Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Michał R. Przybyłek
Nr albumu: 214659

Kategorie wewnętrzne a kategorie wzbogacone

Praca magisterska
na kierunku INFORMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Andrzeja Tarleckiego

Czerwiec 2008

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data | Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data | Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Celem niniejszej pracy jest przestudiowanie związków zachodzących pomiędzy kategoriami $\mathbb{C}$-wewnętrznymi a $\mathbb{C}$-wzbogaconymi, względem ustalonej skończenie zupełnej kategorii $\mathbb{C}$. Zaproponowany został pewien elastyczny szkielet, w którym można w prosty sposób wyrazić zarówno pojęcie kategorii wzbogaconych, jak i wewnętrznych. Koncepcja ta prowadzi do powstania tzw. kategorii relatywnych względem dowolnego monoidalnego rozwłóknienia nad kartezjańską bazą. Badane są podstawowe własności monoidalnych rozwłóknień i kategorii relatywnych, które służą dalej analizie aproksymacji pomiędzy światami kategorii wzbogaconych i wewnętrznych. Zdefiniowana zostaje algebraiczna własność kategorii bycia „quasiekstensywną” charakteryzująca istnienie tzw. „globalnych aproksymacji”.

Słowa kluczowe

category theory, relative category, monoidal fibration, extensive category, quasiextensive category

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.3 Informatyka

Klasyfikacja tematyczna

F. Theory of Computation
F.4 Mathematical Logic and Formal Languages
F.4.1 Mathematical Logic

Tytuł pracy w języku angielskim

Enriched vs. Internal Categories

Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń

$\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$	klasyczne kategorie o nazwach jednoznakowych
Cat, **Set**, **Top**	klasyczne kategorie o nazwach wieloznakowych
A, B, C	obiekty
$(A_x)_{x:X}$	kolekcja obiektów A_x indeksowana obiektem X
f, g, h	morfizmy
$\pi_{i_1,...,i_k}$	Projekcja z produktu kartezjańskiego na produkt jego komponentów $i_1, ..., i_k$
$\iota_{i_1,...,i_k}$	Koproduktowe włożenie komponentów $i_1, ..., i_k$
$\widehat{f}$	część włóknowa f po pominięciu indeksowania
$\widetilde{f}$	przeindeksowany morfizm f
K, N, M	zbiory, lub kategorie dyskretne
F, G, H	funktory
Δ	morfizm/funktor diagonalny
α, β, γ	naturalne transformacje
Set	kategoria małych zbiorów i funkcji
FinSet	kategoria skończonych zbiorów i funkcji
Cat	2-kategoria małych kategorii, funktorów i naturalnych transformacji
p-**Cat**	2-kategoria p-relatywnych kategorii, funktorów i naturalnych transformacji (patrz twierdzenie 1.3)
$\mathbb{C}$-**Cat**	2-kategoria $\mathbb{C}$-wzbogaconych kategorii, funktorów i naturalnych transformacji

$\mathbf{Cat}_{\mathbb{C}}$	2-kategoria $\mathbb{C}$-wewnętrznych kategorii, funktorów i naturalnych transformacji
Fib	2-kategoria rozwłóknień, kartezjańskich funktorów i naturalnych transformacji
$\mathbb{C}^{\mathbb{D}}$	kategoria funktorów $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ i naturalnych transformacji
$\mathbb{C}^{\rightarrow}$	kategoria strzałkowa kategorii $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}_A$	włókno kategorii $\mathbb{C}$ nad obiektem A
$\mathbb{C}/A$	płat kategorii $\mathbb{C}$ nad obiektem A
$A/\mathbb{C}$	kopłat kategorii $\mathbb{C}$ pod obiektem A
$\langle \mathbb{C}, \otimes, I \rangle$	kategoria monoidalna $\mathbb{C}$ z tensorem $\otimes$ i jedynką I (patrz definicja A.1.1)
$fam_p(\mathbb{C})\colon Fam_p(\mathbb{C}) \to \mathbb{B}$	eksternalizacja p-relatywnej kategorii $\mathbb{C}$ (patrz definicja w rozdziale 1.5)
$fam_{\mathbb{B}}(\mathbb{C})\colon Fam_{\mathbb{B}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{B}$	zewnętrzne rozwłóknienie kategorii $\mathbb{C}$ wewnętrznej względem $\mathbb{B}$ (patrz definicja A.2.9)
$fam(\mathbb{C})\colon Fam(\mathbb{C}) \to \mathbf{Set}$	zewnętrzne rozwłóknienie klasycznej kategorii $\mathbb{C}$
$cod(\mathbb{B})\colon \mathbb{B}^{\rightarrow} \to \mathbb{B}$	wewnętrzne rozwłóknienie kategorii z pullbackami $\mathbb{B}$ (patrz definicja A.2.10)
$sub(\mathbb{B})\colon Sub(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$	wewnętrzna logika kategorii z pullbackami $\mathbb{B}$ (patrz definicja A.2.11)
$F \rightleftharpoons G$	sprzężenie funktorów F i G
$Hom(A, B)$	obiekt morfizmów $A \longrightarrow B$

Wstęp

Myśli chodzą po głowie
mówi wyrażenie potoczne
wyrażenie potoczne
przecenia ruch myśli
większość z nich
stoi nieruchomo
pośrodku nudnego krajobrazu
szarych pagórków
wyschłych drzew
czasem dochodzą
do rwącej rzeki cudzych myśli
stają na brzegu
na jednej nodze
jak głodne czaple
ze smutkiem
wspominają wyschłe źródła
kręcą się w kółko
w poszukiwaniu ziaren
nie chodzą
bo nie zajdą
nie chodzą
bo nie ma dokąd
siedzą na kamieniu
załamują ręce
pod chmurnym
niskim
niebem
czaszki

— Zbigniew Herbert, „Pan Cogito a ruch myśli"

Czasami można odnieść wrażenie, że niektórzy ludzie, choć zajmują się — i z przeszło ćwierć wieku nawet — daną dziedziną, choć uchodzą w danej dziedzinie za ekspertów i choć od ponad ćwierćwiecza wnoszą naukawy wkład do danej dziedziny, tak naprawdę owej dziedziny w ogóle „nie czują". Wyglądają jak głodne czaple z obrazów Zbigniewa Herberta — biedne zagubione stworzonka, które choć dawno już przemierzyły wszystkie możliwe drogi, nigdy nie zdobyły się na tyle odwagi, aby wychylić choćby łapkę spoza dobrze wydeptanych szlaków. Zapytaj takiego stworzonka „Dokąd prowadzi ta ścieżka?", a zrobi zdziwioną minę, wzruszy ramionami i odburknie „Nigdy się nad tym nie zastanawiałem.", „Dlaczego pytasz?",

„Czemu to pytanie miałoby być w ogóle ciekawe?".

Spotykasz też takich ludzi? Jeżeli nie, to ten wstęp napisany jest właśnie dla Ciebie.

Kiedy możemy powiedzieć, że posiedliśmy dane pojęcie? Kiedy znamy jego definicję; kiedy je rozumiemy; w końcu, kiedy komfortowo jesteśmy w stanie poruszać się w jego obrębie? Mało! Przecież nawet ślepi są w stanie wygodnie poruszać się w obrębie własnego miasta. Mamy prawo mówić, że posiedliśmy daną rzecz, jeżeli możemy bez obawy położyć na niej ręce — w dowolnym miejscu, nie martwiąc się, że coś zniszczymy, czy zepsujemy; jeżeli możemy modyfikować daną rzecz i dostosowywać do własnych potrzeb. Posiadanie pojęcia to nie tylko zdawanie sobie spraw z konsekwencji płynących z samej definicji, ale także z pewnych jego *niedefinicji* — rozumienie dlaczego definicyjny skalpel został poprowadzony we właśnie taki i dokładnie taki sposób.

Niech X będzie Twoim ulubionym pojęciem (np. pojęciem przestrzeni topologicznej, przestrzeni wektorowej, grupy, monoidu, teorii mnogości, jakiejś szczególnej logiki). Jak doskonale wiesz, X zdefiniowane jest w algebraiczny sposób — wyspecyfikowany mamy bardzo konkretny język, a wyrażenia języka stanowią tematy aksjomatów. Oczywiście jesteś w stanie bezproblemowo powiedzieć, jaki jest sens każdej z osobna operacji definiującej język i obudzony w środku najczarniejszej nocy, o każdym z przyjętych aksjomatów wygłosić wielogodzinny referat. Dla formalności więc tylko dopowiem, choć bez wątpienia jest to zupełnie jasne, że w definicji X siedzą nie tylko stwierdzenia specyficzne dla X, ale też ogólne, precyzujące pewną część otaczającego X świata. Siedzi tam teoria mnogości, która kiedy rzucimy „X to zbiór z nast...", mówi nam co „zbiór" oznacza. I siedzi tam też niejawnie metalogika, w której X'owe aksjomaty są zanurzone. Pewnie nawet sensowniej byłoby rozdzielić definicję X na dwie części: S_X — tę specyficzną dla X i M — tę ogólną, wspólną dla wielu pojęć; wtedy też możemy poszczycić się opracowaniem równania $X = S_X + M$, albo jeszcze lepiej $X(M) = S_X + M$, dla podkreślenia, że faktyczne pojęcie X zależy od konkretnego meta-świata. Teraz jeżeli podmienimy metalogikę z klasycznej na intuicjonistyczną I, to otrzymamy pojęcie intuicjonistyczne $X(I)$. A jeżeli dodatkowo jeszcze podmienimy teorię mnogości z klasycznej *ZFC* na, powiedzmy, konstruktywną Aczela *CZF*, to otrzymamy konstruktywne $X(I_{CZF})$. Mało tego, dla wielu X wystarczą nam o wiele słabsze meta-systemy niż teoria mnogości i niż pełna logika pierwszego rzędu. Np. pojęcie grupy możemy interpretować w dowolnej kategorii ze skończonymi granicami — przyjmując kolejno za składową M: przestrzenie topologiczne, gładkie rozmaitości i monoidy, otrzymujemy odpowiednio pojęcia: grupy topologicznej, grupy Liego i grupy abelowej. Potrafisz powiedzieć, jak zmienia się Twoje pojęcie X podczas przemieszczania się pomiędzy różnymi meta-światami? Jaki sens ma X w oderwaniu od otaczających meta-światów?

Te pytania nie są tylko testem na (nie)posiadanie pojęcia X. One są pytaniami o *sensowność* X. Jeżeli chcemy mieć formalnie zdefiniowane X, musimy mieć także formalnie zdefiniowane meta-pojęcia X'a. Jednak do wysłowienia meta-pojęć potrzebujemy meta-meta-pojęć. I obojętnie jak bardzo pracowici byśmy nie byli, zabawę w meta^i-specyfikację musimy w końcu, na którymś z rzędu meta^n-poziomie, zakończyć. Tak więc, nasz definicyjny skalpel *nigdy* nie tnie z chirurgiczną precyzją pojęcia $X(M)$, a zostawia pewną otoczkę $X(M+\Delta M)$. Gdyby teraz się okazało, że dla „małych" ΔM otrzymujemy „duże" zmiany $\Delta X(M)$ w samym pojęciu, oznaczałoby to, że pojęcie X jest *źle* zdefiniowane (źle uwarunkowane).[1]

[1]Dokładnie tak samo jak w analizie numerycznej nie powinniśmy spodziewać się otrzymania sensownych wyników rozwiązując źle uwarunkowane problemy, tak samo tutaj nie powinniśmy się spodziewać sensownych

Chyłkiem udało nam się na razie przemknąć nad jeszcze jednym aspektem. Otóż, parametryzacja $X(M)$ nie tyle dotyczy samej istoty pojęcia X, co pewnej konkretnej jego *specyfikacji*. Jeżeli wybierzemy różne specyfikacje dla X, to najczęściej doprowadzą nas one do *różnych* parametryzacji $\hat{X}(\hat{M}) = \hat{S}_X + \hat{M}$ i $\dot{X}(\dot{M}) = \dot{S}_X + \dot{M}$, gdzie nawet zbiory parametrów $\hat{M}$ i $\dot{M}$ mogą przebiegać najzupełniej różne dziedziny. Tak dzieje się w przypadku pojęcia kategorii — istnieją dwie standardowe parametryzacje tego pojęcia — kategorie wzbogacone strukturą monoidalną i kategorie wewnętrzne względem innej, dostatecznie bogatej, kategorii. Naturalnym odruchem w takiej sytuacji jest szukanie dodatkowej parametryzacji, obejmującej i unifikującej te znane. Nie zawsze jest to czynnością mechaniczną, czy prostą, a czasami wręcz piekielnie trudną. Niniejsza praca jest pierwszym krokiem w stronę zrozumienia związków zachodzących pomiędzy różnymi parametryzacjami pojęcia kategorii.

Prospectus

Dość dobrze znany jest fakt mówiący o nieistnieniu teoriomnogościowych modeli dla polimorfizmu wyższego rzędu [Rey84]. Trochę słabiej, mówiący, że owe nieistnienie dotyczy wyłącznie klasycznego uniwersum otoczonego klasyczną logiką.

Pod koniec lat 80-tych Andrew Pitts pokazał, że można zbudować naturalne teoriomnogościowe modele dla polimorfizmu w nieklasycznych teoriach mnogości z nieklasyczną wewnętrzną logiką [Pitt87]. Niebagatelną rolę w jego pracach odegrała teoria kategorii. Okazuje się bowiem, że tak sam ten problem, jak i jego rozwiązanie, można zanurzyć w świecie teorii kategorii pytając o istnienie kategorii o pewnych własnościach relatywnie w odniesieniu do innej kategorii (głównie w odniesieniu do elementarnego toposu, przez co właśnie rozumiemy formalizację pojęcia „teoria mnogości"). Tego typu kategorie, istniejące relatywnie w odniesieniu do innych kategorii, nazywamy kategoriami wewnętrznymi.

