Równoważność między nierównością Lagariasa, a hipotezą Riemanna

Michał Skrzypczak

11 maja 2007

Spis treści

Streszczenie

Poniższy artykuł jest zmodyfikowanym i wzbogaconym tłumaczeniem artykułu Lagariasa [1].

Rozważamy tu nierówność (zwaną nierównością Lagariasa)

$$\text{dla } n > 1 \text{ zachodzi} \quad \sum_{d|n} d \leqslant H_n + \exp(H_n) \cdot \ln(H_n),$$

$$\text{gdzie} \quad H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Okazuje się, że tak prosta i elementarna nierówność jest równoważna hipotezie Riemanna. Spośród wielu równoważnych sformuowań HR, to jest o tyle szczególne, że nie zawiera przejść granicznych, stałych (typu γ Eulera), nie jest kwantyfikowane po nieprzeliczalnym zbiorze, oraz obie strony nierówności są zdefiniowane konstruktywnie. Dzięki tak prostej strukturze nierówność ta łatwo poddaje się badaniom, oraz analizie numerycznej.

1 Wprowadzenie

W przypadku tak ważnej i trudnej do wykazania hipotezy, jak HR, wartościowym wynikiem jest przeformuowanie jej w równoważny sposób na jak najwięcej sposobów. Z jednej strony daje to szansę na to, że któraś kolejna teza równoważna HR zostanie wreszcie udowodniona lub obalona. Jak wszyscy wiemy byłoby to niezwykle ważnym, historycznym wynikiem. Z drugiej strony, dzięki mnogim sformuowaniom równoważnym, badacze z różnych dziedzin, natrafiając na jeden z takich problemów, mają szansę podejść do danego zagadnienia w odpowiedni sposób. W zależności od swej decyzji mogą oni przystąpić do pracy badawczej lub zrezygnować z poświęcania czasu tak trudnemu problemowi.

By ujednolicić notację, zdefiniuję kilka pojęć.

Definicja 1.1. *Niech:*

$$H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n},$$

$$d|n \Leftrightarrow d \text{ dzieli } n,$$

$$\sigma(n) := \sum_{d|n} d,$$

$$\pi(x) := \sharp\{p \in \mathbb{P}; p \leqslant x\},$$

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} H_n - \ln n,$$

$$f(n) := \frac{\sigma(n)}{n \ln\ln n}.$$

Przypomnijmy sformuowanie postawionej w 1859 roku hipotezy Riemanna.

Hipoteza 1.2 (Riemann)**.** *Wszystkie nietrywialne (zespolone) zera funkcji ζ znajdują się na prostej krytycznej $\Re(z) = 1/2$.*

Powszechnie znane jest spostrzeżenie Gaussa, że $\pi(x)$ jest dobrze przybliżone tzw. całką logarytmiczną.

Definicja 1.3. *Całkę logarytmiczną oznaczać będziemy*

$$Li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

Wiadomo również, że

$$Li(x) = \frac{x}{\ln x} + O(\frac{x}{(\ln x)^2}).$$

Koch w roku 1901 wykazał, że następujący problem jest równoważny HR.

Problem 1.4 (Koch)**.** *Istnieje taka stała C, że*

$$|\pi(x) - Li(x)| \leqslant C\sqrt{x}\ln x$$

W pracy Edwardsa [3] zostało to delikatnie przeformuowane.

Twierdzenie 1.5. *Hipoteza Riemanna jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $\varepsilon > 0$*, istnieje dodatnia stała* C_ε *taka, że*

$$|\pi(x) - Li(x)| \leqslant C_\varepsilon x^{1/2+\varepsilon}$$

dla każdego $x \geqslant 2$*.*

Następne w łańcuchu równoważności, jest sformuowanie uzyskane przez Robin'a w pracy [2].

Twierdzenie 1.6 (Robin)**.** *Hipoteza Riemanna jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sigma(n) < e^\gamma n \ln \ln n \quad \textit{dla każdego} \quad n \geqslant 5041,$$

gdzie γ *jest stałą Eulera.*

Oraz pokrewne z nim twierdzenie z tej samej pracy.

Twierdzenie 1.7 (Robin)**.** *Jeśli hipoteza Riemanna jest fałszywa, istnieją wtedy stałe* $0 < \beta < \frac{1}{2}$*, oraz* $C > 0$*, takie że nierówność*

$$\sigma(n) \geqslant e^\gamma n \ln \ln n + \frac{C n \ln \ln n}{(\ln n)^\beta}$$

zachodzi dla nieskończenie wielu n*.*

Nierówności Robina są bardzo subtelne, zważywszy na poniższe twierdzenie z pracy Gronwall'a [4].

