial z_j}\,\mathrm{d}z.$$

Problem zdefiniowania całki wielowymiarowej sprowadzamy do problemu zdefiniowania całek iterowanych. Wystarczy zatem zdefiniować całkę jednowymiarową. Konkretnie udowodnimy następujący

Lemat 2.3 *Przypuśćmy, że* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją klasy* $C^2(\mathbb{R})$ *spełniającą*

$$|h(t)| \leq M, \qquad |h'(t)| \leq M$$

dla pewnej stałej $M > 0$. *Wówczas funkcja*

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2/2} h(t)\, dt$$

jest dobrze określona dla $Re\lambda \geq 0, \lambda \neq 0$. *Co więcej* H *jest ciągła na* $\{Re\lambda \geq 0\} \backslash \{0\}$ *i holomorficzna na* $\{Re\lambda > 0\}$.

Dowód lematu (2.3). Ustalmy $C > \varepsilon > 0$ i załóżmy, że $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$ i $C > |\lambda| > \varepsilon$. Wystarczy zdefiniować całkę w takim przypadku, ε, C są bowiem dowolne. Dla ustalena uwagi weźmy $0 < R < S$. Mamy wówczas

$$\begin{aligned}
\int_R^S e^{-\lambda t^2/2} h(t)\, \mathrm{d}t &= -\frac{1}{\lambda} \int_R^S \frac{1}{t} (e^{-\lambda t^2/2})' h(t)\, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t^2/2} \frac{h(t)}{t} \Big|_R^S + \frac{1}{\lambda} \int_R^S e^{-\lambda t^2/2} \left(\frac{h(t)}{t} \right)' \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t^2/2} \frac{h(t)}{t} \Big|_R^S - \frac{1}{\lambda^2} \int_R^S \frac{1}{t} (e^{-\lambda t^2/2})' \left(\frac{h(t)}{t} \right)' \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t^2/2} \left[\lambda \frac{h(t)}{t} + \frac{1}{t} \left(\frac{h(t)}{t} \right)' \right] \Big|_R^S + \frac{1}{\lambda^2} \int_R^S e^{-\lambda t^2/2} \left[\frac{1}{t} \left(\frac{h(t)}{t} \right)' \right]' \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Dalej

$$\left| \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t^2/2} \left[\lambda \frac{h(t)}{t} \Big|_R^S + \frac{1}{t} \left(\frac{h(t)}{t} \right)' \right] \Big|_R^S \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \left(C \frac{2}{R} + \frac{2}{R^2} + \frac{2}{R^3} \right) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

jednostajnie ze względu na $C > |\lambda| > \varepsilon$. Ponadto

$$\left| \left(\frac{h(t)}{t} \right)' \right| = \left| \frac{h'(t)}{t} - \frac{h(t)}{t^2} \right| \leq M \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right),$$

$$\left| \left(\frac{h(t)}{t} \right)'' \right| = \left| \frac{h''(t)}{t} - 2 \frac{h'(t)}{t^2} + 2 \frac{h(t)}{t^3} \right| \leq M \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^3} \right),$$

a zatem

$$\left| \frac{1}{\lambda^2} \int_R^S e^{-\lambda t^2/2} \left[\frac{1}{t} \left(\frac{h(t)}{t} \right)' \right]' \mathrm{d}t \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \int_R^\infty \frac{1}{t^2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) + \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^3} \right) \mathrm{d}t$$

i jeśli tylko $R > 1$, to mamy oszacowanie ostatniego wyrażenia przez

$$\frac{M}{\varepsilon^2}\int_R^\infty \frac{7}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{7M}{\varepsilon^2}\frac{1}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Reszty całkowe zbiegają zatem do 0 przy ustalonym λ. Wynika stąd, że funkcja $H(\lambda)$ jest dobrze określona. Pokazaliśmy również, że zbieżność jest jednostajna ze względu na λ z odpowiedniego zbioru otwartego. Stąd wynika ciągłość funkcji H.