Istnieje jeszcze inny sposób na odejście od klasycznej teorii mnogości. Jest to pojęcie kategorii wzbogaconej pewną strukturą monoidalną. Zgrubnie rzecz ujmując, często okazuje się, że morfizmy o wspólnej dziedzinie i kodziedzinie tworzą inną strukturę niż tylko klasyczny zbiór. Np. zbiór przekształceń liniowych $Lin(V, W)$ jest przede wszystkim przestrzenią liniową; zbiór funkcji ciągłych $[A, B]$ dla A, B będących *cpo* jest też *cpo*; ogólnie, w dowolnej kategorii kartezjańsko domkniętej strukturą morfizmów są obiekty z samej kategorii. Ten szczególny fakt jest wykorzystywany w modelowaniu obliczeń „bez terminacji", gdzie istnienie na zbiorach morfizmów niestandardowej struktury jest sprawą kluczową (np. dla kategoryjnych modeli PCF).

Celem niniejszej pracy jest zbadanie związków zachodzących pomiędzy tymi dwoma uogólnieniami pojęcia kategorii. Zaproponujemy pewien elastyczny szkielet, w którym będzie można w prosty sposób wyrazić zarówno pojęcie kategorii wzbogaconych jak i wewnętrznych. Otrzymamy ogólną parametryzację, której ukonkretnienia będziemy nazywać kategoriami relatywnymi. Zbadamy podstawowe własności kategorii relatywnych i za ich pomocą pokażemy „globalne aproksymacje" pomiędzy światami kategorii wzbogaconych i wewnętrznych. Doprowadzi to też do sformułowania algebraicznej własności kategorii bycia „quasiekstensywną", która to własność okaże się dokładnie charakteryzować istnienie rzeczonych aproksymacji.

Praca zorganizowana jest następująco. W rozdziale 1 wprowadzone zostaje pojęcie monoidalnego rozwłóknienia i kategorii relatywnych względem monoidalnego rozwłóknienia nad

wyników pracując ze źle uwarunkowanymi pojęciami.

kartezjańską bazą. Wprowadzamy definicję monoidalnego rozwłóknienia w możliwie najogólniejszej postaci i badamy jego podstawowe własności. W szczególności pokazujemy, jak struktura monoidalna zadana na samych włóknach rozciąga się na całe rozwłóknienie. Te wyniki służą dalej zdefiniowaniu pojęć relatywnej kategorii, funktora i naturalnej transformacji względem monoidalnego rozwłóknienia nad kartezjańską bazą i dowodu tworzenia 2-kategorii przez te pojęcia. Rozdział ten zamykamy wprowadzeniem ogólnego procesu eksternalizacji kategorii relatywnej, podając zaskakujący związek pomiędzy eksternalizacją kategorii wewnętrznej z konstrukcją kategorii podkładowej kategorii wzbogaconej. Rozdział 2 bada związki pomiędzy kategoriami wewnętrznymi względem danej kategorii ze skończonymi granicami, a kategoriami wzbogaconymi tę samą kategorią. Wykorzystujemy tutaj wprowadzone w rozdziale 1 uniwersum kategorii relatywnych — badamy aproksymacje pomiędzy monoidalnymi rozwłóknieniami dla kategorii wewnętrznych i wzbogaconych. Stawiamy kolejno trzy twierdzenia charakteryzacyjne istnienia takich aproksymacji w zależności od algebraicznych własności kategorii skończenie zupełnych. Wprowadzamy przy tym i badamy własności kategorii „quasiekstensywnych": kategorii $\mathbb{C}$, dla których kanoniczne włożenia $\coprod\colon \mathbb{C}^K \to \mathbb{C}/(\coprod_K 1)$ są kategoryjnymi reflektorami. Na koniec rozdziału ilustrujemy za pomocą kilku konkretnych przykładów, jak wyglądają przekształcenia pomiędzy kategoriami wewnętrznymi, a wzbogaconymi. W dodatku A można znaleźć podstawowe pojęcia, definicje i twierdzenia wykorzystywane w pracy. Czytanie tej pracy silnie zalecamy od choć pobieżnego przejrzenia tego dodatku.

Konwencje notacyjne

Wzdłuż całej pracy przyjmiemy następujące konwencje notacyjne. Kategorie o nazwach jednoznakowych będziemy oznaczali wielkimi rozszerzonymi literami $\mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$. Kategorie o nazwach wieloznakowych pogrubionymi literami **Set**, **Top**, **Cat**. Zazwyczaj obiekty oznaczamy początkowymi i końcowymi wielkimi literami alfabetu łacińskiego A, B, C, X, Y, Z, funktory F, G, H, a morfizmy małymi f, g, h. Fakt, że morfizm f ma dziedzinę A i kodziedzinę B zapisujemy $f\colon A \to B$. Obiekt wszystkich morfizmów z A do B oznaczamy $Hom(A, B)$. Małe litery greckiego alfabetu α, β, γ zarezerwowane są dla naturalnych transformacji. A-ty komponent naturalnej transformacji $\alpha\colon F \to G$ oznaczamy przez $\alpha_A\colon F(A) \to G(A)$, a jeżeli nie będzie to powodować konfuzji, także po prostu jako $\alpha\colon F(A) \to G(A)$ — bez żadnego indeksu. Mając ustalone rozwłóknienie $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$, indeksowanie przez obiekt $X \in \mathbb{B}$ obiektu z $\mathbb{C}$ będziemy czasami zapisywali $(A_x)_{x:X}$, albo po prostu A_X, natomiast pełną podkategorię $\mathbb{C}$ wszystkich obiektów indeksowanych przez X jako $\mathbb{C}_X$. Dla morfizmu f, $\widehat{f}$ najczęściej oznacza jego część włóknową, a $\widetilde{f}$ przeindeksowaną wersję, kiedy z kontekstu jasno będą wynikać użyte przeindeksowania. Sprzężenie funktora $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ z funktorem $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ oznaczamy $F \leftrightarrows G$, gdzie F jest lewym, a G prawym sprzężonym. Dla danych kategorii $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$, kategoria $\mathbb{C}^{\mathbb{D}}$ jest kategorią funktorów z $\mathbb{D}$ do $\mathbb{C}$ i naturalnych transformacji. Płatem kategorii $\mathbb{C}$ nad obiektem $A \in \mathbb{C}$ nazywamy kategorię mającą za obiekty morfizmy $f\colon X \to A$, $g\colon Y \to A$ z $\mathbb{C}$ o kodziedzinie A, a za morfizmy $f \longrightarrow g$, morfizmy $h\colon X \to Y$, takie, że $f = g \circ h$, i oznaczamy $\mathbb{C}/A$. Kopłat kategorii $\mathbb{C}$ pod obiektem A jest konstrukcją dualną do płatu kategorii i oznaczamy go $A/\mathbb{C}$.

Jeżeli nie zostało powiedziane inaczej, zakładamy, że wszystkie rysowane diagramy są przemienne.

Rozdział 1

Kategorie relatywne względem monoidalnego rozwłóknienia

Czym są kategorie? Istnieją dwa dobre, ściśle powiązane ze sobą, sposoby wprowadzenia tego pojęcia.[1]

Jeden sposób, to mówienie o kategorii jako o pewnym uogólnieniu grafu. Kategoryjne obiekty odpowiadają wierzchołkom, morfizmy ścieżkom [2], funktory są homomorfizmami grafów, zaś naturalne transformacje homotopiami homomorfizmów. Ściśle rzecz ujmując, w ogólnej sytuacji musimy dopuścić jeszcze możliwość definiowania grafów za pomocą „ścieżek", a nie tylko samych krawędzi; albo równoważnie wraz z grafami wprowadzać niestandardową relację równości na ścieżkach (np. uogólnionym grafem jest zbiór liczb rzeczywistych, w którym istnieje ścieżka, dokładnie jedna, pomiędzy wierzchołkami a i b wtedy i tylko wtedy gdy $a \leq b$; taki graf nie jest generowany przez żaden zbiór krawędzi). Inny sposób, to definiowanie kategorii jako minimalistycznego systemu dedukcyjnego[3]. Wprowadzamy tylko jeden naturalny aksjomat $\frac{}{A \longrightarrow A}$ (identyczność), który mówi „zawsze i w każdej sytuacji jeżeli tylko A jest prawdziwe to A jest prawdziwe"[4] i jedną naturalną regułę $\frac{A \longrightarrow B \quad B \longrightarrow C}{A \longrightarrow C}$ (cięcie), mówiącą „kiedy tylko mamy dwa dowody $A \to B$ i $B \to C$, to możemy je złożyć do dowodu $A \to C$". Przy czym interesuje nas nie tyle samo istnienie dowodów, ale także to, jaki akurat dowód mamy. I za tym konieczne jest powiedzenie przy aksjomatach i regułach istnienie *których* konkretnie dowodów jest gwarantowane:

$$\frac{}{A \xrightarrow{id} A} \qquad\qquad \frac{A \xrightarrow{f} B \quad B \xrightarrow{g} C}{A \xrightarrow{g \circ f} C}$$

Potrzebne nam teraz będą jeszcze pewne naturalne warunki koherencji, mówiące, że składanie z dowodem identycznościowym nie zmienia dowodu i że sam proces składania jest łączny.

Powyższy opis prowadzi do kilku algebraizacji pojęcia kategorii. Jasne jest, że będziemy mieli:

- zbiór wierzchołków/formuł; tu zwany „zbiorem obiektów" i oznaczany *Obj*
- zbiór ścieżek/dowodów; tu zwany „zbiorem morfizmów" i oznaczany *Mor*

[1] Wprowadzenie do teorii klasycznych kategorii można z naleźć w książkach [BaW02, Mac97, Bor94].

[2] Dokładniej — marszrutom, jako, że dopuszczamy możliwość przechodzenia przez dane wierzchołki wielokrotnie.

[3] Zobacz też [LaS88].

[4] Aksjomaty to reguły, które nie mają jakichkolwiek przesłanek. W tym duchu moglibyśmy aksjomat identycznościowy przeczytać „zawsze z A możemy udowodnić A".

- operację „identyczność", oznaczaną id, przyporządkowującą obiektom morfizmy
- operację „złożenie", oznaczaną $comp$, przyporządkowującą parom „kompatybilnych" morfizmów morfizm.

Zajmijmy się samym złożeniem (rozważania nt. identyczności są analogiczne) — jak zakodować w algebrze warunek „kompatybilności"? Istnieją generalnie dwa wyjścia:

- dodać do algebry operacje $dom, cod\colon Mor \to Obj$ i:
  - złożenie zdefiniować jako operację częściową[5] $comp\colon Mor \times Mor \to Mor$, a odpowiednie warunki „kompatybilności" zawrzeć w aksjomatach, tj.: $\forall_{f,g \in Mor}\, cod(f) = dom(g) \Rightarrow comp(f,g)\downarrow$, albo
  - złożenie zdefiniować jako operację całkowitą $comp\colon Mor \times_{Obj} Mor \to Mor$, gdzie $Mor \times_{Obj} Mor$ nie jest pełnym iloczynem kartezjańskim, a tylko jego podzbiorem tych elementów $\langle f, g\rangle$, które spełniają $cod(f) = dom(g)$
- podzielić morfizmy na rodziny niezależnych nośników $hom(A,B)$ indeksowanych parami obiektów; dla każdej trójki obiektów A, B, C zdefiniować osobne operacje składania $comp_{A,B,C}\colon Hom(A,B) \times Hom(B,C) \to Hom(A,C)$

Wyrwanie tych formalizacji z konkretnej meta-teorii zadaje dwa *różne* pojęcia kategorii — pojęcie kategorii wewnętrznej i, odpowiednio, wzbogaconej[6]. W kategoriach wewnętrznych uzmienniana jest struktura *wszystkich* morfizmów i *wszystkich* obiektów, ale powiedzenie czym jest „para" morfizmów nie ulega zmianie (wyrażenie warunku $cod(f) = dom(g)$ wymaga „produktowej" operacji). Natomiast w kategoriach wzbogaconych, uzmienniana jest każda struktura morfizmów $Hom(A,B)$ o wspólnej dziedzinie i wspólnej kodziedzinie i abstrahujemy od konkretnej kartezjańskiej „pary" elementów, aż do dowolnej operacji monoidalnej. Zauważmy jeszcze, że w drugim podejściu samo pojęcie „obiektów" staje się zewnętrzne względem algebry. Na gruncie kategoryjnym różnice pomiędzy dwoma przyjętymi formalizmami łatwo jest wytłumaczyć — w kategoriach wzbogaconych morfizmy „indeksowane" są zawsze klasycznymi zbiorami (pojęcie indeksowania jest tu zewnętrzne względem algebry), podczas gdy w kategoriach wewnętrznych morfizmy są indeksowane elementami z nośnika obiektów i kiedy tylko zmieniamy strukturę na obiektach, przechodząc z jednej meta-teorii do innej, od razu zmienia się także sam sposób indeksowania (pojęcie indeksowania jest tu wewnętrzne względem algebry). Ta obserwacja nasuwa pomysł wyekstrahowania aspektu „indeksowania" i opisania niezależnie jako osobnego bytu.

W tym rozdziale zbudujemy ogólne uniwersum umożliwiające opisanie w jednolity i zuniformizowany sposób tzw. kategorii relatywnych, które obejmują zarówno kategorie wzbogacone, jak i kategorie wewnętrzne.

1.1. Monoidalne rozwłóknienia

Rozwłóknienie to kategoryjna abstrakcja „indeksowanej kolekcji". Operacja monoidalna to kategoryjna abstrakcja „rozmytej pary" obiektów. Monoidalne rozwłóknienie ma pełnić rolę zdrowego połączenia tych dwóch pojęć — stworzyć uniwersum, w którym będzie można mówić zarówno o „rozmytych parach" jak i o „indeksowaniu". Tylko wcale nie jest jasne,

[5] Równoważnie — doprządz do algebry element $\perp$ symbolizujący nieokreśloność.