Twierdzenie 1.8 (Gronwall)**.** *Funkcja* $\sigma(n)$ *spełnia następującą zależność asymptotyczną*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n \ln \ln n} = e^\gamma.$$

W pracy [1], która jest podstawą tego artykułu, Lagarias wychodzi od dwóch wspomnianych wcześniej twierdzeń Robina (1.6, 1.7), stawia poniższy problem i dowodzi twierdzenie 1.10.

Problem 1.9 (Lagarias)**.** *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 1$*, zachodzi*

$$\sigma(n) \leqslant H_n + \exp(H_n) \cdot \ln(H_n),$$

z równością dla $n = 1$*.*

Twierdzenie 1.10 (Lagarias)**.** *Problem 1.9 jest równoważny hipotezie Riemanna.*

Zakładam, że twierdzenie 1.5 jest powszechnie znanym faktem. Zacznę od krótkiego przedstawienia rozumowania i pojęć stosowanych przez Robina w pracy [2] przy dowodzie twierdzeń 1.6 i 1.7. Następnie opierając się na tych twierdzeniach ściśle udowodnię dwa lematy Lagariasa i zakończę dowodem twierdzenia 1.10.

2 Rozumowanie Robina

Przedstawimy tutaj schemat rozumowania prowadzącego do dowodu twierdzeń 1.6 oraz 1.7.

Okazuje się, że przy badaniu asymptotycznego zachowania funkcji σ kluczową rolę odgrywa następująca klasa liczb.

2.1 Liczby kolosalnie obfite

Definicja 2.1. *Liczbę naturalną N nazwiemy kolosalnie obfitą, jeśli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że*

$$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{\sigma(N)}{N^{1+\varepsilon}} \quad \text{dla każdego} \quad n \geqslant 1.$$

Liczby kolosalnie obfite, stanowią zbiór nieskończony, pierwsze z nich, to $2, 6, 12, 60, 120, 360, \ldots$. Jest ich zaledwie 22 w przedziale $[1, 10^{18}]$.

Konsekwencją lematu 2.3 jest, że jeżeli istnieje kontrprzykład na nierówność w twierdzeniu 1.6, to istnieje kontrprzykład będący liczbą kolosalnie obfitą. Ten sam wynik daje się osiągnąć w przypadku nierówności w problemie 1.9. To właśnie dlatego badania ekstremalnych wartości funkcji f opieramy na badaniu liczb kolosalnie obfitych.

Zauważmy, że

$$\sigma(n) = \prod_{p^\alpha || n} (1 + p + \ldots + p^\alpha) = n \prod_{p^\alpha || n} \left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^\alpha}\right),$$

gdzie iloczyn jest liczony po takich (p, α), że $p^\alpha | n$, oraz $p^{\alpha+1} \nmid n$.

W celu badania rozkładu liczb kolosalnie obfitych, definiuje się funkcję F.

Definicja 2.2. *Dla liczby rzeczywistej, $x > 1$, oraz całkowitego $\alpha \geqslant 1$, zdefiniujmy*

$$F(x, \alpha) := \frac{\ln(1 + \frac{1}{x + x^2 + \ldots + x^\alpha})}{\ln x} = \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^\alpha}}{1 + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^{\alpha-1}}} \right) \Big/ \ln x.$$

Zwróćmy uwagę na kilka własności funkcji F. Dla ustalonego, całkowitego $\alpha \geqslant 1$, funkcja $x \mapsto F(x, \alpha)$ jest malejąca, oraz „na $\mathbb{R}^+$", na przedziale $(1, \infty)$. Ponadto przy ustalonym x, $F(x, \alpha)$, maleje wraz ze wzrostem α.

Rozważmy również, dla dowolnego $x > 1$ ciąg x_k, taki że $F(x_k, k) = F(x, 1)$. Oznaczmy przy tym $\varepsilon := F(x, 1)$, oraz oczywiście $x_1 = x$.

W dalszej części tego paragrafu Robin podaje lemat szacujący rozkład ciągu x_k, w zależności od x, oraz od $F(x, 1) = \varepsilon$.

2.2 Szacowanie $\sigma(n)$ przy założeniu HR

Zaczynamy od lematu, dowodzącego, że ekstremalne wartości f zawsze są przyjmowane na liczbach kolosalnie obfitych.

Lemat 2.3 (Robin)**.** *Gdy* $3 \leqslant N \leqslant n \leqslant N'$*, oraz liczby* N, N' *są kolejnymi liczbami kolosalnie obfitymi, wtedy*

$$f(n) \leqslant \max(f(N), f(N')).$$

Dowód. Jest to 7-linijkowe szacowanie i korzystanie z definicji LKO. ■

Robin korzysta z lematu Erdosa z pracy [5].

Lemat 2.4 (Erdos)**.** *Niech* $\varepsilon \notin \{F(p,\alpha); p \in \mathbb{P}, \alpha \geqslant 1\}$*, oraz niech funkcja* $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ *osiąga maksimum w pojedyńczym punkcie* N*. Wtedy rozkład* N *na czynniki pierwsze jest następujący*

$$N = \prod_p p^{\alpha_p(\varepsilon)}$$

$$\alpha_p(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{\ln(p^{1+\varepsilon} - 1) - \ln(p^{\varepsilon} - 1)}{\ln p} \right\rfloor - 1.$$

Poprzez analizę funkcji F, oraz w oparciu o lemat 2.4, otrzymujemy, że jeśli N jest liczbą kolosalnie obfitą dla stałej ε, oraz x_i są to stałe zdefiniowane wraz z definicją F, to

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \prod_{x_2 < p \leqslant x} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{x_3 < p \leqslant x_2} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \cdot \ldots . \tag{2.1}$$

Lemat 2.5 (Robin)**.** *Przy założeniu hipotezy Riemanna, istnieje liczba naturalna* n_0*, taka, że* $f(n) < e^{\gamma}$*, dla* $n \geqslant n_0$

Dowód. Ograniczamy rozważania do liczby kolosalnie obfitej N, ze stałą ε, korzystamy ze wzoru (2.1), szacowania rozkładu liczb x_k dla $F(x,1) = \varepsilon$, oraz wyników Nicolasa i Edwardsa, by oszacować

$$f(N) \leqslant e^{\gamma} \exp\left(\frac{-0,782\ldots}{\sqrt{x}\ln x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}\ln^2 x} \right) \right),$$

gdzie x jest takie, że $F(x,1) = \varepsilon$. Stała pojawiająca się na górze ułamka, jest to $2 - 2\sqrt{2} + \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2}$, gdzie suma jest brana po nietrywialnych zerach funkcji ζ. Ponadto korzystając z definicji funkcji F, $x \to \infty$, przy $N \to \infty$, co daje tezę dla dostatecznie dużych N. ■

Przechodząc przez żmudne szacowania, dowodzimy, że dla liczb N o odpowiadającej im wartości $x > 20\,000$ twierdzenie 1.6 zachodzi, mniejsze wartości n sprawdzamy wprost i okazuje się, że nierówność z twierdzenia 1.6 nie zachodzi dla dokładnie 27-miu wartości n, spośród których największa to 5040.

2.3 Szacowanie $\sigma(n)$ przy założeniu fałszywości HR

Nietrywialne zera funkcji ζ leżą symetrycznie względem prostej krytycznej, więc jeżeli w ogóle istnieją nietrywialne zera funkcji ζ po za nią, to istnieją też na prawo od niej. Ponadto wykazano, że dla dowolnego zera ρ funkcji ζ, zachodzi $\Re(\rho) < 1$. Wobec tego HR jest równoważna nie istnieniu zer w pasie $1/2 < \Re(z) < 1$.

Analizując nierówność w twierdzeniu 1.7, dowodzimy (w oparciu o wyniki Nicolasa, oraz wyniki poprzednich paragrafów), że stała β musi spełniać $1 - \Re(\rho) < \beta < 1/2$, dla pewnego ρ takiego, że $\zeta(\rho) = 0$. Ponadto wykazujemy, że jeżeli już taką stałą da się dobrać, to dobierzemy również stałą $C > 0$ tak, że nierówność będzie zachodzić dla nieskończenie wielu n.

3 Rozumowanie Lagariasa

Lemat 3.1 (Lagarias)**.** *Dla $n > 3$ zachodzi nierówność*

$$\exp(H_n) \cdot \ln(H_n) \geqslant e^{\gamma} n \ln\ln n$$

Dowód. Ustalmy $n > 3$. Niech $\lfloor t \rfloor, \{t\}$ oznaczają odpowiednio część całkowitą i ułamkową liczby t. Mamy wtedy

$$\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2} dt = \sum_{r=1}^{n} \int_r^n \frac{dt}{t^2} = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n} \right) = H_n - 1,$$

więc

$$H_n = 1 + \int_1^n \frac{t - \{t\}}{t^2} dt = \ln n + 1 - \int_1^n \frac{\{t\}}{t^2} dt. \tag{3.1}$$

