Warszawa, 28 listopada 2017 r.

Propozycje prac licencjackich

Piotr Rybka, Mikołaj Sierżęga, Anna Zatorska-Goldstein

1. Rozważmy układ sterowania łodzią na rzece

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (1 - x_2^2 + u_1, u_2).$$

W tym zagadnieniu punkt (x_1, x_2) należy do wstęgi $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ a zbiór dopuszczalnych sterowań składa się ze zbioru wszystkich funkcji mierzalnych $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o wartościach w kole o środku w początku układu współrzędnych i promieniu M. Załóżmy, że położenie początkowe to $(x_1, x_2)(0) = (-1, 0)$.

Naszym zadaniem zadaniem jest dopłynąć na drugi brzeg w najkrótszym czasie. Załóżmy, że punkt $\bar{x} = (1, b)$ jest dany. Jak będzie wyglądało sterowanie optymalne podpowiadane przez zasadę maksimum Pontriagina? Jakie będzie sterowanie optymalne, jeśli nie narzucamy żadnych więzów na x_2, tj. $\hat{y} = (1, x_2)$?

2. Zagadnienia sterowania, liczne w literaturze inżynierskiej, w których dynamika jest opisywana układem liniowych równań różniczkowych zwyczajnych a koszt bieżący jest kwadratową funkcją odpowiedzi układu i sterowania nazywa się zagadnieniem *regulatora liniowego*. Rozważmy jego szczególny przykład,

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^T [x_1^2(t) + x_2^2(t) + c|u(t)|^2]\, dt,$$

dla układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) &= \bar{x}_1 \\ x_2(0) &= \bar{x}_2. \end{cases}$$

Jak wygląda sterowanie optymalne?

W tym konkretny przypadku możemy interpretować x_2 jak prędkość a więc u jest siłą (załóżmy, że masa jest równa 1). Wówczas, minimalizujemy odchylenie od położenia równowagi, energię kinetyczną układu i kwadrat siły.

3. Rozważmy zagadnienie minimalnego czasu powrotu w zagadnieniu zlinearyzowanego wahadła z siłą zewnętrzną:

$$\ddot{x} = x + u, \qquad x \in \mathbb{R},\ |u| \leq 1.$$

(a) Znaleźć za pomocą zasady maksimum Pontriagina kandydatów na sterowanie optymalne dla dowolnych danych początkowych.

(b) Obliczyć nieciągłe sprzężenie zwrotne $u(x)$ takie, że x jest rozwiązaniem $\ddot{x} = x + u(x)$.

(c) Obliczyć funkcję kosztu W dla rozwiązań z (a). Pokazać, że W jest ciągła i kawałkami klasy C^1.

(d) Pokazać, że uzyskane rozwiązania są optymalne.

4. Rozważmy proces sterowany równaniem

$$\dot{x} + bx = u, \qquad x(0) = x_0,$$

gdzie $b \in \mathbb{R}$ jest stałe a sterowanie spełnia ograniczenie $|u(t)| \leq 1$.

(a) Pokazać, że jeśli $b \geq 0$, to punkt $x_1 = 0$ jest osiągalny niezależnie od danych początkowych.

(b) Opisać zbiór danych początkowych x_0, takich że $x_1 = 0$ jest w zbiorze osiągalnym $R(x_0)$.

(c) Pokazać, że jeśli $x_1 = 0$ jest osiągalny, to sterowanie u sprowadzające x_0 do x_1 w najkrótszym czasie jest nieciągłe. Podać ilość przełączeń i pokazać, że

$$u(t) = -\mathrm{sgn}\,(x(t)).$$

Obliczyć czas minimalny T w funkcji x_0 i b.

Możemy interpretować x jako prędkość cząstki o masie równej 1. Wówczas b będzie współczynnikiem oporu a u to siła z jaką działamy na cząstkę. Pytania kręcą się wokół zagadnienia, czy możemy sprowadzić układ do stanu spoczynku, tj. gdy prędkość jest równa zero.

5. W wielu zagadnienia fizyki mamy do czynienia z ruchem krzywych (np. rozdzielających fazy), które można opisać równaniem

$$\beta(\mathbf{n})V = \sigma, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{n}$ jest wektorem normalnym do krzywej, V jest prędkością w kierunku $\mathbf{n}$ a β jest zadaną funkcją (jest to tzw. współczynnik kinetyczny), podobnie σ jest dane. Oczywiście równanie (1) trzeba uzupełnić o krzywą początkową.

Dla uproszczenia przyjmiemy, że rozpatrujemy krzywe będące wykresami funkcji określonych na prostej. Jednakże, jeśli krzywa początkowa jest gładka, to nasze zadanie jest mało wymagające. Naprawdę ciekawe równanie (1) staje się, gdy krzywa początkowa jest tylko lipschitzowska, np. jest wykresem funkcji $x \mapsto |x|$. Kłopot polega na tym, że na pierwszy rzut oka nie widać co się stanie z rogiem. Okazuje się, że wszystko zależy od wyboru funkcji β. Zadanie polega na zastosowaniu wzór Hopfa-Laxa do rozwiązanie równania (1), gdy $\sigma = 1$, w przypadku prostych funkcji β.

6. (a) Na podstawie badań literaturowych sformułować model populacji ryb stawu hodowlanego (np. poprzez opis wzrostu biomasy) i ich odłowów. Rozważyć skończony horyzont czasowy.
(b) Zbudować wariant uwzględniający okresy ochronne.
(c) Znaleźć optymalne, tj. maksymalizujące zyski sterowanie odłowami.

7. Prosty model magazynowania można opisać równaniami

$$\begin{aligned} \dot{I} &= P - S, \quad I(0) = I_0, \\ \dot{S} &= -\lambda P, \quad S(0) = S_0, \end{aligned}$$

gdzie I jest poziomem zapasów w chwili t, S jest tempem sprzedaży a P jest tempem produkcji, które mieści się w przedziale $[P_*, P^*]$. Naszym zadaniem jest minimalizowanie kosztów. Zbudować model i zanalizować go.

8. W oparciu o dostępną wiedzę zbudować model optymalnego inwestowania w rozwój firmy. Następnie zbadać go.