[6] Patrz też dodatek A.

czym właściwie takie monoidalne rozwłóknienie powinno być. Chcemy mówić o „parach kolekcji”, czy o „kolekcjach par”? Jeżeli o „parach kolekcji”, to czy obie składowe pary mogą być w dowolnie różny sposób indeksowane? Jak indeksowane? I w jaki sposób powinny ze sobą interferować struktury monoidalna z rozwłóknieniową?

Istnieje wiele różnych, nie do końca równoważnych, podejść do mówienia o monoidalnych rozwłóknieniach. Najprostszą ideę otrzymamy przypominając sobie, że rozwłóknienia nad ustaloną kategorią bazową $\mathbb{B}$ wraz z kartezjańskimi funktorami i naturalnymi transformacjami są równoważne kategoriom wewnętrznym względem toposu $\mathbf{Set}^{\mathbb{B}^{op}}$ — skoro klasyczne kategorie monoidalne odpowiadają „rozluźnionym” monoidom względem kategorii klasycznych kategorii **Cat**, to monoidalne rozwłóknienia powinny odpowiadać „rozluźnionym” monoidom względem kategorii $\mathbf{Set}^{\mathbb{B}^{op}}$-wewnętrznych kategorii, czyli $\mathbf{Fib}_{\mathbb{B}}$.

Definicja 1.1.1 (Ścisłe monoidalne rozwłóknienie ze ścisłą strukturą monoidalną)**.** Ścisłym monoidalnym rozwłóknieniem ze ścisłą strukturą monoidalną nazywamy monoid w kategorii rozwłóknień $\mathbf{Fib}_{\mathbb{B}}$ z operacją monoidalną zadaną przez produkt włóknisty nad $\mathbb{B}$.

Wniosek 1.1.1. *Ściśle monoidalne rozwłóknienie ze ścisłą strukturą monoidalną, to rozwłóknienie, w którym każde włókno ma ścisłą strukturę monoidalną i przeindeksowania są ścisłymi monoidalnymi funktorami — tj. wraz z rozwłóknieniem $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ związane są kartezjańskie funktory $\otimes$ i I:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B} \arrow[rr, "I"] \arrow[dr, "id"'] & & \mathbb{C} \arrow[dl, "p"] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{C} \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr] & & \mathbb{C} \arrow[dl, "p"] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}$$

spełniające monoidalne prawa.

Mając powyższy wniosek możemy zdefiniować monoidalne rozwłóknienia trojako — wymagając, aby przeindeksowania były silnymi, ścisłymi, bądź klasycznymi monoidalnymi funktorami.

Definicja 1.1.2 (Monoidalne rozwłóknienie)**.** Monoidalne rozwłóknienie (odpowiednio silne, ścisłe) to rozwłóknienie podzielone, w którym każde włókno ma strukturę monoidalną, przeindeksowania są monoidalnymi funktorami (odpowiednio silnymi, ścisłymi) i naturalne izomorfizmy koherencyjne z twierdzenia A.2.1 są monoidalne.

Przykład 1.1.1. Niech $\langle \mathbb{C}, \otimes, I \rangle$ będzie kategorią monoidalną. Rozwłóknienie $\mathit{fam}(\mathbb{C})$ jest ścisłym monoidalnym rozwłóknieniem, ze strukturą monoidalną w każdym włóknie indukowaną z $\mathbb{C}$.

Przykład 1.1.2. Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią z pullbackami. Fundamentalne rozwłóknienie $\mathit{cod}(\mathbb{C})$ jest silnym monoidalnym rozwłóknieniem, ze strukturą monoidalną w każdym włóknie indukowaną przez iloczyn kartezjański (produkt włóknisty w $\mathbb{C}$).

Definicja 1.1.3 (Funktor monoidalnych rozwłóknień)**.** Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ i $q\colon \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ będą dwoma monoidalnymi rozwłóknieniami. Silnym (odpowiednio ścisłym) funktorem monoidalnych rozwłóknień $p \longrightarrow q$ nazywamy kartezjański funktor $\langle F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}, L\colon \mathbb{B} \to \mathbb{E} \rangle$ taki, że dla każdego $B \in \mathbb{B}$ obcięcie F do włókna nad B — $F\!\downharpoonright_{\mathbb{C}_B}\colon \mathbb{C}_B \to \mathbb{D}_{L(B)}$ jest silnym (odpowiednio ścisłym) monoidalnym funktorem:

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathbb{C}_B, \otimes^B, I^B \rangle \arrow[r, "F{\restriction}_{\mathbb{C}_B}"] \arrow[d, "p"'] & \langle \mathbb{D}_{L(B)}, \otimes^{L(B)}, I^{L(B)} \rangle \arrow[d, "q"] \\
B \arrow[r, mapsto, "L"] & L(B)
\end{tikzcd}$$

Formalnie, F jest trójką uporządkowaną $\langle \dot{F}, \theta, \xi \rangle$, gdzie θ i ξ są naturalnymi transformacjami:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[r, bend left, "I \circ L"] \arrow[r, bend right, "F \circ I"'] \arrow[r, phantom, "\xi\Downarrow"] \arrow[d, "id"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{B} \arrow[r, "L"] & \mathbb{E}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \times_{\mathbb{B}} \mathbb{C} \arrow[r, bend left, "\otimes \circ (F \times_{\mathbb{B}} F)"] \arrow[r, bend right, "F \circ \otimes"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Downarrow"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{B} \arrow[r, "L"] & \mathbb{E}
\end{tikzcd}$$

1.2. Teoria monoidalnych rozwłóknień

Na potrzeby tego rozdziału zakładamy, że pracujemy w pewnym ustalonym monoidalnym rozwłóknieniu $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$.

Każdy morfizm $h\colon X \to Y$ z kategorii bazowej, możemy podnieść do morfizmu „tensorowych jedynek” $I_h\colon I_X \to I_Y$:

$$\begin{tikzcd}
& h^*(I_Y) \arrow[dr, "lift\ h"] & \\
I_X \arrow[ur, "\xi^h"] \arrow[rr, "I_h"] & & I_Y
\end{tikzcd}$$

gdzie ξ^h jest morfizmem istniejącym z warunku monoidalności przeindeksowań (a jedynym z kartezjańskości *lift* h). Następujące twierdzenie mówi, że taka operacja zachowuje złożenia.

Twierdzenie 1.2.1 (Podnoszenie morfizmu do jedności zachowuje złożenia)**.** *Niech* $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ *będzie monoidalnym rozwłóknieniem. Dla morfizmów* $h\colon X \to Y$ *i* $k\colon Y \to Z$ *z kategorii bazowej zachodzi:* $I_k \circ I_h = I_{k \circ h}$.

Dowód.

$$\begin{tikzcd}
 & & & (k \circ h)^*(I_Z) \arrow[d, equals, "\lambda"'] \arrow[ddrr, bend left, "\mathit{lift}\ k \circ h"] & & \\
 & (3) & & h^*(k^*(I_Z)) \arrow[dr, "\mathit{lift}\ h"] & & (2) \\
 & & h^*(I_Y) \arrow[ur, "h^*(\xi^k)"] \arrow[dr, "\mathit{lift}\ h"] \arrow[rr, phantom, "(1)"] & & k^*(I_Z) \arrow[dr, "\mathit{lift}\ k"] & \\
 & I_X \arrow[ur, "\xi^h"] \arrow[uuurr, bend left, "\xi^{k \circ h}"] & & I_Y \arrow[ur, "\xi^k"] & & I_Z
\end{tikzcd}$$

Diagram (1) jest przemienny z definicji funktora h^*, diagram (2) jest definicją koherencyjnego izomorfizmu λ (patrz twierdzenie A.2.1), a (3) z faktu, że λ jest naturalną transformacją monoidalną, więc zachowuje jedynki. □

Pokażemy teraz, jak rozciągnąć monoidalne operacje z włókien na morfizmy leżące nad tymi samymi morfizmami bazowymi. Weźmy dwa morfizmy $f\colon A \to C$ i $g\colon B \to D$ leżące nad wspólnym morfizmem h. Aby obliczyć $f \otimes g\colon A \otimes B \to C \otimes D$ najpierw wyciągamy z f i g część pomijającą przeindeksowania:

$$\begin{tikzcd}
 & h^*(C) \arrow[dr, "\mathit{lift}\ h"] & \\
A \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"] \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & h^*(D) \arrow[dr, "\mathit{lift}\ h"] & \\
B \arrow[ur, dashed, "\overline{g}"] \arrow[rr, "g"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Teraz mając $\overline{f}$ i $\overline{g}$ w jednym włóknie, możemy policzyć ich tensor i „dokleić” pominięte indeksowanie:

$$A \otimes B \xrightarrow{\overline{f} \otimes \overline{g}} h^*(C) \otimes h^*(D) \xrightarrow{\theta_h} h^*(C \otimes D) \xrightarrow{\mathit{lift}\ h} C \otimes D$$

Powinniśmy jeszcze pokazać, że tak zdefiniowana operacja zachowuje złożenia. Najpierw jednak udowodnimy prosty lemat.

Lemat 1.2.2. *Dla dowolnych $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ leżących nad h i k odpowiednio, następ-*

pujący diagram jest przemienny:

$$
\begin{tikzcd}
 & & (k\circ h)^*(C) \arrow[d, equal, "\lambda"'] \arrow[ddrr, bend left, "\textit{lift}\ k\circ h"] & & \\
 & & h^*(k^*(C)) \arrow[dr, "\textit{lift}\ h"] \arrow[l, phantom, "(5)"] \arrow[r, phantom, "(4)"] & & \\
 & h^*(B) \arrow[ur, "h^*(\overline{g})"] \arrow[dr, "\textit{lift}\ h"] \arrow[rr, phantom, "(1)"] \arrow[d, phantom, "(3)"] & & k^*(C) \arrow[dr, "\textit{lift}\ k"] \arrow[d, phantom, "(2)"] & \\
A \arrow[ur, "\overline{f}"] \arrow[rr, "f"] \arrow[uuurr, bend left, "\overline{g\circ f}"] & & B \arrow[ur, "\overline{g}"] \arrow[rr, "g"] & & C
\end{tikzcd}
$$

Dowód. Diagram (1) jest przemienny z definicji funktora h^*, (2) i (3) to definicje $\overline{g}$ i $\overline{h}$ odpowiednio, (4) jest definicją koherencyjnego izomorfizmu λ, natomiast (5) się przemienia, bo cała zewnętrzna ścieżka diagramu (1,2,3,4,5) jest przemienna, zaś $\overline{g\circ f}$ tworzy unikalną faktoryzację $g\circ f$. □

Twierdzenie 1.2.3 (Zachowywanie złożeń przez tensor). *Niech $p\colon \mathbb{C}\to\mathbb{B}$ będzie monoidalnym rozwłóknieniem. Dla morfizmów $f_1\colon A\to C$, $g_1\colon B\to D$ leżących nad $h\colon X\to Y$ i $f_2\colon C\to E$, $g_2\colon D\to F$ leżących nad $k\colon Y\to Z$ zachodzi $(f_2\otimes g_2)\circ(f_1\otimes g_1) = (f_2\circ g_2)\otimes(f_1\circ g_1)$.*

Dowód.

$$
\begin{tikzcd}
 & (k\circ h)^*(E)\otimes(k\circ h)^*(F) \arrow[rrrr, "\theta^{k\circ h}"] \arrow[d, equal, "\lambda\otimes\lambda"'] \arrow[rrrr, phantom, "(1)"', shift right=3ex] & & & & (k\circ h)^*(E\otimes F) \arrow[d, equal, "\lambda"'] \arrow[dddr, bend left, "\textit{lift}\ k\circ h"] & \\
 & h^*(k^*(E))\otimes h^*(k^*(F)) \arrow[rr, "\theta^h"] \arrow[rrrr, bend left, "\theta^{h^*\circ k^*}"] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & & h^*(k^*(E)\otimes k^*(F)) \arrow[rr, "h^*(\theta^k)"] \arrow[dr, "\textit{lift}\ h"] \arrow[drr, phantom, "(4)"] \arrow[u, phantom, "(2)"] & & h^*(k^*(E\otimes F)) \arrow[d, "\textit{lift}\ h"'] \arrow[dr, phantom, "(6)"] & \\
 & h^*(C)\otimes h^*(D) \arrow[u, "h^*(\overline{f_2})\otimes h^*(\overline{g_2})"'] \arrow[r, "\theta^h"'] & h^*(C\otimes D) \arrow[ur, "h^*(\overline{f_2}\otimes\overline{g_2})"] \arrow[dr, "\textit{lift}\ h"'] \arrow[rr, phantom, "(3)"] & & k^*(E)\otimes k^*(F) \arrow[r, "\theta^k"'] & k^*(E\otimes F) \arrow[dr, "\textit{lift}\ k"'] & \\
A\otimes B \arrow[ur, "\overline{f_1}\otimes\overline{g_1}"'] \arrow[uuur, bend left, "\overline{f_2\circ f_1}\otimes\overline{g_2\circ g_1}"] \arrow[uu, phantom, "(7)"] & & & C\otimes D \arrow[ur, "\overline{f_2}\otimes\overline{g_2}"'] & & & E\otimes F
\end{tikzcd}
$$

Diagram (1) jest przemienny, bo λ jest monoidalną naturalną transformacją, (2) to definicja $\theta^{h^*\circ k^*}$, (3) i (4) przemieniają się wprost z definicji funktora h^*, (5) z naturalności θ^h, (6) jest definicją koherencyjnego izomorfizmu λ, zaś (7) z lematu 1.2.2 i funktorialności tensora. □

Okazuje się, że także izomorfizmy łączności tensora i tensorowej jedynki zachowują swą naturalność pomiędzy włóknami.

