

1. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{x}$$

2. Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą na  $[0, 1]$ .

Wykaż, że

$$a) \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$b) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

3. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \int_n^{2n} \frac{x dx}{x^5 + 1}$$

4. Podać przykład takiego ciągu funkcji ciągłych  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , zbieżnego punktowo do funkcji ciągłej, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

5. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1+x}} dx$$

6. Wykazać, że jeśli  $f$  jest funkcją nieujemną i ciągłą na  $[a, b]$

oraz  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , to  $f$  jest tożsamościowo równa 0.