Pokażemy teraz holomorficzność funkcji H dla Re$\lambda > 0$. Możemy założyć, że Re$\lambda > \varepsilon > 0$ (istnienie pochodnej zespolonej jest własnością lokalną). Niech $s \in \mathbb{C}$ będzie tak małe, aby Re$(\lambda + s) > 0, s \neq 0$. Wówczas

$$\frac{H(\lambda+s)-H(\lambda)}{s} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon t^2/2}\left(e^{[-(\lambda+s)+\varepsilon]t^2/2} - e^{[-\lambda+\varepsilon]t^2/2}\right)\frac{1}{s}h(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Niech D oznacza odninek łączący λ z $\lambda+s$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|s|}\left|\left(e^{[-(\lambda+s)+\varepsilon]t^2/2} - e^{[-\lambda+\varepsilon]t^2/2}\right)\right| &= \frac{1}{|s|}\left|\int_\lambda^{\lambda+s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^{(-z+\varepsilon)t^2/2}\,\mathrm{d}z\right| \\
&= \frac{1}{|s|}\left|\int_\lambda^{\lambda+s}\frac{t^2}{2}e^{(-z+\varepsilon)t^2/2}\,\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \frac{t^2}{2|s|}\int_D \left|e^{(-z+\varepsilon)t^2/2}\right|\mathrm{d}z \\
&\leq \frac{t^2}{2|s|}\int_D 1\,\mathrm{d}z = \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że funkcja

$$e^{-\varepsilon t^2/2}\frac{t^2}{2}|h(t)| \leq Me^{-\varepsilon t^2/2}\frac{t^2}{2}$$

jest majorantą dla funkcji podcałkowej we wzorze (5). $\square$

Dzięki powyższemu lematowi ma sens następująca równość

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{ikQ(z)/2}\,\mathrm{d}z = f(0)\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2}\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2}z_j f_j\,\mathrm{d}z.$$

Zauważmy, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2}z_j f_j\,\mathrm{d}z = \pm\frac{1}{ik}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial z_j}(e^{ikQ(z)/2})f_j\,\mathrm{d}z = \mp\frac{1}{ik}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2}\frac{\partial f_j}{\partial z_j}\,\mathrm{d}z.$$

Ostatnia całka jest takiej samej postaci, od jakiej zaczynaliśmy. Oczywiście asymptotyki pochodząca od członu stałego $f(0)$ nie zależy od funkcji f. Powtarzając zastosowaną przed chwilą procedurę otrzymamy przedstawienie funkcji

$$k \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{ikQ(z)/2}\, \mathrm{d}z$$

w postaci sumy wkładów od wyrazów stałych $f^{i_1,\dots,i_m}(0)$ i reszty całkowej. Konkretnie mamy operatory

$$f \xrightarrow{\phi_i} f_i \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_i}} \frac{\partial f_i}{\partial z_i}$$

i

$$\Psi_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \circ \phi_i.$$

Wtedy

$$f^{i_1,\dots,i_m} = \Psi_{i_1} \circ \ldots \circ \Psi_{i_m} \quad (f)$$

i reszta całkowa jest postaci

$$\frac{1}{k^m} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2} f^{i_1,\dots,i_m}\, \mathrm{d}z.$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2}\, \mathrm{d}z = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2} e^{i\pi(n-2l)/4},$$

to będzie jasne, że wkłady od kolejnych wyrazów stałych są rzędu najwyżej $O(k^{-\frac{n}{2}-1})$, gdyż każdy taki wkład jest postaci

$$\pm\frac{1}{k^p} f^{i_1,\dots,i_m}(0) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2}\, \mathrm{d}z = C\frac{1}{k^p} f^{i_1,\dots,i_m}(0) \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2}$$