Twierdzenie 1.2.4 (Międzywłóknowa naturalność monoidalnej łączności i jedności)**.** *Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie monoidalnym rozwłóknieniem, w którym trzy morfizmy $f\colon A \to A'$, $g\colon B \to B'$, $h\colon C \to C'$ leżą nad wspólnym morfizmem bazowym $k\colon X \to Y$. Następujące diagramy są przemienne:*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\alpha^X_{A,B,C}"] \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"'] & A \otimes (B \otimes C) \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"] \\
(A' \otimes B') \otimes C' \arrow[r, "\alpha^Y_{A',B',C'}"'] & A' \otimes (B' \otimes C')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l^{X\,-1}_A"] \arrow[d, "f"'] & I_X \otimes A \arrow[d, "k\otimes f"] \\
A' \arrow[r, "l^{Y\,-1}_{A'}"'] & I_Y \otimes A'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r^{X\,-1}_A"] \arrow[d, "f"'] & A \otimes I_X \arrow[d, "f\otimes k"] \\
A' \arrow[r, "r^{Y\,-1}_{A'}"'] & A' \otimes I_Y
\end{tikzcd}$$

Dowód. Zajmiemy się w dowodzie lewą jednością (zarówno dla prawej jedności jak i dla łączności rozumowanie przebiega analogicznie). Rozrysowując definicje morfizmów z diagramu, otrzymujemy:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l^{X\,-1}_A"] \arrow[dd, "\overline{f}"'] & I_X \otimes A' \arrow[d, "id\otimes\overline{f}"] \\
& I_X \otimes f^*(A') \arrow[d, "\xi\otimes id"] \\
f^*(A') \arrow[ur, "l^{X\ \ -1}_{f^*(A')}"] \arrow[dr, "f^*(l^{Y\,-1}_{A'})"] \arrow[dd, "lift\ k"'] & f^*(I_Y) \otimes f^*(A') \arrow[d, "\theta"] \\
& f^*(I_Y \otimes A') \arrow[d, "lift\ k"] \\
B \arrow[r, "l^{Y\,-1}_{A'}"] & I_Y \otimes A'
\end{tikzcd}$$

Górny „kwadrat" jest przemienny z naturalności l^X we włóknie nad X. Dolny to definicja funktora f^*, natomiast środkowa część diagramu jest aksjomatem lewostronnej jedności tegoż funktora. □

Definicja 1.2.1 (Rozwłóknieniowy monoid)**.** Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie monoidalnym rozwłóknieniem. p-monoid to trójka uporządkowana $\langle M, \mu\colon M \otimes M \to M, \eta\colon I \to M\rangle$, gdzie $M \in \mathbb{B}$, zaś μ i η są wertykalnymi morfizmami spełniającymi następujące prawa:

- łączność

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes M) \otimes M \arrow[r, "(id \otimes \mu) \circ \alpha"] \arrow[d, "\mu \otimes id"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\
M \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}$$

- jedynka

$$\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[r, "\eta \otimes id"] \arrow[dr, "l"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] & M \otimes I \arrow[l, "id \otimes \eta"'] \arrow[dl, "r"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Definicja 1.2.2 (Homomorfizm rozwłóknieniowych monoidów)**.** Niech $\mathrm{M} = \langle M, \mu\colon M \otimes M \to M, \eta\colon I \to M\rangle$, $\mathrm{M}' = \langle M', \mu'\colon M' \otimes M' \to M, \eta'\colon I \to M'\rangle$ będą dwoma p-monoidami w pewnym ustalonym monoidalnym rozwłóknieniu $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$. Homomorfizmem monoidów $h\colon \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ nazywamy morfizm $h\colon M \to M'$:

- zachowujący złożenia

$$\begin{tikzcd}
M \otimes M \arrow[r, "h \otimes h"] \arrow[d, "\mu"'] & M' \otimes M' \arrow[d, "\mu'"] \\
M \arrow[r, "h"'] & M'
\end{tikzcd}$$

- zachowujący jedynki

$$\begin{tikzcd}
I_M \arrow[r, "I_h"] \arrow[d, "\eta"'] & I_{M'} \arrow[d, "\eta'"] \\
M \arrow[r, "h"'] & M'
\end{tikzcd}$$

Wniosek 1.2.5. *Ścisłe monoidalne rozwłóknienie ze ścisłą strukturą monoidalną jest rozwłóknieniowym monoidem w monoidalnym rozwłóknieniu rozwłóknień i kartezjańskich funktorów* $fib\colon \mathbf{Fib} \to \mathbf{Cat}$*, gdzie strukturę monoidalną zadaje iloczyn kartezjański (w każdym włóknie).*

1.3. Kategorie relatywne

Naśladując pojęcia kategorii wzbogaconych i wewnętrznych, w tym rozdziale zostaną wprowadzone analogiczne definicje dla kategorii relatywnych względem dowolnego monoidalnego rozwłóknienia nad kategorią z binarnymi produktami.

Ponieważ w dalszej części rozdziału pracować będziemy wyłącznie z rozwłóknieniami podzielonymi — tj. takimi, w których wraz z każdym morfizmem $h\colon X \to Y$ i obiektem B z włókna nad Y związane jest (dowolnie wybrane) kartezjańskie podniesienie *lift* $h\colon h^*(B) \to B$; a zatem mamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy morfizmami $f\colon A \to B$ nad h i morfizmami wertykalnymi $\widehat{f}\colon A \to h^*(B)$ — posłużymy się skrótem notacyjnym $\widehat{f}$ na część wertykalną f i podobnie dla ustalonego h będziemy pisać f na *lift* $h \circ \widehat{f}$. Ponadto, jeżeli z kontekstu jasno będą wynikać użyte przeindeksowania morfizmu f, to jego przeindeksowaną wersję oznaczać będziemy po prostu jako $\widetilde{f}$.

Definicja 1.3.1 (Relatywna kategoria)**.** Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie monoidalnym rozwłóknieniem nad kategorią z binarnymi produktami. p-relatywna kategoria składa się z:

- (kolekcja obiektów) obiektu $C_0 \in \mathbb{B}$,
- (kolekcja morfizmów) obiektu $C_1 \in \mathbb{C}$ nad $C_0 \times C_0$, tj. $p(C_1) = C_0 \times C_0$,
- (składanie) wertykalnego morfizmu $\widehat{\mu}\colon \pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_{23}^*(C_1) \to \pi_{13}^*(C_1)$ nad $C_0 \times C_0 \times C_0$,

$$\begin{tikzcd}
\pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_{23}^*(C_1) \arrow[r, "\widehat{\mu}"] & \pi_{13}^*(C_1) \arrow[r, "lift\ \pi_{13}"] & C_1 \\
& C_0 \times C_0 \times C_0 \arrow[r, "\pi_{13}"] & C_0 \times C_0
\end{tikzcd}$$

- (identyczność) wertykalnego morfizmu $\widehat{\eta}\colon I_{C_0} \to \Delta^*(C_1)$ nad $C_0 \times C_0$,

$$\begin{tikzcd}
I_{C_0} \arrow[r, "\widehat{\eta}"] & \Delta^*(C_1) \arrow[r, "lift\ \Delta"] & C_1 \\
& C_0 \arrow[r, "\Delta"] & C_0 \times C_0
\end{tikzcd}$$

podlegających następującym prawom:

- łączność

$$\begin{tikzcd}
(\pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_{23}^*(C_1)) \otimes \pi_{34}^*(C_1) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\widetilde{\mu}\otimes id"'] & & \pi_{12}^*(C_1) \otimes (\pi_{23}^*(C_1) \otimes \pi_{34}^*(C_1)) \arrow[d, "id\otimes\widetilde{\mu}"] \\
\pi_{13}^*(C_1) \otimes \pi_{34}^*(C_1) \arrow[dr, "\mu"'] & & \pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_{24}^*(C_1) \arrow[dl, "\mu"] \\
& C_1 &
\end{tikzcd}$$

- jedynka

$$\begin{tikzcd}
\pi_{23}^*(C_1) \arrow[r, "l^{-1}"] \arrow[d, "lift\ \pi_{23}"'] & I_{C_0\times C_0\times C_0} \otimes \pi_{23}^*(C_1) \arrow[d, "\widetilde{\eta}\otimes id"] \\
C_1 & \pi_2^*(\Delta^*(C_1)) \otimes \pi_{23}^*(C_1) \arrow[l, "\widetilde{\mu}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_{12}^*(C_1) \arrow[r, "r^{-1}"] \arrow[d, "lift\ \pi_{12}"'] & \pi_{12}^*(C_1) \otimes I_{C_0\times C_0\times C_0} \arrow[d, "id\otimes\widetilde{\eta}"] \\
C_1 & \pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_2^*(\Delta^*(C_1)) \arrow[l, "\widetilde{\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Definicja 1.3.2 (Relatywny funktor)**.** Niech $C = \langle C_0, C_1, \mu^C, \eta^C \rangle$, $D = \langle D_0, D_1, \mu^D, \eta^D \rangle$ będą dwiema p-relatywnymi kategoriami względem pewnego ustalonego monoidalnego rozwłóknienia p. Definiujemy p-relatywny funktor $F\colon C \longrightarrow D$ jako parę morfizmów $\langle F_0\colon C_0 \longrightarrow D_0, \widehat{F_1}\colon C_1 \longrightarrow (F_0 \times F_0)^*(D_1)\rangle$, gdzie $\widehat{F_1}$ jest morfizmem wertykalnym nad $C_0 \times C_0$ i spełnione są następujące prawa:

- zachowywanie złożeń

$$\begin{tikzcd}
\pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_{23}^*(C_1) \arrow[r, "F_1^1\otimes F_1^2"] \arrow[d, "\mu^C"'] & \pi_{12}^*(D_1) \otimes \pi_{23}^*(D_1) \arrow[d, "\mu^D"] \\
C_1 \arrow[r, "F_1"'] & D_1
\end{tikzcd}$$

- zachowywanie identyczności

$$\begin{tikzcd}
I_{C_0} \arrow[r, "I_{F_0}"] \arrow[d, "\eta^C"'] & I_{D_0} \arrow[d, "\eta^D"] \\
C_1 \arrow[r, "F_1"'] & D_1
\end{tikzcd}$$

gdzie $F_1 = (\mathit{lift}\ F_0 \times F_0) \circ \widehat{F_1}$, zaś F_1^1 i F_1^2 są jedynymi faktoryzacjami przez następujące kartezjańskie podniesienia:

$$\begin{tikzcd}
\pi_{12}^*(C_1) \arrow[r, dotted, "F_1^1"] \arrow[d, "\mathit{lift}\ \pi_{12}^C"'] & \pi_{12}^*(D_1) \arrow[d, "\mathit{lift}\ \pi_{12}^D"] \\
C_1 \arrow[r, "F_1"'] & D_1 \\
C_0 \times C_0 \times C_0 \arrow[r, "F_0 \times F_0 \times F_0"] \arrow[d, "\pi_{12}^C"'] & D_0 \times D_0 \times D_0 \arrow[d, "\pi_{12}^D"] \\
C_0 \times C_0 \arrow[r, "F_0 \times F_0"'] & D_0 \times D_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_{23}^*(C_1) \arrow[r, dotted, "F_1^2"] \arrow[d, "\mathit{lift}\ \pi_{23}^C"'] & \pi_{23}^*(D_1) \arrow[d, "\mathit{lift}\ \pi_{23}^D"] \\
C_1 \arrow[r, "F_1"'] & D_1 \\
C_0 \times C_0 \times C_0 \arrow[r, "F_0 \times F_0 \times F_0"] \arrow[d, "\pi_{23}^C"'] & D_0 \times D_0 \times D_0 \arrow[d, "\pi_{23}^D"] \\
C_0 \times C_0 \arrow[r, "F_0 \times F_0"'] & D_0 \times D_0
\end{tikzcd}$$

Lemat 1.3.1. *p-relatywne kategorie wraz z p-relatywnymi funktorami tworzą kategorię p-* **Cat**.

Dowód. Identyczność na kategorii C, to funktor $\langle id_{C_1}, id_{C_0} \rangle$. Złożenie funktora $\langle F_0 \colon C_0 \longrightarrow D_0, \widehat{F_1} \colon C_1 \longrightarrow (F_0 \times F_0)^*(D_1) \rangle$ z funktorem $\langle G_0 \colon D_0 \longrightarrow E_0, \widehat{G_1} \colon D_1 \longrightarrow (G_0 \times G_0)^*(E_1) \rangle$ definiujemy jako $\langle G_0 \circ F_0 \colon C_0 \longrightarrow E_0, \widehat{G_1 \circ F_1} \colon C_1 \longrightarrow ((G_0 \circ F_0) \times (G_0 \circ F_0))^*(E_1) \rangle$. Poprawność definicji składania i łączność składania funktorów wynikają bezpośrednio z twierdzeń 1.2.1 i 1.2.3, a neutralność identyczności jest oczywista. $\square$

Definicja 1.3.3 (Relatywna naturalna transformacja)**.** Mając ustalone monoidalne rozwłóknienie p, p-relatywną transformacją naturalną pomiędzy p-relatywnymi funktorami $F, G \colon C \longrightarrow D$ nazywamy wertykalny morfizm $\widehat{\tau} \colon I_{C_0} \longrightarrow \langle F_0, G_0 \rangle^*(D_1)$ nad C_0 taki, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \arrow[dl, "l^{-1}"'] \arrow[dr, "r^{-1}"] & \\
I_{C_0 \times C_0} \otimes C_1 \arrow[d, "\widetilde{\tau} \otimes \widetilde{G_1}"'] & & C_1 \otimes I_{C_0 \times C_0} \arrow[d, "\widetilde{F_1} \otimes \widetilde{\tau}"] \\
(\langle F_0, G_0 \rangle \circ \pi_1)^*(D_1) \otimes (G_0 \times G_0)^*(D_1) \arrow[d, "(\mathit{cart}\ \langle F_0, G_0 \rangle \times G_0) \otimes (\mathit{cart}'\ \langle F_0, G_0 \rangle \times G_0)"'] & & (F_0 \times F_0)^*(D_1) \otimes (\langle F_0, G_0 \rangle \circ \pi_2)^*(D_1) \arrow[d, "(\mathit{cart}\ F_0 \times \langle F_0, G_0 \rangle) \otimes (\mathit{cart}'\ F_0 \times \langle F_0, G_0 \rangle)"] \\
\pi_{12}^*(D_1) \otimes \pi_{23}^*(D_1) \arrow[dr, "\mu"] & & \pi_{12}^*(D_1) \otimes \pi_{23}^*(D_1) \arrow[dl, "\mu"'] \\
& D_1 &
\end{tikzcd}$$

gdzie przeindeksowania z lewej części diagramu zdefiniowane są wzdłuż następujących morfizmów (*cart* i *cart'* to jedyne kartezjańskie faktoryzacje):

$$
\begin{tikzcd}
(\langle F_0, G_0\rangle \circ \pi_1)^*(D_1) \arrow[d, "cart\ \langle F_0,G_0\rangle\times G_0"] \arrow[dl, "lift\ \langle F_0,G_0\rangle\ \circ\pi_1"'] & & (G_0 \times G_0)^*(D_1) \arrow[d, "cart'\ \langle F_0,G_0\rangle\times G_0"'] \arrow[dr, "lift\ G_0\times G_0"] & \\
D_1 & \pi_{12}^*(D_1) \arrow[l, "lift\ \pi_{12}"] & \pi_{23}^*(D_1) \arrow[r, "lift\ \pi_{23}"'] & D_1
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & C_0 \times C_0 \arrow[dl, "\langle F_0,G_0\rangle\ \circ\pi_1"'] \arrow[d, "\langle F_0,G_0\rangle\times G_0"] \arrow[dr, "G_0\times G_0"] & \\
D_0 \times D_0 & D_0 \times D_0 \times D_0 \arrow[l, "\pi_{12}"] \arrow[r, "\pi_{23}"'] & D_0 \times D_0
\end{tikzcd}
$$

i podobnie z prawej.

Lemat 1.3.2 (Wertykalne złożenie)**.** *Niech $F, G, H\colon C \to D$ będą trzema równoległymi relatywnymi funktorami, a $\beta\colon F \to G, \gamma\colon G \to H$ dwiema transformacjami naturalnymi jak na rysunku:*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "F"] & D \\
C \arrow[r, "G"] & D \\
C \arrow[r, "H"'] & D
\arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\Downarrow\beta"]
\arrow[from=2-1, to=3-2, phantom, "\Downarrow\gamma"]
\end{tikzcd}
$$

Istnieje naturalna transformacja $\beta \circ \gamma\colon F \to G$, nazywana „wertykalnym złożeniem β z γ", zadana jako morfizm:

$$
\begin{tikzcd}
I_{C_0} \arrow[d, "l^{-1}=r^{-1}"] \\
I_{C_0} \otimes I_{C_0} \arrow[d, "\widetilde{\beta}\otimes\widetilde{\gamma}"] \\
\langle F_0, G_0\rangle^*(D_1) \otimes \langle G_0, H_0\rangle^*(D_1) \arrow[d, "cart\ \langle F_0,G_0,H_0\rangle\otimes cart'\ \langle F_0,G_0,H_0\rangle"] \\
\pi_{12}^*(D_1) \otimes \pi_{23}^*(D_1) \arrow[d, "\mu"] \\
D_1
\end{tikzcd}
$$

gdzie cart $\langle F_0, G_0, H_0\rangle$ *i cart'* $\langle F_0, G_0, H_0\rangle$ *zdefiniowane są jako kartezjańskie faktoryzacje:*

$$\begin{tikzcd}
 & \langle F_0,G_0\rangle^*(D_1) \arrow[dl, "lift\ \langle F_0,G_0\rangle"'] \arrow[d, "cart\ \langle F_0,G_0,H_0\rangle"] \\
D_1 & \pi_{12}^*(D_1) \arrow[l, "lift\ \pi_{12}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\langle G_0,H_0\rangle^*(D_1) \arrow[d, "cart'\ \langle F_0,G_0,H_0\rangle"'] \arrow[dr, "lift\ \langle G_0,H_0\rangle"] & \\
\pi_{23}^*(D_1) \arrow[r, "lift\ \pi_{23}"'] & D_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C_0 \arrow[dl, "\langle F_0,G_0\rangle"'] \arrow[d, "\langle F_0,G_0,H_0\rangle"] \arrow[dr, "\langle G_0,H_0\rangle"] & \\
D_0 \times D_0 & D_0 \times D_0 \times D_0 \arrow[l, "\pi_{12}"] \arrow[r, "\pi_{23}"'] & D_0 \times D_0
\end{tikzcd}$$

Lemat 1.3.3 (Łączność wertykalnego składania)**.** *Niech* $F, G, H, K\colon C \to D$ *będą czterema równoległymi funktorami, a* $\beta\colon F \to G$, $\gamma\colon G \to H$ *i* $\delta\colon H \to K$ *trzema transformacjami naturalnymi jak na następującym rysunku:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "F"] & D \\
C \arrow[r, "G"] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\Downarrow\beta"] & D \\
C \arrow[r, "H"] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\Downarrow\gamma"] & D \\
C \arrow[r, "K"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\Downarrow\delta"] & D
\end{tikzcd}$$

Wtedy $\beta \circ (\gamma \circ \delta) = (\beta \circ \gamma) \circ \delta$.

Dowód. Rozważmy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & I_{C_0} \arrow[d, "l^{-1}=r^{-1}"'] & \\
 & I_{C_0} \otimes I_{C_0} \arrow[dl, "l^{-1}\otimes id"'] \arrow[dr, "id\otimes r^{-1}"] & \\
(I_{C_0} \otimes I_{C_0}) \otimes I_{C_0} \arrow[d, "(\widetilde{\beta}\otimes\widetilde{\gamma})\otimes\widetilde{\delta}"'] & & I_{C_0} \otimes (I_{C_0} \otimes I_{C_0}) \arrow[d, "\widetilde{\beta}\otimes(\widetilde{\gamma}\otimes\widetilde{\delta})"'] \\
(\pi_{12}^*(D_1) \otimes \pi_{23}^*(D_1)) \otimes \pi_{34}^*(D_1) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\widetilde{\mu}\otimes id"'] & & \pi_{12}^*(D_1) \otimes (\pi_{23}^*(D_1) \otimes \pi_{34}^*(D_1)) \arrow[d, "id\otimes\widetilde{\mu}"] \\
\pi_{13}^*(D_1) \otimes \pi_{34}^*(D_1) \arrow[dr, "\mu"'] & & \pi_{12}^*(D_1) \otimes \pi_{24}^*(D_1) \arrow[dl, "\mu"] \\
 & D_1 &
\end{tikzcd}$$

Górna część diagramu jest przemienna z praw kategorii monoidalnej, natomiast dolna, to dokładnie aksjomat łączności składania morfizmów w relatywnych kategoriach. Teraz zauważmy, że $\widetilde{\mu} \circ (\widetilde{\beta} \otimes \widetilde{\gamma}) \circ (l^{-1} = r^{-1})$ z dokładnością do przeindeksowania jest równe $\widetilde{\beta \circ \gamma}$ wziętego z definicji złożenia wertykalnego. Zatem z koherencji rozwłóknienia, cała lewa ścieżka musi być równa $(\beta \circ \gamma) \circ \delta$ i podobnie argumentując, prawa — $\beta \circ (\gamma \circ \delta)$. □

Lemat 1.3.4 (Wertykalna jedynka)**.** *Niech $F\colon C \to D$ będzie relatywnym funktorem. Istnieje naturalna transformacja $id_F\colon F \to F$, zadana jako część wertykalna następującego morfizmu:*

$$\begin{tikzcd}
I_{C_0} \arrow[r, "\eta"] & C_1 \arrow[r, "F_1"] & D_1 \\
C_0 \arrow[r, "\Delta"] & C_0 \times C_0 \arrow[r, "F_0 \times F_0"] & D_0 \times D_0
\end{tikzcd}$$

będąca elementem neutralnym wertykalnego składania.

Dowód. Lewa strona diagramu naturalności dla id_F jest równa F przez następujący argument — morfizm $\widetilde{id_F} = \widetilde{F} \circ \widetilde{\eta^C}\colon I_{C_0 \times C_0} \to \pi_{12}^*(D_1)$ jest równy morfizmowi $\widetilde{\eta^D} \circ I_{F_0 \times F_0}\colon I_{C_0 \times C_0} \to \pi_{12}^*(D_1)$ z warunku zachowywania identyczności funktora F i koherencji przeindeksowań; tensorując $I_{F_0 \times F_0}$ z F, a $\widetilde{\eta^D}$ z $\widetilde{id}$ i odpowiednio przeindeksowując morfizmy, możemy skorzystać z aksjomatu lewej identyczności dla kategorii relatywnych. Podobna argumentacja gwarantuje, że prawa strona diagramu naturalności dla id_F jest także równa F.

Dla pokazania (lewostronnej; argumentacja dla prawej strony jest symetryczna) neutralności id_F weźmy dowolną naturalną transformację $\tau\colon F \to G$ i rozważmy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & I_{C_0} \arrow[d, "I_\Delta"'] \\
I_{C_0 \times C_0 \times C_0} \otimes I_{C_0 \times C_0 \times C_0} \arrow[d, "I_{F_0 \times F_0 \times G_0} \otimes \widetilde{\tau}"'] & I_{C_0 \times C_0 \times C_0} \arrow[l, "l^{-1} = r^{-1}"'] \arrow[d, "\widetilde{\tau}"'] \\
I_{D_0 \times D_0 \times D_0} \otimes \pi_{23}^*(D_1) \arrow[d, "\widetilde{\eta} \otimes id"'] & \pi_{23}^*(D_1) \arrow[l, "l^{-1}"'] \arrow[ddl, "lift \pi_{23}"] \\
\pi_{12}^*(D_1) \otimes \pi_{23}^*(D_1) \arrow[d, "\mu"'] & \\
D_1 &
\end{tikzcd}$$

Dolny trójkąt jest aksjomatem lewej jedności kategorii relatywnej, natomiast przemienność kwadratu wynika z naturalności międzywłóknowej l. Zauważmy jeszcze teraz, że także z naturalności międzywłóknowej $l = r$ zachodzi równość $(l^{-1} = r^{-1})_{I_{C_0 \times C_0 \times C_0}} \circ I_\Delta = (I_\Delta \otimes I_\Delta) \circ (l^{-1} = r^{-1})_{I_{C_0}}$. Składając przeindeksowania widzimy, że zewnętrzna lewa ścieżka diagramu jest definicją złożenia $id_F \circ \tau$, natomiast prawa — naturalną transformacją τ. $\square$

Wniosek 1.3.5. *Niech C, D będą dwiema relatywnymi kategoriami. Funktory $C \longrightarrow D$ wraz z naturalnymi transformacjami tworzą kategorię $Hom(C, D)$.*

Definicja 1.3.4 (Horyzontalne złożenie)**.** Niech $F, G\colon C \to D$, $H\colon B \to C$, $K, L\colon D \to E$ będą relatywnymi funktorami, a $\beta\colon F \to G$ i $\gamma\colon K \to L$ dwiema naturalnymi transformacjami względem ustalonego monoidalnego rozwłóknienia, jak na rysunku poniżej:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & E \\
C \arrow[r, "G"'] & D \arrow[r, "K"'] & E
\end{tikzcd}$$

Następujące złożenia, nazywamy złożeniami horyzontalnymi:

- $G \bullet \gamma \overset{def}{=} \gamma \circ I_{G_0}$
- $\beta \bullet H \overset{def}{=} H_1 \circ \beta$
- $\beta \bullet \gamma \overset{def}{=} (\beta \bullet H) \circ (G \bullet \gamma)$

Lemat 1.3.6. *Lewostronne mnożenie przez funktor jest rozdzielne względem wertykalnego składania, tj. mając następujące funktory i naturalne transformacje:*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & D \\
B \arrow[r, "K"] & C \arrow[r, "G"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma"] & D \\
 & C \arrow[r, "H"'] & D
\end{tikzcd}$$

zachodzi $K \bullet (\beta \circ \gamma) = (K \bullet \beta) \circ (K \bullet \gamma)$.

Dowód. Rozpisując definicję wertykalnego złożenia po lewej stronie dostajemy $I_{B_0} \xrightarrow{r^{-1}=l^{-1}} I_{B_0} \otimes I_{B_0} \xrightarrow{I_{K_0} \otimes I_{K_0}} I_{C_0} \otimes I_{C_0}$, a po prawej $I_{B_0} \xrightarrow{I_{K_0}} I_{C_0} \xrightarrow{l^{-1}=r^{-1}} I_{C_0} \otimes I_{C_0}$. Zaś te morfizmy są równe na mocy twierdzenia 1.2.4. $\square$

Lemat 1.3.7. *Prawostronne mnożenie przez funktor jest rozdzielne względem wertykalnego składania, tj. mając następujące funktory i naturalne transformacje:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & D & \\
C \arrow[r, "G"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\gamma"] & D \arrow[r, "K"] & E \\
C \arrow[r, "H"'] & D &
\end{tikzcd}$$

zachodzi $(\beta \circ \gamma) \bullet K = (\beta \bullet K) \circ (\gamma \bullet K)$.

