ZBIEŻNOŚĆ JEDNOSTAJNA SZEREGÓW cz. I.

1. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregów na podanych zbiorach:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2(x^2+1)}$ na $\mathbb{R}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$ na $(-a,a)$, na $(0,+\infty)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$ na $(1,+\infty)$, $(0,+\infty)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ na $[\delta, 2\pi-\delta]$ dla pewnego $\delta>0$

$(0,2\pi)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{n-1}$ dla $|x|<1$

2\. Na jakim zbiorze jest zbieżny punktowo szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Wyznacz funkcję graniczną. Czy szereg ten zbiega jednostajnie na zbiorze swojej zbieżności punktowej?

3\. Zbadaj na jakim zbiorze zbieżny jest szereg $\sum_{n=1} |x|^{\sqrt{n}}$.
Zbadaj ciągłość jego sumy na tym zbiorze.

4\. Szereg $\sum f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$.
Czy wynika stąd zbieżność jednostajna szeregu $\sum x f_n(x)$?

5\. Udowodnij, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest zbieżny jednostajnie, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ też jest zbieżny jednostajnie.
Czy prawdziwa jest implikacja przeciwna?

6\. Wykaż, że jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$ jest zbieżny na zbiorze A oraz $\sup_{x\in A} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$ i szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie