Zbieżność jednostajna i niemal jednostajna szeregów funkcyjnych.
Własności analityczne funkcji granicznych.

1. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}}$.
Wykaż, że f jest poprawnie określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz, że $f \in C^1(\mathbb{R})$.

2. Określmy
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + e^x}$$
Wyznacz: maksymalną dziedzinę funkcji, zbiór jej punktów ciągłości, zbiór jej punktów różniczkowalności.
Oblicz $f'(0)$

3. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{x^2+n^2}$ jest określona i ciągła na $\mathbb{R}$. Zbadaj jej różniczkowalność.

4. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ dla $x \in [0, +\infty)$.
Wykaż, że f jest różniczkowalna na $(0,+\infty)$ oraz prawostronnie różniczkowalna w 0. Wyznacz $f'_+(0)$, $f'(1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$

5. Udowodnić, że funkcja dzeta Riemanna określona wzorem
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
jest funkcją klasy $C^\infty(1,\infty)$.

6. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin x|^{\sqrt{n}}$ jest ciągła na $(0,1)$.
Czy jest na tym przedziale różniczkowalna.

7. Wykaż, że jeśli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, a ciąg a_n dąży do 0 i dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$ zdefiniujemy $g_n(x) = f(x+a_n)$, to ciąg funkcji g_n zbiega na $\mathbb{R}$ niemal jednostajnie do f.