Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 1, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Niech $f, g : (0,1) \to \mathbb{R}$ będą jednostajne ciągłe. Czy fg też jest jednostajnie ciągła? Co się stanie, jeśli zbiór $(0,1)$ zastąpimy zbiorem $(0,\infty)$?

Zadanie 2. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy podaddytywną, jeśli dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$. Czy funkcja podaddytywna musi być wypukła? Czy musi być wklęsła? Czy musi być ciągła? Czy funkcja wklęsła musi być podaddytywna? Czy funkcja podaddytywna ciągła w 0 musi być jednostajnie ciągła?

Zadanie 3. Czy funkcja wklęsła $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ spełniająca warunek $f(0) = 0$ musi być podaddytywna?

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Udowodnij, że zbiór punktów nieciągłości funkcji f jest zbiorem typu $\mathcal{F}_\sigma$. Niech A będzie dowolnym zbiorem typu $\mathcal{F}_\sigma$. Udowodnij, że istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której zbiór punktów nieciągłości jest równy A.

Zadanie 5. Niech $(U_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem otwartych i gęstych podzbiorów $\mathbb{R}$. Udowodnij, że zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ jest gęsty w $\mathbb{R}$.

Zadanie 6. Niech $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że dla każdego $a > 0$ mamy $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a}{n}\right) = 0$. Czy z tego wynika, że $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$?

Zadanie 7. Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną rodziną funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$. Przypuśćmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje stała M_x taka, że $|f(x)| \leq M_x$ dla wszystkich $f \in \mathcal{F}$. Udowodnij, że istnieje przedział $I \subset \mathbb{R}$ i stała M taka, że $|f(x)| \leq M$ dla wszystkich $x \in I$.

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 2, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją ciągłą różniczkowalną na $(0,1)$. Przypuśćmy, że $|f'(x)| \neq 1$ dla wszystkich $x \in [0,1]$. Udowodnij, istnieją jednoznacznie wyznaczone punkty $a, b \in [0,1]$ takie, że $f(a) = a$ i $f(b) = 1 - b$.

Zadanie 2. Niech $p \geq 1$. Udowodnij, że dla $x, y > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$|y^p - x^p| \leq p \max\{x, y\}^{p-1} |x - y|.$$

Zadanie 3. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą różniczkowalną na $(0,1)$. Przypuśćmy, że $f(0) = f(1) = 0$ oraz istnieje punkt $a \in (0,1)$ taki, że $f(a) = \sqrt{3}$. Udowodnij, że istnieją proste l_1, l_2, styczne do wykresu funkcji f, które wraz z osią OX tworzą trójkąt równoboczny.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla $x \geq 0$ prawdziwa jest nierówność $e^x \geq x^e$.

Zadanie 5. Niech $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi, różniczkowalnymi na $(0,1)$. Załóżmy, że $f(0) = f(1) = 0$. Udowodnij, że równanie

$$g'(x)f(x) + f'(x) = 0$$

ma rozwiązanie w przedziale $(0,1)$.

Zadanie 6. Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin(1/x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

jest funkcja różniczkowalna na $\mathbb{R}$? Czy spełnia ona warunek Lipschitza na $[-1,1]$?

Zadanie 7. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na $(0,1)$. Załóżmy, że $|f'(x)| \leq \lambda |f(x)|$ dla pewnej stałej $\lambda > 0$ i wszystkich $x \in [0,1]$. Przypuśćmy, że $f(0) = 0$. Czy z tego wynika, że $f \equiv 0$?

Zadanie 8. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Przypuśćmy, że dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieje granica

$$\lim_{\mathbb{Q} \ni h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Czy f jest różniczkowalna w punkcie x_0?

Zadanie 9. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $f'(0) = 1$. Czy musi istnieć $\varepsilon > 0$ taki, że f jest rosnąca na predziale $(-\varepsilon, \varepsilon)$?

Zadanie 10. Przypuśćmy, że $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą różniczkowalną na (a,b) i niech $b - a \geq \pi$. Udowodnij, że istnieje x_0 takie, że $f'(x_0) < 1 + f^2(x_0)$.

Zadanie 11. Niech $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi, różniczkowalnymi na (a,b). Niech

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}$$

Udowodnij, że istnieje $x_0 \in (a,b)$ takie, że $F'(x_0) = 0$. Wywnioskuj stąd twierdzenia Lagrange'a i Cauchy'ego o wartości średniej.

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 3, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Niech $a < b < c$. Udowodnij, że istnieją $x_1 < x_2$ takie, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1), \qquad \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(x_2).$$

Zadanie 2. Niech $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Udowodnij, że $(-1)^n f^{(n)}(x) < 0$ dla $n \geq 1$ oraz wszystkich $x > 1$.