dla pewnej stałej C i $p > 0$. Trzeba jeszcze wiedzieć, że reszty całkowe są rzędu $O(k^{-\frac{n}{2}-1})$ przynajmniej dla dużych m. Jak to pokazać.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2}\, \mathrm{d}z &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik[-z_1^2-\ldots-z_l^2+z_{l+1}^2+\ldots+z_n^2]/2}\, \mathrm{d}z \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt^2/2}\, \mathrm{d}t\right)^l \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt^2/2}\, \mathrm{d}t\right)^{n-l}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $\lambda > 0$ rzeczywistego mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2/2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Pamiętamy jednak, że lewa strona jest analityczną funkcją zmiennej λ dla Re$\lambda > 0$ (Lemat (2.3)). Wynka stąd, że wzór (6) jest słuszny również na zespolonych λ spełniających Re$\lambda > 0$. Oczywiście we wzorze (6) bierzemy gałąź pierwiastka odpowiadającą $\sqrt{1} = 1$. Funkcja występująca po prawej stronie równości (6) jest ciągła dla Re$\lambda \geq 0$ (ponownie Lemat (2.3), $h \equiv 1$). Biorąc $\lambda \to \pm ik$ otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikt^2/2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{1/2} e^{\pm\pi i/4}.$$

Zatem faktycznie

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ikQ(z)/2}\,\mathrm{d}z = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2} e^{i\pi(n-2l)/4},$$

a co za tym idzie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{ikQ(z)/2}\,\mathrm{d}z = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2} e^{i\pi(n-2l)/4} f(p) + O(k^{-\frac{n}{2}-1}).$$

Dowód Twierdzenia (2.2) został zakończony. $\square$

Przypomnijmy, że na początku rozdziału otrzymaliśmy

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(y)e^{ik\phi(y)}\,\mathrm{d}y = \int_U f(z)e^{ikQ(z)/2}\,\mathrm{d}z,$$

gdzie

$$f(z) = e^{ik\phi(y)}a(\psi(z))|\det\frac{\partial y}{\partial z}(z)|$$

jest funkcją o nośniku zwartym. Zakładaliśmy, że supp $a \subset \psi(U)$. Załóżmy, że a ma skończenie wiele punktów krytycznych. Wówczas wykorzystując gładki podział jedynki możemy sprowadzić badanie asymptotyki do badania wkładu od małego otoczenia pojedynczego punktu krytycznego. Twierdzenie (2.1) pokazuje, że istotny wkład pochodzi jedynie od takich właśnie otoczeń. Wybieramy otoczenia tak małe, aby na nich można było wprodzadzić współrzędne z korzystając z lematu Morse'a. Jeśli $y = \psi(z)$ jest punktem krytycznym, to wkład od otoczenia tego punktu jest równy

$$\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2} e^{i\pi(n-2l)/4} f(z) + O(k^{-\frac{n}{2}-1}).$$

Pamiętajmy, że $n-2l$ jest liczbą plusów pomniejszoną o liczbę minusów na diagonali formy Q, czyli (zgodnie z definicją) sygnaturą Hesjanu $H(y)$ funkcji ϕ w punkcie y. Ponadto

$$f(z) = e^{ik\phi(y)}a(y)|\det\frac{\partial y}{\partial z}(z)| = e^{ik\phi(y)}a(y)\Big|\det\frac{\partial^2\phi}{\partial y_i\partial y_j}(y)\Big|^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{ik\phi(y)}a(y)}{\sqrt{\det H(y)}}.$$

Udowodniliśmy zatem

Twierdzenie 2.3 *Niech $a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ będzie funkcją gładką o nośniku zwartym. Niech $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ będzie funkcją gładką o nośniku zwartym posiadającą skończenie wiele punktów krytycznych. Załóżmy również, że punkty krytyczne ϕ są niezdegenerowane. Wówczas*

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(y)e^{ik\phi(y)}\,dy = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2}\sum_{y:\,\mathrm{d}\phi(y)=0} e^{i\pi\ sgnH(y)\ /4}\frac{e^{ik\phi(y)}a(y)}{\sqrt{\det H(y)}} + O(k^{-\frac{n}{2}-1}).$$

□

Literatura

[GA] V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric asymptotics*, AMS, 1977.