Przepiszmy powyższe równanie

$$H_n - \ln n = 1 - \int_1^n \frac{\{t\}}{t^2} dt.$$

Gdy teraz przejdziemy do granicy, otrzymamy

$$\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt.$$

I po podstawieniu do (3.1) uzyskamy

$$H_n = \ln n + \gamma + \int_n^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt, \tag{3.2}$$

więc

$$\exp(H_n) > \exp(\ln n + \gamma) = e^{\gamma} n.$$

Oczywiście $H_n > \ln n$, więc $\ln(H_n) > \ln\ln n$, mnożąc stronami z powyższym równaniem otrzymujemy tezę

$$\exp(H_n) \cdot \ln(H_n) \geqslant e^{\gamma} n \ln\ln n.$$

■

Lemat 3.2 (Lagarias)**.** *Dla $n > 20$ zachodzi nierówność*

$$H_n + \exp(H_n) \cdot \ln(H_n) \leqslant e^{\gamma} n \ln\ln n + \frac{7n}{\ln n}$$

Dowód. Równość (3.1), po zlogarytmowaniu, w szczególności oznacza, że

$$\ln(H_n) < \ln(\ln n + 1) < \ln\ln n + \frac{1}{\ln(n+1)}. \tag{3.3}$$

Z kolei korzystając z równości (3.2) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \exp(H_n) &= \exp\left(\ln n + \gamma + \int_n^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt\right) \\ &\leqslant e^{\gamma} n \exp\left(\int_n^{\infty} \frac{dt}{t^2}\right) \\ &= e^{\gamma} n \exp(1/n). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Oczywiście skoro $\exp(x) \leqslant 1 + 2x$, dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, to powyższa nierówność przyjmuje postać

$$\exp(H_n) \leqslant e^{\gamma} n \left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

Mnożąc to stronami przez nierówność (3.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \exp(H_n) \cdot \ln(H_n) &\leqslant e^{\gamma} n \ln\ln n + \frac{e^{\gamma} n}{\ln(n+1)} + 2e^{\gamma}(\ln\ln n + 1) \\ &\leqslant e^{\gamma} n \ln\ln n + \frac{6n}{\ln n}, \quad \text{dla } n > 10. \end{aligned}$$

Korzystając ponadto z faktu, że $H_n \leqslant \ln n + 1$, oraz $\frac{n}{\ln n} \geqslant \ln n + 1$ dla $n \geqslant 20$, otrzymujemy tezę. ■

3.1 Finał

Dowód twierdzenia 1.10.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że hipoteza Riemanna jest prawdziwa, wtedy twierdzenie 1.6, oraz lemat 3.1 w sumie dają

$$\text{dla } n \geqslant 5041, \text{ zachodzi} \quad \sigma(n) \leqslant e^{\gamma} n \ln\ln n \leqslant H_n + \exp(H_n) \cdot \ln(H_n).$$

Dla $1 < n < 5041$ sprawdzamy wprost, że nierówność jest spełniona oraz, że dla $n = 1$ zachodzi równość, co kończy dowód problemu 1.9.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że teza problemu 1.9 jest prawdziwa. Przez sprzeczność przyjmijmy mimo to, że hipoteza Riemanna jest fałszywa. Wtedy stosuje się twierdzenie 1.7 i dla nieskończenie wielu n, oraz pewnych stałych $0 < \beta < \frac{1}{2}$, oraz $C > 0$, zachodzi

$$\sigma(n) \geqslant e^{\gamma} n \ln\ln n + \frac{C n \ln\ln n}{(\ln n)^{\beta}}.$$

Jednak dla dostatecznie dużych n

$$\frac{Cn \ln\ln n}{(\ln n)^\beta} > \frac{7n}{\ln n},$$

natomiast z lematu 3.2, dla $n > 20$

$$e^\gamma n \ln\ln n + \frac{7n}{\ln n} \geqslant H_n + \exp(H_n) \cdot \ln(H_n),$$

czyli podsumowując

$$\begin{aligned} \sigma(n) &\geqslant e^\gamma n \ln\ln n + \frac{Cn \ln\ln n}{(\ln n)^\beta} \\ &> e^\gamma n \ln\ln n + \frac{7n}{\ln n} \\ &\geqslant H_n + \exp(H_n) \cdot \ln(H_n) \geqslant \sigma(n). \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy więc oczekiwaną sprzeczność. ■

Literatura

[1] J. C. Lagarias, *An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis*, Amer. Math. Monthly, 109 (2002), 534–543.

[2] G. Robin, *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothese de Riemann*, J. Math. Pures Appl. 63 (1984), 187–213.

[3] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York and London, 1974.

[4] T. H. Gronwall, *Some Asymptotic Expression of Arithmetical Functions* (Trans. Amer. Math. Soc., vol. 14, 1913, p. 113–122).

[5] P. Erdos i J. L. Nicolas, *Repartition des nombres superabondants* (Bull. Soc. Math. Fr., 103, 1975, p. 65–90).