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0).$$

Zadanie 4. Udowodnij, że dla $n \geq 1$ prawdziwe są równości

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^l = \begin{cases} 0 & l = 0, 1, \ldots, n-1 \\ n! & l = n \end{cases}.$$

Zadanie 5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$2013 e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2012}}{2012!}.$$

Zadanie 6. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie fukcją dwukrotnie różniczkowalną. Dla $i = 0, 1, 2$ określamy $M_i = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$, przy czym $f^0 = f$. Udowodnij nierówność $M_1^2 \leq 2 M_0 M_2$.

Zadanie 7. Wyznacz granicę $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

Zadanie 8. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną i niech $a < b$. Załóżmy, że $f'(a) = f'(b) = 0$. Udowodnij, że istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$|f''(c)| \geq 4 \cdot \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)^2}.$$

Zadanie 9. Udowodnij nierówności

$$\ln(1 + x) \leq \frac{x}{\sqrt{1 + x}}, \quad x \geq 0, \qquad \sin x \geq \frac{2}{\pi} x + \frac{x}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2), \quad x \in [0, \pi/2].$$

Zadanie 10. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Załóżmy, że $|f''(x)| \leq 1$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, to również $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.

Zadanie 11. Udowodnij nierówność $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\operatorname{tg} x}{x} > 2$ dla $x \in (0, \pi/2)$.

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 4, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Udowodnij równość

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad |x| < 1.$$

Zadanie 2. Niech $p \geq 0$. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^p e^{-x}$.

Zadanie 3. Niech $p \in (0,1)$. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^p(1-x)^{1-p}$.

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność jednostajną ciągu $(f_n)_{n\geq 0}$, gdzie $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$. Zbadaj również zbieżność jednostajną ciągu $(g_n)_{n\geq 0}$, gdzie $g_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0,1]$.

Zadanie 5. Niech $n \geq 1$. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Czy ciąg $(f_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$. Czy jest on zbieżny jednostajnie na $[-1,1]$?

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność jednostajną na $\mathbb{R}$ ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n\geq 1}$, gdzie $f_n(x) = \sqrt[2n]{1+x^{2n}}$.

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność jednostajną na $\mathbb{R}$ ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n\geq 1}$, gdzie $f_n(x) = \sqrt{n}\sin^n x \cos x$.

Zadanie 8. Niech $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą wielomianami dla $n \geq 1$. Przypuśćmy, że ciąg $(P_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny jednostajnie do fukcji $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że P jest wielomianem.

Zadanie 9. Rozważmy ciąg wielomianów $(P_n)_{n\geq 1}$ ustalonego stopnia $k \geq 0$. Niech

$$P_n(x) = a_{n,k}x^k + a_{n,k-1}x^{k-1} + \ldots + a_{n,1}x + a_{n,0}.$$

Udowodnij, że następujące warunki są równoważne,

(a) ciąg $(P_n)_{n\geq 1}$ jest jednostajnie zbieżny na każdym zbiorze zwartym $K \subset \mathbb{R}$,

(b) istnieją liczby rzeczywiste $x_0, x_1, \ldots, x_k$ takie, że ciągi $(P_n(x_l))_{n\geq 1}$ są zbieżne dla $l = 0, 1, \ldots, k$,

(c) ciągi $(a_{n,l})_{n\geq 1}$ są zbieżne dla $l = 0, 1, \ldots, k$.

Zadanie 10. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Definiujemy ciąg wielomianów $(P_n^f)_{n\geq 1}$ wzorami

$$P_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Udowodnij, że ciąg $(P_n^f)_{n\geq 1}$ jest jednostajnie zbieżny do f.

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 4, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Udowodnij nierówność $e^x \leq x + e^{x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Niech $p, q \geq 0$, $p + q = 1$. Udowodnij nierówność

$$pe^{qx} + qe^{-px} \leq e^{\frac{1}{8}x^2}.$$

Zadanie 3. Niech S_n będzie liczbą sukcesów w schemacie Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Udowodnij nierówność

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}.$$

Zadanie 4. Niech $\varepsilon \in (0, \pi)$. Zbadaj zbieżność jednostajną na $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ oraz na $[0, 2\pi]$ szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Zadanie 5. Niech $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $p, q \geq 1$ spełniają $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Udowodnij nierówność

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$$

oraz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

Zadanie 6. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2x^2}.$$

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 6, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ klasy C^∞ takiej, że $f(0) = 0$ oraz dla wszystkich $\alpha \in (0, 1)$ mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{f(x)^\alpha} = 0.$$

Zadanie 2. Udowodnij równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln 2.$$

Zadanie 3. Niech $f_n : A \to \mathbb{R}$ dla $n \geq 1$. Załóżmy, że ciąg $(f_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f i dla $n \geq n_0$ istnieją granice $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} f(x),$$

przy założeniu, że jedna z granic w powyższym wzorze istnieje.

Zadanie 4. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ musi być zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$? Udowodnij, że

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Zadanie 5. Niech $f_n : A \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze A. Niech $x_0 \in A$ będzie punktem skupienia zbioru A. Udowodnij równość

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0).$$

Zadanie 6. Niech $f_n \in C([0, 1])$. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na $[0, 1)$. Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1)$ musi być zbieżny?

Zadanie 7. Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ zadaje funkcję klasy $C^\infty(\mathbb{R})$.

Zadanie 8. Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ jest zbieżny. Czy funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

jest gładka na zbiorze $\mathbb{R}\backslash\{a_1, a_2, \ldots\}$?

Zadanie 9. Wyznacz punkty różniczkowalności funkcji $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x|^p}}{n^2}$ dla $p = 1, 2$.

Zadanie 10. Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ jest sumowalny metodą Abela? Czy szereg ten jest sumowalny metodą Cesaro?

Zadanie 11. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$ jest sumowalny metodą Abela? Czy szereg ten jest sumowalny metodą Cesaro?

Zadanie 12. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem zbieżnym i niech $A_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$. Udowodnij, że

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 7, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Oblicz całki nieoznaczone,

(a) $\int \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$
(d) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$ (e) $\int x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x$
(g) $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{1}{(a+x)(b+x)}\,\mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 2. Oblicz całkę $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 3. Wyznacz wzór rekurencyjny na $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 4. Udowodnij wzory

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x + C$
(c) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh} x + C$ (d) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$.

Zadanie 5. Wyznacz wzór rekurencyjny na $I_n = \int \sin^n x\,\mathrm{d}x$. Udowodnij wzór

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!}$$

Zadanie 6. Wyznacz całki

(a) $\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$, (b) $\int \frac{\sin^2 x+\cos^3 x}{\sin^2 x+\cos x}\,\mathrm{d}x$, (c) $\int \frac{x+2\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^{3/2}+x}\,\mathrm{d}x$, (d) $\int \cosh^4 x\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 7. Niech $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnij równość

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 8. Niech $n, m \geq 0$ będą liczbami naturalnymi. Udowodnij równość

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

Zadanie 9. Niech $f : [0,1] \to (0,\infty)$ będzie funkcją ciągłą. Oblicz

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 10. Przypuśćmy, że funkcja ciągła $f : [0,1] \to [0,\infty)$ spełnia $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. udowodnij, że $f \equiv 0$. Czy to samo jest prawdą bez założenia ciągłości funkcji f?

Zadanie 11. Niech $f : [-1,1 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą parzystą. Udowodnij równość

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 8, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Niech $I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x \, \mathrm{d}x$. Udowodnij równość $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ dla $n \geq 2$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ oraz

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją T-okresową. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 3. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = 0.$$

Udowodnij również, że jeśli f jest funkcją lipschitzowską, to istnieje stała $C > 0$ zależna tylko of f, a oraz b taka, że

$$\left| \int_a^b f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \right| \leq \frac{C}{n}.$$

Zadanie 4. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą przyjmującą wartości w zbiorze $[m, M]$ i niech $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Udowodnij nierówność

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) \, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 5. Niech $n \geq 1$. Udowodnij nierówności

$$\frac{n^2\pi}{4} \leq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} \leq \frac{n^2\pi}{4} + n.$$

Zadanie 6. Oblicz granice ciągów

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}.$$

Zadanie 7. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$. Załóżmy, że dla każdego $x > 0$ mamy $\int_{-x}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t = 0$. Czy z tego wynika, że f jest funkcją nieparzystą?

Zadanie 8. Niech $f : [0, 1] \to (0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą. Dla $p \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ Definiujemy $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}$. Udowodnij, że dla $-\infty < p < q < \infty$ prawdziwa jest nierówność $\|f\|_p \leq \|f\|_q$. Oblicz granice

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p, \qquad \lim_{p\to-\infty} \|f\|_p, \qquad \lim_{p\to 0} \|f\|_p.$$

Zadanie 9. Dla $n \geq 1$ udowodnij równości

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n \, \mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^n} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

Wywnioskuj stąd równość $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Zadanie 10. Niech $a < b$ i niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi (ogólniej – całkowalnymi w sensie Riemanna). Niech $p, q \geq 1$ spełniają $1/p + 1/q = 1$. Udowodnij, że

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 9, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Oblicz $\int_0^1 x^n \ln^n x \, \mathrm{d}x$. Udowodnij równość

$$\int_0^1 x^{-x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

Zadanie 2. Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna. Udowodnij nierówność

$$\left(\int_a^b f(x) \sin x \, \mathrm{d}x \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \cos x \, \mathrm{d}x \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 3. Niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ i niech $0 < p < q < r$. Udowodnij nierówność

$$\|f\|_q^{q(r-p)} \leq \|f\|_p^{p(r-q)} \|f\|_r^{r(q-p)}.$$

Zadanie 4. Niech $f : [0, 1] \to [m, M]$. Załóżmy, że $\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 0$. Udowodnij nierówność

$$\int_0^1 f^2(x) \, \mathrm{d}x \leq -mM.$$

Zadanie 5. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 spełniającą warunek $f(a) = f(b) = 0$. Udowodnij nierówność

$$\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 6. Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 7. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Udowodnij nierówności

$$f\left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 10, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Wyjaśnij, na czym polega problem z rachunkiem

$$0 = \int_{-1}^{1} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x} \right) \right)' \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{x^2+(1-x^2)^2} \, \mathrm{d}x > 0.$$

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie wartości parametrów a, b, c, d, dla których zbieżne są całki

(a) $\int_0^1 \frac{(\sin x)^a (\ln(1+x))^b}{x^c (\operatorname{tg} x)^d} \, \mathrm{d}x$, (b) $\int_0^{1/2} \frac{(1-\cos x)^a}{(x-\sin x)^b (\ln x)^c} \, \mathrm{d}x$, (c) $\int_{1/2}^1 \frac{(\sin(\pi x))^b}{(\ln x)^a} \, \mathrm{d}x$.

Zadanie 3. Niech $p, q \in \mathbb{R}$. Zbadaj zbieżność całek

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \, \mathrm{d}x$, (b) $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \, \mathrm{d}x$, (c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p (\ln x)^q} \, \mathrm{d}x$.

Zadanie 4. Niech $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że $|f(x)| \leq 1$. Zbadaj zbieżność całki

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + f(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 5. Niech $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą wielomianami, przy czym $Q(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $\deg Q \geq \deg P + 2$. Załóżmy, że Q posiada jedynie pierwiastki jednokrotne $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Udowodnij, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \, \mathrm{d}x = \pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}(\Im z_k) \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}.$$

Zadanie 6. Niech $n > m$ będą liczbami naturalnymi. Udowodnij równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

Zadanie 7. Niech $a, b > 0$. Definiujemy funkcje B oraz Γ wzorami

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \, \mathrm{d}x, \qquad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} \, \mathrm{d}x.$$

Udowodnij, że dla $0 < a < 1$ mamy

$$B(a, 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Udowodnij również równości

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a, b > 0, \qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad 0 < a < 1.$$

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 10, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o okresie 2π. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że istnieją stałe $L, \delta > 0$ takie, że $|f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq L|t|$ dla $|t| \leq \delta$. Udowodnij, że szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny do f w punkcie x_0.

Zadanie 2. Funkcję $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ określoną na $[0, 2\pi)$ przedłużamy okresowo na $\mathbb{R}$. Wyznacz szereg Fouriera funkcji f. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$szereg ten jest zbieżny do funkcji f?

Zadanie 3. Udowodnij, że dla każdego $x \in (0, \pi)$ prawdziwa jest równość

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Zadanie 4. Niech $0 < \alpha \leq 1$. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π spełnia warunek $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha$ dla pewnej stalej $C > 0$. Udowodnij, że współczynniki Fouriera spełniają $a_n = O(n^{-\alpha})$, $b_n = O(n^{-\alpha})$.

Zadanie 5. Załóżmy, że f jest funkcją 2π-okresową klasy C^k. Udowodnij, że $a_n = o(n^{-k})$ oraz $b_n = o(n^{-k})$.

Zadanie 6. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie całkowalną w sensie Riemanna funkcją okresową o okresie 2π. Niech s_n będddzie n-tą sumą częściową szeregu Fouriera funkcji f. Definiujemy

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)}{n}.$$

Udowodnij, że

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\pi} \left(f(x-t) + f(x+t)\right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \, \mathrm{d}t.$$

oraz

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi n} \int_{0}^{+\pi} \left(f(x-t) + f(x+t)\right) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

Zadanie 7. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o okresie 2π. Udowodnij nierówność

$$\inf_{x \in [0,2\pi]} f(x) \leq \sigma_n(x) \leq \sup_{x \in [0,2\pi]} f(x).$$

Udowodnij, że jeśli $\sigma_n(x) \equiv \sup_{x \in [0,2\pi]} f(x)$ to $f \equiv \sup_{x \in [0,2\pi]} f(x)$.

Zadanie 8. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją 2π-okresową. Załóżmy, ze współczynniki Fouriera funkcji f spełniają nierówności $|a_n|n \leq A$ i $|b_n|n \leq B$. Udowodnij nierowność $|s_n(x) - \sigma_{n+1}(x)| \leq A + B$. Wywnioskuj stąd nierówność

$$\left| \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{\pi}{2} + 1, \qquad n \geq 1, x \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 9. Niech $(b_n)_{n \geq 1}$ będzie malejącym ciągiem zbieżnym do 0. Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \to \infty} nb_n = 0$.

Zadanie 10. Niech $(b_n)_{n \geq 1}$ będzie malejącym ciągiem zbieżnym do 0. Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ jest szeregiem Fouriera funkcji ciągłej wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \to \infty} nb_n = 0$.

Analiza Matematyczna I.2*

Ćwiczenia, seria 12, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Niech $t > 0$. Udowodnij nierówności

$$te^{t^2}\int_t^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}e^{-t^2/2}.$$

Czy stała $\frac{1}{2}$ w pierwszej nierówności jest optymalna?

Zadanie 2. Udowodnij, że dla dowolnego $n \ge 1$ istnieje liczba $0 < \theta_n < 1$ taka, że

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\; e^{\frac{\theta_n}{12}}.$$

W tym celu udowodnij tożsamość

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \ldots + \frac{1}{2k+1}x^{2k} + \ldots\right), \qquad |x| < 1$$

i wywnioskuj nierówność

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Następnie udowodnij, że ciąg $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$ jest malejący, ale ciąg $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ jest rosnący. Wywnioskuj stąd, że istnieje stała a taka, że $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n$. Następnie udowodnij, że istnieją stałe $\theta_n, \theta_n' \in (0,1)$ takie, że

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{\frac{4\theta_n - \theta_n'}{24n}}$$

i na tej podstawie wyznacz stałą a.

Zadanie 3. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

dla $n = 0, 1, \ldots, N$. Udowodnij, że f ma przynajmniej $N+1$ miejsc zerowych w przedziale $[a,b]$.

Zadanie 4. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nierosnącą. Udowodnij, że dla każdego $\theta \in [0,1]$ prawdziwa jest nierówność

$$\theta\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^\theta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 5. Niech $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że istnieje skończona granica $\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}$. Udowodnij, że dla każdej funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ klasy C^1 prawdziwa jest równość

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)g(x^n)\,\mathrm{d}x = f(1)\int_0^1 \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 6. Niech $a > 0$. Wyznacz granice

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}\,\mathrm{d}x, \qquad \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{a+x^{2n}}\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 7. Niech f będzie ściśle rosnącą funkcją klasy C^1 określoną na przedziale $[0,c]$ i niech $f(0) = 0$. Dla dowolnych liczb $a \in [0,c]$ oraz $b \in [0, f(c)]$ udowodnij nierówność

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \ge ab.$$

Analiza Matematyczna I.2*

Zadania domowe, seria 1, P. Nayar, 2012/13

W poniższych zadaniech f^n oznacza zawsze n-krotne złożenie funkcji f, czyli $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$. Przyjmujemy również $f^1 = f$.

Zadanie 1 (2 pkt)**.** Niech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Rozstrzygnij, czy zawsze prawdziwa jest nierówność

$$f(a+b) + f(0) \geq f(a) + f(b), \quad a, b \geq 0.$$

Zadanie 2 (3 pkt)**.** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Przypuśćmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje liczba naturalna $n(x) \geq 1$ taka, że $f^{n(x)}(x) = x$. Udowodnij, że $f^2(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3 (3 pkt)**.** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Przypuśćmy, że istnieje $n \geq 1$ takie, że f^n jest funkcją ograniczoną. Udowodnij, że f^2 jest funkcją ograniczoną.

Zadanie 4. Niech $a, b > 0$. Dla $c \in (0, 1]$ Rozważmy elipsę

$$\mathcal{E}_c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c \right\}.$$

Wyznacz $\operatorname{dist}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_c)$.

Zadanie 5 (5 pkt, $\bullet$)**.** Niech $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Czy f musi być funkcją ciągłą?

Analiza Matematyczna I.2*

Zadania domowe, seria 2, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (3 pkt)**.** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $f(0) = 0$. Przypuśćmy, że $f(x) + f'(x) \leq 1$ dla $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $f(1) \leq 1 - e^{-1}$. Czy to oszacowanie jest optymalne?

Zadanie 2 (3 pkt)**.** Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Udowodnij nierówność

$$\cos(x_1)\cos(x_2)\ldots\cos(x_n) < \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Czy stała $1/\sqrt{e}$ jest optymalna?

Zadanie 3 (3 pkt)**.** Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na (a, b). Udowodnij, że istnieje $c \in (a, b)$ takie, że

$$\frac{1}{a-c} < f'(c) < \frac{1}{b-c}.$$

Zadanie 4 (5 pkt)**.** Udowodnij, że dla $x \in (0, \pi)$ i $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} > 0.$$

Zadanie 5 (5 pkt, •)**.** Liczby dodatnie $p_1, \ldots, p_n$ i $q_1, \ldots, q_n$ spełniają warunek $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i$. Udowodnij nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln q_i.$$

Zadanie 6 (3 pkt)**.** Dla $x \in [0, 1]$ udowodnij nierówność

$$\sin \pi x \leq 4x(1-x).$$

Analiza Matematyczna I.2*

Zadania domowe, seria 2, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (3 pkt)**.** Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą trzykrotnie różniczkowalną. Załóżmy, że $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'(1) = f''(1) = 0$ oraz $f(1) = 1$. Udowodnij, że istnieje $c \in (0,1)$ takie, że $f'''(c) \geq 24$.

Zadanie 2 (3 pkt)**.** Niech $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Rozstrzygnij, czy zawsze istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ taki, że

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \geq 0.$$

Zadanie 3 (4 pkt)**.** Niech $P : [-1,1] \to [-1,1]$ będzie wielomianem stopnia $n \geq 0$. Udowodnij, że $|P'(x)| \leq n^2$ dla $x \in [-1,1]$.

Zadanie 4 (4 pkt)**.** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞. Przypuśćmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje liczba naturalna $n(x) \geq 0$ taka, że $f^{(n(x))}(x) = 0$. Czy funkcja f musi być wielomianem?

Zadanie 5 (5 pkt, $\bullet$)**.** Udowodnij nierówność

$$\operatorname{tg}(\sin x) > \sin(\operatorname{tg} x), \quad x \in (0, \pi/2).$$

Zadanie 6 (4 pkt)**.** Niech $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Rozstrzygnij, czy funkcja

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(b_k x)$$

musi mieć miejsce zerowe.

Analiza Matematyczna I.2*

Zadania domowe, seria 4, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (3 pkt)**.** Dla $n \geq 1$ definiujemy funkcje $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ wzorami

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & x \in [0, n] \\ 0 & x > n \end{cases}.$$

Czy ciąg funkcyjny $(f_n)_{n \geq 1}$ jest zbieżny jednostajnie na $[0, \infty)$?

Zadanie 2 (5 pkt, $\bullet$)**.** Zbadaj jednostajną zbieżność na $\mathbb{R}$ ciągu funkcyjnego $(f_n)_{n \geq 1}$, gdzie

$$f_n(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(nx) \right).$$

Zadanie 3 (4 pkt)**.** Niech $J \subseteq I \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami domkniętymi. Niech $|I|$ oraz $|J|$ oznaczają długości tych przedziałów. Niech P będzie wielomianem stopnia d. Udowodnij nierówność

$$\sup_{x \in I} |P(x)| \leq T_d \left(\frac{2|I|}{|J|} - 1 \right) \sup_{x \in J} |P(x)|,$$

gdzie T_d jest wielomianem Czebyszewa stopnia d.

Zadanie 4 (4 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n \geq 0}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Czy zawsze istnieje funkcja klasy $C^\infty(\mathbb{R})$ taka, że $f^{(n)}(0) = a_n$?

Zadanie 5 (3 pkt)**.** Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi zbieżnymi punktowo do funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, czyli $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Czy funkcja f musi mieć punkt ciągłości?

Zadanie 6 (3 pkt)**.** Przypuśćmy, że ciąg $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ spełnia $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ dla każdego $x \in [0, 1]$. Czy musi istnieć przedział $I \subset [0, 1]$ taki, że ciąg (f_n) jest bieżny jednostajnie na I?

Analiza Matematyczna I.2*

Zadania domowe, seria 5, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (3 pkt)**.** Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ jest zbieżny. Czy funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

jest gładka na zbiorze $\mathbb{R} \backslash \{a_1, a_2, \ldots\}$?

Zadanie 2 (3 pkt)**.** Wyznacz punkty różniczkowalności funkcji $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x|^p}}{n^2}$ dla $p = 1, 2$.

Zadanie 3 (2 pkt)**.** Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ jest sumowalny metodą Abela? Czy szereg ten jest sumowalny metodą Cesaro?

Zadanie 4 (2 pkt)**.** Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$ jest sumowalny metodą Abela? Czy szereg ten jest sumowalny metodą Cesaro?

Zadanie 5 (2 pkt)**.** Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem zbieżnym i niech $A_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$. Udowodnij, że

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Zadanie 6 (3 pkt)**.** Wyznacz granicę

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n^2}.$$

Zadanie 7 (5 pkt, •)**.** Wyznacz sumę uogólnioną w sensie Cesaro i w sensie Abela szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx).$$

Zadanie 8 (5 pkt)**.** Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Załóżmy ponadto, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ jest funkcją stałą. Czy wynika stąd, że $a_n = 0$ dla wszystkich $n \geq 1$?

Zadanie 9 (5 pkt)**.** Zbadaj zbieżność jednostajną na przedziale $[0, 1]$ szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1 + x^n)^n}.$$

Analiza Matematyczna I.2*

Zadania domowe, seria 6, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (4 pkt)**.** Niech $\alpha > 0$ i niech $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^\alpha}.$$

Wyznacz wszystkie wartości $k \geq 1$, dla których $f \in C^k((0,1))$.

Zadanie 2 (3 pkt)**.** Niech $n, m \geq 1$ będą liczbami naturalnymi. Udowodnij równość

$$\int_0^1 \sqrt[n]{1 - x^m}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt[m]{1 - x^n}\, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 3 (4 pkt)**.** Udowodnij równość

$$a_n := \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin x \, \mathrm{d}x = 2 \sum_{n \leq 2k \leq 2n} (-1)^{k+n} \frac{n!}{(2n-2k)!} \pi^{2n-2k}.$$

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej q mamy $\lim_{n\to\infty} q^n a_n = 0$. Wywnioskuj stąd, że π jest liczbą niewymierną.

Zadanie 4 (3 pkt)**.** Niech $\mathcal{C} \subseteq [0,1]$ będzie standardowym zbiorem Cantora. Definiujemy funkcję $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{C} \\ 0 & x \notin \mathcal{C} \end{cases}.$$

Czy funkcja ta jest całkowalna w sensie Riemanna?

Zadanie 5 (3 pkt)**.** Niech $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą.

(a) Czy z równości $\int_{-1}^1 f(x) x^n \, \mathrm{d}x = 0$ spełnionej dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 0$ wynika, że $f \equiv 0$?

(b) Czy z równości $\int_{-1}^1 f(x) x^{2n} \, \mathrm{d}x = 0$ spełnionej dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 0$ wynika, że f jest funkcją nieparzystą?

Zadanie 6 (4 pkt)**.** Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2, spełniającą warunek $f(0) = f(1) = 0$. Udowodnij nierówność

$$\int_0^1 |f'(x)|^4 \, \mathrm{d}x \leq 9 \int_0^1 |f(x) f''(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Zadanie 7 (5 pkt, •)**.** Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją niemalejącą. Udowodnij nierówność

$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \leq 2 \int_0^1 x f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Analiza Matematyczna I.2*

Zadania domowe, seria 7, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (3 pkt)**.** Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnij równość

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = f(1).$$

Zadanie 2 (4 pkt)**.** Wyznacz liczbę $r > 1$ spełniającą zależność

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^r)^r}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Zadanie 3 (3+4 pkt)**.**

(a) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy ponadto, że f' jest całkowalna w sensie Riemanna na $[0,1]$. Udowodnij równość

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right) = -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką i niech $k \geq 0$ będzie liczbą naturalną. Udowodnij, że istnieją liczby rzeczywiste $a_0, \ldots, a_k$ zależące od funkcji f takie, że

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f\left(\frac{l}{n}\right) = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$$

i wyznacz liczby $a_0, \ldots, a_k$. Co można powiedzieć o tych liczbach, jeśli f jest funkcją 1-okresową?

Zadanie 4 (4 pkt)**.** Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna spełniającą warunek $0 \leq f(x) \leq x$ dla $x \in [0,1]$. Udowodnij nierówność

$$\int_0^1 \left(f(x) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right)^2 \mathrm{d}x \leq \frac{5(3-\sqrt{5})}{24}.$$

Czy stała po prawej stronie jest optymalna?

Zadanie 5 (5 pkt, •)**.** Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że g jest funkcją 1-okresową. Udowodnij równość

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) g(nx)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Analiza Matematyczna I.2*

Zadania domowe, seria 8, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (4 pkt)**.** Niech $f : [0,1] \to (0,\infty)$ będzie funkcją ciągłą. Definiujemy

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x) \ln f(x)\, \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x\right) \ln\left(\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x\right).$$

Udowodnij, że

$$\Phi(f) = \sup\left\{\int_0^1 f(x)g(x)\, \mathrm{d}x \;\middle|\; \int_0^1 e^{g(x)}\, \mathrm{d}x \le 1, \quad g \in C([0,1])\right\}.$$

Wskazówka. Udowodnij, że dla $u > 0$ i $v \in \mathbb{R}$ mamy

$$uv \le u \ln u - u + e^v.$$

Zadanie 2 (5 pkt)**.** Niech $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ bedą funkcjami ciągłymi spełniającymi warunek $\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\, \mathrm{d}x = 1$. Udowodnij, że istnieje przedział $I \subseteq [0,1]$ taki, że

$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}x = \int_I g(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 3 (4 pkt)**.** Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

Udowodnij nierówność $\int_0^1 f^2(x)\, \mathrm{d}x \ge 4$.

Zadanie 4 (6 pkt)**.** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem. Definiujemy

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x.$$

Udowodnij, że powyższa całka jest zbieżna. Dla $n \ge 0$ definiujemy $H_n = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x^2/2}\right)$. Udowodnij, że $\langle H_n H_m \rangle = n! \delta_{n,m}$. Udowodnij również, że dla dowolnego wielomianu f prawdziwa jest nierówność

$$\left\langle f^2 \right\rangle - \langle f \rangle^2 \le \left\langle (f')^2 \right\rangle.$$

Udowodnij, że jeśli f jest funkcją parzystą, to

$$\left\langle f^2 \right\rangle - \langle f \rangle^2 \le \frac{1}{2} \left\langle (f')^2 \right\rangle.$$

Czy powyższe nierówności są prawdziwe dla dowolnej funkcji ciągłej o zwartym nośniku?

Zadanie 5 (4 pkt)**.** Niech $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami wklęsłymi spełniającymi warunek $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$ oraz $f(x) \ge g(x)$ dla $x \in [0,1]$. Rozstrzygnij, czy prawdziwa jest nierówność

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x \ge \int_0^1 \sqrt{1 + g'(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Uwaga! Nie ma pisemnego.

Analiza Matematyczna I.2*

Zadania domowe, seria 9, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (3 pkt)**.** Oblicz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4+x^6}\,.$$

Zadanie 2 ($\bullet$, 5 pkt)**.** Zbadaj zbieżność całek

(a) $\int_1^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

(b) $\int_0^1 \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

(c) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x+x^\alpha \sin x}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \in [0,1)$,

(d) $\int_0^\pi \frac{e^{(\sin x)^\alpha}-1}{e-e^{\cos x}}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$.

Zadanie 3 (3 pkt)**.** Oblicz funkcję pierwotną

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,.$$

Zadanie 4 (3 pkt)**.** Wyznacz rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f : [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = e^x$, rozszerzonej na $\mathbb{R}$ do funkcji 2π-okresowej. W jakich punktach szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny do f?

Zadanie 5 (3 pkt)**.** Rozwiń w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} -\ln|2\sin(\frac{x}{2})| & x \neq 2k\pi, \\ 0 & x = 2k\pi \end{cases}\,.$$

Zadanie 6 (3+3 pkt)**.** (a) Niech $(B_n)_{n=0}^\infty$ będzie ciągiem zadanym równaniami rekurencyjnymi,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \qquad B_0 = 1.$$

Zdefiniujmy funkcję

$$\begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & x \neq 0 \\ 1 & x = 1 \end{cases}\,.$$

Udowodnij, że $B_n = f^{(n)}(0)$.

(b) Wyznacz wszystkie $x \in \mathbb{R}$, dla których prawdziwa jest równość

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Zadania treningowe z Am.1.2*

Piotr Nayar, 12 czerwca 2013

Zadanie 1. Udowodnij, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

jest klasy $C^\infty(\mathbb{R})$. Czy f jest funkcją okresową?

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą 2π-okresową. Udowodnij równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Wskazówka. Pokaż najpierw tezę dla funkcji $f_k(t) = e^{2\pi i k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 3.

(a) Niech $a \in \mathbb{R}$ i $b \in [0, 1]$. Udowodnij nierówność

$$\sqrt{1 + a^2} - ab \geq \sqrt{1 - b^2}.$$

(b) Niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Przypuśćmy, że długość wykresu funkcji f jest równa wartości funkcji f w punkcie 1. Udowodnij, że

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x \geq \pi/4.$$

Dla jakiej funkcji w powyższej nierówności zachodzi równość?

Zadanie 4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞. Załóżmy, że dla wszystkich $n \geq 1$ mamy $f(\frac{1}{n}) = 0$ oraz $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f jest funkcją stałą. Czy teza jest prawdziwa bez założenia $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ dla $x \in \mathbb{R}$? Czy teza jest prawdziwa bez założenia $f(\frac{1}{n}) = 0$ dla $n \geq 1$?

Zadanie 5. Niech $n \geq 1$. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną klasy C^n i $f^{(n)}$ jest lipschitzowska. Udowodnij, że funkcje $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ są ograniczone.

Zadanie 6. Udowodnij nierówność

$$(\sin x)^{\sin x} \leq (\cos x)^{\cos x}, \qquad x \in [0, \pi/4].$$

Zadanie 7. Niech $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że funkcja $xf(x)$ jest wypukła wtedy i tylko wtedy gdy wypukła jest funkcja $f(1/x)$.

Zadanie 8. Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie rosnącą funkcją wklęsłą spełniającą $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Udowodnij nierówność $f(x)f^{-1}(x) \leq x^2$ dla $x \in [0, 1]$.

Zadanie 9. Załóżmy, że p, q są liczbami względnie pierwszymi. Udowodnij równość

$$\int_0^1 \left(\{px\} - \frac{1}{2}\right)\left(\{qx\} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{12pq}.$$

Zadanie 10. Niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że $\int_0^1 x^k f(x)\, \mathrm{d}x = 0$ dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ oraz $\int_0^1 x^n f(x)\, \mathrm{d}x = 1$. Udowodnij, że istnieje punkt $x_0 \in [0, 1]$ taki, że $|f(x_0)| \geq 2^n(n+1)$.