Dowód. Rozważmy diagram, w którym lewa ścieżka jest definicją $(\beta \circ \gamma) \bullet K$, natomiast prawa $(\beta \bullet K) \circ (\gamma \bullet K)$:

$$\begin{tikzcd}
 & I_{C_0} \arrow[d, "l^{-1}=r^{-1}"'] & \\
 & I_{C_0} \otimes I_{C_0} \arrow[dl, "\widetilde{\beta} \otimes \widetilde{\gamma}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\beta \bullet K} \otimes \widetilde{\gamma \bullet K}"] & \\
\langle F_0, G_0 \rangle^*(D_1) \otimes \langle G_0, H_0 \rangle^*(D_1) \arrow[d, "cart \otimes cart'"'] & & \langle K_0 \circ F_0, K_0 \circ G_0 \rangle^*(D_1) \otimes \langle K_0 \circ G_0, K_0 \circ H_0 \rangle^*(D_1) \arrow[d, "cart \otimes cart'"] \\
\pi_{12}^*(D_1) \otimes \pi_{23}^*(D_1) \arrow[rr, "K_1^1 \otimes K_1^2"] \arrow[d, "\mu^D"'] & & \pi_{12}^*(E_1) \otimes \pi_{23}^*(E_1) \arrow[d, "\mu^E"] \\
D_1 \arrow[rr, "K_1"] & & E_1
\end{tikzcd}$$

Dolny diagram jest przemienny z aksjomatu bycia K relatywnym funktorem, natomiast górny, dzięki twierdzeniu 1.2.3 wystarczy, że jest przemienny na obu komponentach tensora, a ta przemienność wynika bezpośrednio z koherencji rozwłóknienia.

□

Lemat 1.3.8. *Złożenia horyzontalne są łączne, tj. dla dowolnych relatywnych funktorów i naturalnych transformacji jak na diagramie poniżej:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & E \arrow[r, "L"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\delta"] & F \\ C \arrow[r, "G"'] & D \arrow[r, "K"'] & E \arrow[r, "M"'] & F \end{tikzcd}$$

zachodzi $(\beta \bullet \gamma) \bullet \delta = \beta \bullet (\gamma \bullet \delta)$

Dowód. Bezpośrednio z definicji horyzontalnego składania i z lematów 1.3.6, 1.3.7 mamy dla lewej strony równości: $(\beta \bullet \gamma) \bullet \delta = (((\beta \bullet H) \circ (G \bullet \gamma)) \bullet L) \circ (G \bullet K \bullet \delta) = (\beta \bullet H \bullet L) \circ (G \bullet \gamma \bullet L) \circ (G \bullet K \bullet \delta)$ i analogicznie dla prawej: $\beta \bullet (\gamma \bullet \delta) = (\beta \bullet H \bullet L) \circ (G \bullet ((\gamma \bullet L) \circ (K \bullet \delta))) = (\beta \bullet H \bullet L) \circ (G \bullet \gamma \bullet L) \circ (G \bullet K \bullet \delta)$ □

Lemat 1.3.9. *Jedynka wertykalna jest zachowywana przez złożenia z funktorami.*

Dowód. Przy oznaczeniach jak w lemacie 1.3.8, bezpośrednio z definicji mamy $id_F \bullet G = G_1 \circ F_1 \circ \eta = id_{G \circ F}$. Podobnie $H \bullet id_F = F_1 \circ \eta \circ I_{H_0}$, korzystając z zachowywania jedności przez funktor H dostajemy $F_1 \circ H_1 \circ \eta = id_{F \circ H}$. □

Wniosek 1.3.10. *Relatywna naturalna transformacja id_{id} jest elementem neutralnym horyzontalnych złożeń.*

Lemat 1.3.11. *Dla dowolnych relatywnych funktorów i naturalnych transformacji jak poniżej:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & E \\ C \arrow[r, "G"'] & D \arrow[r, "K"'] & E \end{tikzcd}$$

zachodzi $(\beta \bullet H) \circ (G \bullet \gamma) = (F \bullet \gamma) \circ (\beta \bullet K)$

Dowód. Po rozpisaniu definicji, lewa strona równości z twierdzenia jest wertykalnym złożeniem $I_{C_0} \xrightarrow{\beta} D_1 \xrightarrow{H_1} E_1$ z $I_{C_0} \xrightarrow{I_{G_0}} I_{D_0} \xrightarrow{\gamma} E_1$, natomiast prawa $I_{C_0} \xrightarrow{I_{F_0}} I_{D_0} \xrightarrow{\gamma} E_1$ z $I_{C_0} \xrightarrow{\beta} D_1 \xrightarrow{K_1} E_1$. Na mocy aksjomatu relatywnej naturalności γ dolne części złożenia, tj. $D_1 \xrightarrow{H_1} E_1$ z $I_{D_0} \xrightarrow{\gamma} E_1$ i $I_{D_0} \xrightarrow{\gamma} E_1$ z $D_1 \xrightarrow{K_1} E_1$ są sobie równe z dokładnością do koherencyjnego izomorfizmu — zatem cały diagram złożeń jest przemienny. □

Lemat 1.3.12 (Prawo wyłączeń). *Dla relatywnych funktorów i naturalnych transformacji jak poniżej:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & D \arrow[r, "K"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & E \\ C \arrow[r, "G"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\delta"] & D \arrow[r, "L"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\zeta"] & E \\ C \arrow[r, "H"'] & D \arrow[r, "M"'] & E \end{tikzcd}$$

zachodzi $(\beta \bullet \gamma) \circ (\delta \bullet \zeta) = (\beta \circ \delta) \bullet (\gamma \circ \zeta)$.

Dowód. Rozpisując lewą stronę otrzymujemy $(\beta \bullet K) \circ (G \bullet \gamma) \circ (\delta \bullet L) \circ (H \bullet \zeta)$, a rozpisując prawą $((\beta \circ \delta) \bullet K) \circ (H \bullet (\gamma \circ \zeta))$, k orzystając z lematów 1.3.6, 1.3.7 o lewo i prawostronnym mnożeniu przez funktor, możemy rozpisać ją dalej jako $(\beta \bullet K) \circ (\delta \bullet K) \circ (H \bullet \gamma) \circ (H \bullet \zeta))$ i ostatecznie stosując lemat 1.3.11 do dwóch środkowych komponentów złożenia $(\beta \bullet K) \circ (G \bullet \gamma) \circ (\delta \bullet L) \circ (H \bullet \zeta)$. □

Twierdzenie 1.3.13. *Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie monoidalnym rozwłóknieniem nad kategorią z binarnymi produktami. Wtedy p-relatywne kategorie p-relatywne funktory i p-relatywne transformacje naturalne tworzą 2-kategorię p-**Cat**.*

Dowód. Wiemy, że p-**Cat** jest kategorią na mocy lematu 1.3.1 i z lematu 1.3.5 że dla dowolnych dwóch relatywnych kategorii C, D, $Hom(C, D)$ jest kategorią. Przy ustalonych kategoriach C, D, E funktorialność złożenia $\bullet\colon Hom(C, D) \to Hom(D, E)$ wynika natychmiast z lematów 1.3.8 i 1.3.9, łączność jest tematem lematu 1.3.12, a neutralność jedynki z wniosku 1.3.10. □

1.4. Przykłady

Twierdzenie 1.4.1. *Niech $\langle \mathbb{C}, \otimes, I\rangle$ będzie kategorią monoidalną. Kategoria $\mathbb{C}$-**Cat** $\mathbb{C}$-wzbogaconych kategorii, funktorów i naturalnych transformacji jest 2-równoważna kategorii $fam(\mathbb{C})$-**Cat**.*

Dowód. Definicje $fam(\mathbb{C})$-relatywnych kategorii, funktorów i naturalnych transformacji są dokładnie definicjami odpowiadających im pojęć $\mathbb{C}$-wzbogaconych. □

Twierdzenie 1.4.2. *Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią z pullbackami. Kategoria $\mathbf{Cat}_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-wewnętrznych kategorii, funktorów i naturalnych transformacji jest 2-równoważna kategorii $cod(\mathbb{C})$-**Cat**.*

Dowód. Cały dowód sprowadza się do pokazania, że definiując kategorie wzbogacane i kategorie relatywne, definiujemy praktycznie to samo, używając różnych języków.

Patrząc na definicje kategorii wewnętrznych (definicja A.4.1) z jednej strony, a kategorii relatywnych (definicja 1.3.1) z drugiej, musimy wykazać, że jeżeli jedna z poniższych kategorii jest dobrze zdefiniowana, to zdefiniowana dobrze jest także druga (wtedy równoważność pojęć dostaniemy z naturalnej odpowiedniości pomiędzy parami morfizmów $C_1 \xrightarrow{dom, cod} C_0$ a morfizmami par $C_1 \xrightarrow{\langle dom, cod\rangle} C_0 \times C_0$):

- $\langle C_0, C_1 \xrightarrow{\langle dom, cod\rangle} C_0 \times C_0, \mu\colon \pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_{23}^*(C_1) \to C_1, \eta\colon I_{C_0} \to C_1\rangle$
- $\langle C_0, C_1 \xrightarrow{dom, cod} C_0, \mu\colon C_2 \to C_1, \eta\colon C_0 \to C_1\rangle$

Do tego wystarczy pokazanie następujących faktów:

- $\pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_{23}^*(C_1) \approx C_2$,
- μ leży nad π_{13},
- $\pi_{12}^*(C_1) \times \pi_{23}^*(C_1) \times \pi_{34}^*(C_1) \approx C_3$,
- $I_{C_0} \approx C_0$,

- η leży nad Δ,

- relatywne aksjomaty dla kategorii są spełnione wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są odpowiadające im aksjomaty dla kategorii wewnętrznych.

Pierwszego z dwóch punktów dowodzi diagram:

$$
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[rr, bend left, squiggly, "\mu"] \arrow[dd, bend right, squiggly, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \pi_{23}^*(C_1) \arrow[r, "j_{23}"] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C_1 \arrow[d, "\langle dom{,}cod\rangle"] \\
\pi_{12}^*(C_1) \arrow[r, "n"] \arrow[d, "j_{12}"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C_0 \times C_0 \times C_0 \arrow[r, "\pi_{23}"] \arrow[d, "\pi_{12}"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C_0 \times C_0 \arrow[d, "\pi_1"] \\
C_1 \arrow[r, "\langle dom{,}cod\rangle"] & C_0 \times C_0 \arrow[r, "\pi_2"] & C_0
\end{tikzcd}
$$

Składając małe pullbacki dostajemy duży pullback, który okazuje się być po prostu C_2. Natomiast leżenie μ nad π_{13} wynika z faktoryzacji:

$$
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[drr, bend left, "\mu"] \arrow[dr, dashed, "\widehat{\mu}"] \arrow[ddr, bend right, "n \circ \pi_1 = m \circ \pi_2"'] & & \\
& \pi_{13}^*(C_1) \arrow[r, "lift\ \pi_{13}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C_1 \arrow[d, "\langle dom{,}cod\rangle"] \\
& C_0 \times C_0 \times C_0 \arrow[r, "\pi_{13}"'] & C_0 \times C_0
\end{tikzcd}
$$

Dla pokazania równoważność aksjomatów złożenia, zauważmy, że C_3 dekomponuje się na dwa pullbacki:

$$
\begin{tikzcd}
C_3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C_2 \arrow[r, "j_{23} \circ \pi_2"] \arrow[d, "j_{12} \circ \pi_1"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C_1 \arrow[d, "dom"] \\
C_2 \arrow[r, "j_{23} \circ \pi_2"'] & C_1 \arrow[r, "cod"'] & C_0
\end{tikzcd}
$$

Kładziemy teraz lewy pullback na szczycie diagramu z początku dowodu, otrzymując:

$$\begin{tikzcd}
\pi_{12}^*(C_1)\otimes\pi_{23}^*(C_1)\otimes\pi_{34}^*(C_1) \arrow[r] \arrow[dd] & \pi_{23}^*(C_1)\otimes\pi_{34}^*(C_1) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{12}^*(C_1)\otimes\pi_{23}^*(C_1) \arrow[d, "\pi_1"] \\
 & \pi_{23}'^*(C_1) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & \pi_{12}^*(C_1) \arrow[d, "j_{12}"] \arrow[dd, bend right, "n"'] \\
\pi_{12}^*(C_1)\otimes\pi_{23}^*(C_1) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[dd, "\pi_1"] & \pi_{23}^*(C_1) \arrow[r, "j_{23}"] \arrow[dd, bend left, "m"] & C_1 \arrow[dd, bend left, "\langle dom, cod\rangle"] \\
 & C_0\times C_0\times C_0\times C_0 \arrow[r, "\pi_{234}"] \arrow[d, "\pi_{123}"] & C_0\times C_0\times C_0 \arrow[d, "\pi_{12}"] \\
\pi_{12}^*(C_1) \arrow[r, "n"] \arrow[d, "j_{12}"] & C_0\times C_0\times C_0 \arrow[r, "\pi_{23}"] \arrow[d, "\pi_{12}"] & C_0\times C_0 \arrow[d, "\pi_1"] \\
C_1 \arrow[r, "\langle dom, cod\rangle"] & C_0\times C_0 \arrow[r, "\pi_2"] & C_0
\end{tikzcd}$$

gdzie wszystkie kwadraty są pullbackami z następującej konstrukcji — możemy myśleć, że zbudowaliśmy $C_0 \times C_0 \times C_0 \times C_0$ jako pullback π_{12} z π_{23}, dalej $\pi_{23}'^*(C_1)$ i $\pi_{23}^*(C_1) \otimes \pi_{34}^*(C_1)$ jako pullback odpowiednio n i $n \circ \pi_1$ wzdłuż π_{234}, a na koniec $\pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_{23}^*(C_1) \otimes \pi_{34}$ jako pullback $\pi_{12}^*(C_1) \otimes \pi_{23}^*(C_1)$ z $\pi_{23}^*(C_1) \otimes \pi_{34}^*(C_1)$. Teraz także ostatni podpunkt staje się oczywisty (aksjomaty są literalnie równoważne). Podpunkt trzeci i czwarty spełnione są na poziomie definicji.

Podobnie wyglądają przekształcenia na funktorach i naturalnych transformacjach.

□

Przykład 1.4.1. Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią z pullbackami. Kategorie $sub(\mathbb{C})$-relatywne odpowiadają zwrotnym i przechodnim binarnym relacjom względem wewnętrznej logiki $\mathbb{C}$.

1.5. Eksternalizacja

Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie monoidalnym rozwłóknieniem nad kategorią z binarnymi produktami i niech $C = \langle C_0, C_1, \mu^C, \eta^C\rangle$ będzie p-relatywną kategorią. Zdefiniujemy teraz rozdzielone rozwłóknienie $fam_p\colon Fam_p(C) \to \mathbb{B}$ będące „eksternalizacją” kategorii C. Nad każdym obiektem $X \in \mathbb{B}$ włókno zadajemy następująco:

- obiekty to morfizmy $x\colon X \to C_0$
- morfizm z obiektu $x\colon X \to C_0$ do obiektu $y\colon X \to C_0$, to morfizm $f\colon I_X \to C_1$ z $\mathbb{C}$ leżący nad $\langle x, y\rangle\colon X \to C_0 \times C_0$
- identyczność nad obiektem x, to morfizm $\eta^C \circ I_x$,
- składanie f leżącego nad $\langle x, y\rangle\colon X \to C_0 \times C_0$ z g leżącym nad $\langle y, z\rangle\colon X \to C_0 \times C_0$ to morfizm $\mu^C \circ (\widetilde{f} \otimes \widetilde{g})$ leżący nad $\langle x, z\rangle\colon X \to C_0 \times C_0$ gdzie $\widetilde{f}$ i $\widetilde{g}$ otrzymujemy z przeindeksowań przez π_{12} i π_{23} odpowiednio.

Morfizmom $k\colon X \to Y$ z $\mathbb{B}$ przypisujemy funktory przeindeksowujące jako postzłożenie $(- \circ k)\colon Fam_p(C)_Y \to Fam_p(C)_X$.

Przykład 1.5.1. Eksternalizacja kategorii C wewnętrznej względem $\mathbb{B}$, jest jej zewnętrznym rozwłóknieniem (definicja A.2.9).

Przykład 1.5.2. Niech $\langle \mathbb{V}, I, \otimes \rangle$ będzie kategorią monoidalną, a C kategorią $\mathbb{V}$-wzbogaconą. Eksternalizacja C, jako $\mathit{fam}(\mathbb{V})$-relatywnej kategorii, jest klasycznym **Set**-indeksowanym rozwłóknieniem kategorii podkładowej C [Kel82] — rozpisując jawnie postać podkładowej kategorii otrzymujemy następujące rozwłóknienie $\mathit{fam}\colon \mathit{Fam}_{\mathbb{V}}(C) \to \mathbf{Set}$:

- obiekty nad zbiorem X, to X-indeksowane kolekcje obiektów z C_0
- morfizm z obiektu $(A_x)_{x:X}$ do obiektu $(B_y)_{y:Y}$, to funkcja $\phi\colon X \to Y$ wraz z rodziną morfizmów $(f_x\colon I \to \mathit{Hom}(A_x, B_{\phi(x)}))_{x:X}$ z $\mathbb{V}$

Rozdział 2

Aproksymacja

Koncepcja kategorii relatywnych pozwala nam dobrze zrozumieć związki zachodzące pomiędzy różnymi uogólnieniami kategorii. Rozważmy prosty przykład — dla skończenie zupełnej kategorii $\mathbb{C}$ dostajemy kategorie $\mathbb{C}$-wzbogacone (produktem binarnym) i $\mathbb{C}$-wewnętrzne. Różnicę pomiędzy tymi pojęciami łatwo jest wytłumaczyć — kategorie wzbogacone mają jako strukturę morfizmów klasyczną **Set**-indeksowaną kolekcję obiektów z $\mathbb{C}$, podczas gdy w kategoriach wewnętrznych struktura morfizmów jest wewnętrzną $\mathbb{C}$-indeksowaną kolekcją obiektów. Oczywiście kolekcje indeksowane zbiorami mogą być „dowolnie bogate" (zbiory nie mają żadnej wewnętrznej struktury, a zatem nie narzucają jakichkolwiek ograniczeń na sposób indeksowania kolekcji) i „dowolnie duże" (do dyspozycji mamy zbiory dowolnie dużej mocy), więc poza przypadkiem $\mathbb{C} = \mathbf{Set}$ nie powinniśmy spodziewać się nie tylko całkowitej unifikacji tych pojęć, ale nawet jakichkolwiek silnych aproksymacji[1]. Jednak sytuacja nie jest aż tak klarowna i jasna. Pod pewnymi warunkami, *niektóre* kolekcje indeksowane klasycznymi zbiorami stają się bowiem generalnie tym samym, co kolekcje indeksowane wewnętrznie. Np. jeżeli kategoria $\mathbb{C}$ posiada wszystkie koprodukty, a dodatkowo te koprodukty są rozłączne i uniwersalne (tak jest np. w każdym toposie Grothendiecka), to mamy możliwość „zlepienia" dowolnej **Set**-indeksowanej kolekcji obiektów do kolekcji $\mathbb{C}$-indeksowanej i późniejszego „rozlepienia" w taki sposób, aby nie zatracić jakichkolwiek informacji o kolekcji wejściowej.

W tym rozdziale przyjrzymy się bliżej takiej sytuacji i przestudiujemy istotę aproksymacji pomiędzy kategoriami $\mathbb{C}$-wzbogaconymi a kategoriami $\mathbb{C}$-wewnętrznymi.

2.1. Funktor globalnych części i koproduktu

Niech $a\colon A \to K$ będzie wewnętrznie indeksowaną kolekcją (tj. kolekcją w rozwłóknieniu $cod(\mathbb{C})$) obiektów z $\mathbb{C}$. Przeciąganie morfizmu a wzdłuż globalnych sekcji odpowiada braniu elementów z A leżących nad „globalnymi" indeksami:

$$\begin{tikzcd} A_x \arrow[r] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "a"] \\ 1 \arrow[r, "x"'] & K \end{tikzcd}$$

[1] Aby lepiej zrozumieć istotę rzeczy, weźmy tak bogatą kategorię jak np. topos zbiorów skończonych **FinSet**. Kategoriami *fam*(**FinSet**)-relatywnymi są wszystkie kategorie o skończonych Hom'ach, podczas gdy *cod*(**FinSet**)-relatywnymi kategoriami są „tylko" wszystkie kategorie skończone. Jest zrozumiałe, że w szczególności dla kategorii dyskretnych dowolnie wielkich mocy nie istnieje żadna naturalna skończona aproksymacja.

Taka operacja rozszerza się do funktora rozwłóknień $G = \langle \mathbb{C}^*(1,-), \mathbb{C}(1,-)\rangle \colon cod(\mathbb{C}) \to fam(\mathbb{C})$, który będziemy nazywać „funktorem globalnych części $\mathbb{C}$”:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{\to} \arrow[r, "\mathbb{C}^*(1,-)"] \arrow[d, "cod(\mathbb{C})"'] & Fam(\mathbb{C}) \arrow[d, "fam(\mathbb{C})"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "\mathbb{C}(1,-)"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

- obiekt $a \colon A \to K$ zostaje przekształcany na kolekcję $(A_x)_{x:\mathbb{C}(1,K)}$
- morfizm $\langle f \colon A \to B, \phi \colon K \to L\rangle$ zostaje przekształcony na kolekcję morfizmów $(f_x \colon A_x \to B_{\Phi\circ x})_{x:\mathbb{C}(1,K)}$ nad $\mathbb{C}(1,K)$

Twierdzenie 2.1.1. *Przy założeniach jak powyżej, G jest kartezjańskim funktorem rozwłóknień monoidalnych.*

Dowód.

$$\begin{tikzcd}
 & B_{\phi\circ x} \arrow[rrd, "\iota_{B_{\phi\circ x}}"] \arrow[dd, "!_{B_{\phi\circ x}}"] & & \\
A_x \arrow[ru, "f_x"] \arrow[rr, "\iota_{A_x}"] \arrow[rd, "!_{A_x}"'] & & A \arrow[r, "f"'] \arrow[dd, "a"] & B \arrow[dd, "b"] \\
 & 1 \arrow[rd, "x"'] \arrow[rrd, "\phi\circ x"] & & \\
 & & X \arrow[r, "\phi"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Aby pokazać, że G jest funktorem kartezjańskim, załóżmy, że przednia ściana $\langle f, b, \phi, a\rangle$ na powyższym rysunku jest pullbackiem. Ponieważ lewa ściana $\langle \iota_{A_x}, a, x, !_{A_x}\rangle$ została zbudowana jako pullback, więc i $\langle b, \phi \circ x, !_{A_x}, f \circ \iota_{A_x}\rangle$ jest pullbackiem. Ale ten pullback leży nad dokładnie tymi samymi morfizmami co pullback z prawej ściany $\langle \iota_{B_x}, b, \phi \circ x, !_{B_x}\rangle$. Zatem każdy komponent $f_x \colon A_x \to B_{\phi\circ x}$ jest izomorfizmem, więc cały morfizm $(f_x \colon A_x \to B_{\phi\circ x})_{x:\mathbb{C}(1,X)}$ jest kartezjański.

G zachowuje monoidalną strukturę ponieważ każdy komponent $(A_x)_{x:\mathbb{C}(1,X)}$ budowaliśmy przez branie pullbacku, a taka operacja zawsze zachowuje granice (funktor pullbacku zawsze ma lewy sprzężony). □

Spróbujmy teraz znaleźć ogólnie jak najlepszą aproksymację odwrotności G, nie przejmując się na razie zachowywaniem odpowiednich struktur.

Funktor $\mathbb{C}(1,-)$ posiada lewy sprzężony, oznaczmy go $\coprod_{(-)} 1$, gdy $\mathbb{C}$ posiada **Set**-indeksowane koprodukty na obiekcie końcowym. Jeżeli dodatkowo $\mathbb{C}$ posiada wszystkie **Set**-indeksowane koprodukty, to $\coprod_{(-)} 1$ rozciąga się do funktora $\coprod \colon Fam(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\to}$, który jest lewym sprzężonym do $\mathbb{C}^*(1,-)$:

$$(A_x)_{x:K} \xmapsto{\ \coprod\ } \coprod_{x:K} !_{A_x} \qquad \begin{array}{c} \coprod_{x:K} A_x \\ \big\downarrow \\ \coprod_K 1 \end{array}$$

W rzeczywistości pokażemy trochę więcej:

Twierdzenie 2.1.2 (Charakteryzacja koproduktów na obiekcie końcowym)**.** *Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią z obiektem końcowym. $\mathbb{C}$ posiada wszystkie koprodukty na obiekcie końcowym wtedy i tylko wtedy gdy funktor globalnych sekcji $\mathbb{C}(1,-)\colon \mathbb{C} \to \mathbf{Set}$ posiada lewy sprzężony.*

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że rodzina izomorfizmów $\phi_{K,A}\colon \mathit{Hom}(K, \mathbb{C}(1,A)) \to \mathit{Hom}(\coprod_K 1, A)$ jest naturalna. □

Twierdzenie 2.1.3 (Charakteryzacja koproduktów w kategoriach skończenie zupełnych)**.** *Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią skończenie zupełną. $\mathbb{C}$ posiada wszystkie koprodukty wtedy i tylko wtedy gdy funktor globalnych części $\mathbb{C}^*(1,-)\colon \mathbb{C}^{\to} \to \mathit{Fam}(\mathbb{C})$ posiada lewy sprzężony $\coprod\colon \mathit{Fam}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\to}$.*

Dowód. Dowód jest dość techniczny. Najpierw przy założeniu, że $\mathbb{C}$ posiada wszystkie koprodukty pokażemy, że zdefiniowany niżej $\coprod$ jest lewym sprzężonym do $\mathbb{C}^*(1,-)$. Wychodząc z aproksymacyjnej definicji sprzężenia mamy[2]:

$$\begin{tikzcd}
\mathit{Fam}(\mathbb{C}) \arrow[rr, bend left, "\coprod"] & & \mathbb{C}^{\to} \arrow[ll, bend left, "\mathbb{C}^*(1,-)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A_x)_{x:K} \arrow[r, "{\langle (\eta_x)_{x:K}, \psi: K \to L \rangle}"] \arrow[dr, "{\langle (f_x)_{x:K}, \phi: K \to M \rangle}"'] & (\coprod_{x:K} A_x)^G_{y:L} \arrow[d, "{\langle (\coprod_{x:K} h_x)^G_{y:L}, \chi: L \to M \rangle}"] \\
& B^G_{z:M}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{x:K} A_x \arrow[r, "\coprod_K !"] \arrow[d, "\coprod_{x:K} h_x"'] & \coprod_K 1 \arrow[d, "\coprod_{x:K} \phi(x)"] \\
B \arrow[r, "b"'] & C
\end{tikzcd}$$

gdzie $(\coprod_{x:K} A_x)^G_{y:L} = \mathbb{C}^*(1, \coprod_k ! \colon \coprod_{x:K} A_x \to \coprod_K 1)$, $L = \mathbb{C}(1, \coprod_K 1)$, $M = \mathbb{C}(1, C)$, $\psi(x) = \iota_x$, $\chi(y) = (\coprod_{x:K} \phi(x)) \circ y$, zaś $\eta_x\colon A_x \to (\coprod_{x:K} A_x)^G_{\psi(x)}$ i $h_x\colon A_x \to B$ dla $x\colon K$ zdefiniowane są następująco:

[2] Dla wygody notacyjnej przyjmujemy oznaczenie P^G na $\mathbb{C}^*(1, p\colon P \to X)$ dla znanego z kontekstu obiektu $p \in \mathbb{C}^{\to}$ i podobnie dla morfizmów.

$$
\begin{tikzcd}
A_x \arrow[dr, dashed, "\eta_x"] \arrow[drr, bend left, "\iota_x^A"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & \\
& (\coprod_{x:K} A_x)^G_{\iota_x} \arrow[r, "\gamma^A_{\iota_x}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \coprod_{x:K} A_x \arrow[d, "\coprod_K !"] \\
& 1 \arrow[r, "\iota_x = (\coprod_K !)\circ \iota_x^A"'] & \coprod_{x:K} 1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_x \arrow[d, "f_x"'] \arrow[dr, "h_x = \gamma^B_{\phi(x)} \circ f_x"] & \\
B^G_{\phi(x)} \arrow[r, "\gamma^B_{\phi(x)}"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "b"] \\
1 \arrow[r, "\phi(x)"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Oznaczmy $h^G_y = (\coprod_{x:K} h_x)^G_y$ i rozważmy następujący wielościan:

$$
\begin{tikzcd}
& & A_x \arrow[ddll, "\eta_x"'] \arrow[dl, "f_x"] \arrow[ddd, "\iota_x^A"] \arrow[dddrr, "h_x"] & & \\
& B^G_{\phi(x)} \arrow[ddrrr, "\gamma^B_{\phi(x)}"] \arrow[dddl] & & & \\
(\coprod_{x:K} A_x)^G_{\iota_x} \arrow[ur, "h^G_{\iota_x}"] \arrow[drr, "\gamma^A_{\iota_x}"] \arrow[dd] & & & & \\
& & \coprod_{x:K} A_x \arrow[rr, "\coprod_{x:K} h_x"] \arrow[dd, "\coprod_K 1"] & & B \arrow[dd, "b"] \\
1 \arrow[drr, "\iota_x"'] \arrow[drrrr, "\phi(x)"] & & & & \\
& & \coprod_K 1 \arrow[rr, "\coprod_{x:K} \phi(x)"] & & C
\end{tikzcd}
$$

Chcemy pokazać, że trójkąt z definicji sprzężenia jest przemienny. $\chi \circ \psi = \phi$ z definicji, więc zostaje pokazać, że na każdym x, $h^G_{\iota_x} \circ \eta_x = f_x$. Ta równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi $\gamma^B_{\phi(x)} \circ h^G_{\iota_x} \circ \eta_x = \gamma^B_{\phi(x)} \circ f_x$ ponieważ $\gamma^B_{\phi(x)}$ jest mono jako pullback monicznej strzałki $\phi(x)$. Prawa strona jest równa h_x z definicji, zaś lewa, rozpisując definicję $h^G_{\iota_x}$ równa się $(\coprod_{x:K} h_x) \circ \gamma^A_{\iota_x} \circ \eta_x$ i dalej rozpisując η_x ostatecznie $(\coprod_{x:K} h_x) \circ \iota^A_x$, co jest po prostu h_x.

Dla pokazania jedyności $\coprod_{x:K} h_x$, załóżmy, że jeszcze jakiś *inny* morfizm $k \colon \coprod_{x:K} A_x \to B$ uprzemiennia trójkąt sprzężenia. Doprowadzimy do sprzeczności. Skoro $k \neq \coprod_{x:K} h_x$ to istnieje koproduktowa injekcja $\iota^A_x \colon A_x \to \coprod_{x:K} A_x$, że $k \circ \iota^A_x \neq (\coprod_{x:K} h_x) \circ \iota^A_x$. Korzystając z definicji η_x otrzymujemy $k \circ \gamma^A_{\iota_x} \circ \eta_x \neq (\coprod_{x:K} h_x) \circ \gamma^A_{\iota_x} \circ \eta_x$. Ponieważ zarówno k jak i $\coprod_{x:K} h_x$ z założenia uprzemienniały przednią ścianę, to te dwie strzałki $A_x \longrightarrow B$ rozbijają się o pullback $B^G_{\phi(x)}$ dając g_x i f_x odpowiednio. $g_x \neq f_x \Leftrightarrow \gamma^B_{\phi(x)} \circ g_x \neq \gamma^B_{\phi(x)} \circ f_x \Leftrightarrow$
$k \circ \gamma^A_{\iota_x} \circ \eta_x \neq (\coprod_{x:K} h_x) \circ \gamma^A_{\iota_x} \circ \eta_x$, ale korzystając z podobnej argumentacji jak akapit wyżej dostajemy $k^G_{\iota_x} \circ \eta_x = g_x$, co jest sprzeczne z założeniem uprzemienniania trójkąta sprzężenia przez k.

Teraz załóżmy, że $\mathbb{C}^*(1, -)$ posiada lewy sprzężony F. Twierdzimy, że dla dowolnej rodziny obiektów $(A_x)_{x:K}$, część „dziedzinowa” $F((A_x)_{x:K})$ jest koproduktem tejże rodziny.

Biorąc jako B obiekty z włókna nad zbiorem jednoelementowym $\{*\}$ dostajemy naturalny izomorfizm $\mathbb{C}(F((A_x)_{x:K}), B) \approx \mathbb{C}_K((A_x)_{x:K}, !^*(B))$:

$$\begin{tikzcd}
(A_x)_{x:K} \arrow[r, "(\eta_x)_{x:K}"] \arrow[dr, "f_x"'] & G(F((A_x)_{x:K})) \arrow[d, "G(h)"] \\
 & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F((A_x)_{x:K}) \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & S \arrow[d, "!"] \\
B \arrow[r, "!"'] & 1
\end{tikzcd}$$

a to jest dokładnie definicją koproduktu (koproduktowe włożenia $\iota_x \colon A_x \to F((A_x)_{x:K})$ definiujemy jako sprzężenia do x-tej części jedności $\eta_x \colon A_x \to G(F((A_x)_{x:K}))$). $\square$

Wniosek 2.1.4 (Globalne sprzężenie). *Sprzężenia z twierdzeń 2.1.2 i 2.1.3 indukują sprzężenie pomiędzy rozwłóknieniami* $\mathit{fam}(\mathbb{C}) \rightleftharpoons \mathit{cod}(\mathbb{C})$ *w 2-kategorii* $\mathbf{Cat}^{\to}$.

Ignorujemy tutaj wspomniany we wstępie problem z kategoriami zbyt małymi na to, aby mogła dla nich istnieć aproksymacja na całym $\mathit{Fam}(\mathbb{C})$. Dla kategorii, dla których istnieje liczba kardynalna λ taka, że dla dowolnego $X \in \mathbb{C}$ zachodzi $|\mathbb{C}(1, X)| \leq \lambda$, sensowniej jest się pytać o istnienie aproksymacji w rozwłóknieniu $\mathit{fam}^\lambda(\mathbb{C})$ — rodzin indeksowanych zbiorami o mocy nie większej niż λ. Powyższe twierdzenie rozciąga się także na taki przypadek.

Twierdzenie 2.1.5 (Charakteryzacja λ-koproduktów w kategoriach skończenie zupełnych). *Niech $\mathbb{C}$ będzie skończenie zupełną kategorią, λ liczbą kardynalną taką, że dla każdego $X \in \mathbb{C}$ zachodzi $|\mathbb{C}(1, X)| \leq \lambda$. Wtedy $\mathbb{C}$ posiada wszystkie koprodukty o mocy nie większej niż λ wtedy i tylko wtedy gdy funktor globalnych części $G \colon \mathit{cod}(\mathbb{C}) \to \mathit{fam}^\lambda(\mathbb{C})$ ma lewy sprzężony $\coprod \colon \mathit{fam}^\lambda(\mathbb{C}) \to \mathit{cod}(\mathbb{C})$.*

Dowód. Dowód przebiega w identyczny sposób jak w twierdzeniu 2.1.3. $\square$

2.2. Monoidalne sprzężenie

Niestety zdefiniowany w poprzednim rozdziale funktor $\coprod$ nie musi w ogólności zachowywać ani struktury monoidalnej, ani nawet samego rozwłóknienia. Problem jest w tym, że choć jesteśmy w stanie skleić **Set**-indeksowane kolekcje, to samo przypisanie morfizmom $h \colon \coprod_{x:K} A_x \to B$ morfizmów $(f_x \colon A_x \to (B_y)_{y:M})_{x:K}$ może zmieniać całkowicie strukturę indeksowania — złożenie obiektu z jego globalnych części może dać zupełnie inny obiekt (zobaczymy to na przykładzie w sekcji 2.4.2). W tym rozdziale spróbujemy poradzić sobie z taką sytuacją zadając odpowiednie warunki na $\mathbb{C}$. Naturalnym pomysłem jest wymuszenie, aby rozłożenie obiektu sklejonego uprzednio z części, dawało części wejściowe[3]. Zanim to zrobimy, musimy jednak najpierw przypomnieć kilka standardowych pojęć.

Definicja 2.2.1 (Uniwersalność kogranicy). Powiemy, że kogranica jest uniwersalna, jeżeli jest stabilna pod pullbackami, tj. jeżeli $\tau_A \colon A \to X$ tworzą kostożek kograniczny, to dla dowolnego morfizmu $h \colon Y \to X$ morfizmy σ_B zdefiniowane jako pullbacki:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\sigma_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "\tau_A"'] & X
\end{tikzcd}$$

[3]Zobacz rozdział 2.3.

tworzą kostożek kograniczny.

Definicja 2.2.2 (Rozłączność koproduktu)**.** Koprodukt $\coprod_{x:K} A_x$ jest rozłączny, jeżeli pullback dwóch różnych jego włożeń jest obiektem początkowym.

Definicja 2.2.3 (Ekstensywność koproduktu)**.** Koprodukt $\coprod_{x:K} A_x$ jest ekstensywny, jeżeli jest uniwersalny i rozłączny.

W dalszej części pracy często będzie nam wygodnie posłużyć się następującą prostą charakteryzacją koproduktów ekstensywnych [CSW94, KST07].

Wniosek 2.2.1. *Koprodukt $\coprod_{x:K} B_x$ jest ekstensywny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek — dla dowolnej K-indeksowanej rodziny przemiennych diagramów:*

$$\begin{tikzcd} A_x \arrow[r, "j_x^A"] \arrow[d, "f_x"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B_x \arrow[r, "\iota_x^B"'] & \coprod_{x:K} B_x \end{tikzcd}$$

każdy z diagramów jest pullbackiem wtedy i tylko wtedy, gdy A jest koproduktem $\coprod_{x:K} A_x$ z koproduktowymi włożeniami $j_x^A \colon A_x \to A$.

Definicja 2.2.4 (Rozdzielność mnożenia względem dodawania)**.** Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią z koproduktami i binarnymi produktami. Powiemy, że produkty w $\mathbb{C}$ są rozdzielne względem koproduktów, jeżeli dla dowolnego obiektu A i rodziny $(B_x)_{x:K}$ kanoniczny morfizm $\coprod_{x:K}(id_A \times \iota_x) \colon \coprod_{x:K}(A \times B_x) \to A \times \coprod_{x:K} B_x$ jest izomorfizmem.

Tak wyposażeni w odpowiedni aparat pojęciowy, możemy przejść do opisu warunków, przy których globalne sprzężenie $\mathit{fam}(\mathbb{C}) \rightleftharpoons \mathit{cod}(\mathbb{C})$ z wniosku 2.1.4 będzie zachowywać potrzebne struktury.

Twierdzenie 2.2.2. *Niech $\mathbb{C}$ będzie skończenie zupełną kategorią ze wszystkimi ekstensywnymi koproduktami. Wtedy funktor koproduktu $\coprod \colon \mathit{fam}(\mathbb{C}) \to \mathit{cod}(\mathbb{C})$ jest kartezjański i zachowuje strukturę monoidalną.*

Dowód. Najpierw pokażemy, że $\coprod$ zachowuje kartezjańskie morfizmy. Niech więc $\langle (f_x)_{x:K}, \phi \rangle \colon (A_x)_{x:K} \to (B_x)_{x:L}$ będzie kartezjańskim morfizmem w $\mathit{fam}(\mathbb{C})$. Skonstruujemy rodzinę podwójnych pullbacków parametryzowaną przez $x \colon K$:

$$\begin{tikzcd} B_{\phi(x)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \coprod_{x:L} B_x \arrow[d, "\coprod_L !"] \\ 1 \arrow[r, "\iota_x"'] & \coprod_K 1 \arrow[r, "\coprod_{x:K} \phi(x)"'] & \coprod_L 1 \end{tikzcd}$$

Ponieważ morfizm $\langle (f_x)_{x:K}, \phi \rangle$ jest kartezjański, to jego każdy komponent f_x zadaje izomorfizm pomiędzy $B_{\phi(x)}$ a A_x i z uniwersalności koproduktów dostajemy $P \approx \coprod_{x:K} A_x$ i $\coprod_{x:K} f_x$ jest kartezjański.

Aby dowieść, że funktor zachowuje strukturę monoidalną, ustalmy włókno w $\mathit{Fam}(\mathbb{C})$ i weźmy z niego dwie kolekcje $(A_x)_{x:K}$ i $(B_x)_{x:K}$. Chcemy pokazać, że iloczyn włóknisty

$\coprod_{x:K} A_x$ i $\coprod_{x:K} B_x$ nad $\coprod_K 1$ jest izomorficzny z $\coprod_{x:K}(A_x \times B_x)$. