ZBIEŻNOŚĆ JEDNOSTAJNA cz. I

1. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną podanych ciągów funkcyjnych na $[0,1]$:

   a) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ b) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

   d) $f_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}$

2. Sprawdź czy podane poniżej ciągi funkcyjne są zbieżne na podanym zbiorze

   a) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ na $\mathbb{R}$

   b) $f_n(x) = x^n(1-x)$ na $[0,1]$

   c) $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx-1)^2}$ na $[0,1]$

   d) $f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$ na $\mathbb{R}$

   e) $f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$ na $\mathbb{R}$

   f) $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ dla $x \in [1,a)$ $a>1$

   g) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ na $[0,1]$ i na $(0,1)$

   h) $f_n(x) = \sqrt{n+1}\,\sin^n x \cos x$ na $[0,\pi]$

   i) $f_n(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{n},1]}(x) \cdot \sin\frac{1}{x}$ na $(0,1)$

3. Niech f będzie dowolną funkcją określoną na $[a,b]$ i niech $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$ dla $x \in [a,b]$

   Wykaż, że $f_n \underset{\text{na } [a,b]}{\rightrightarrows} f$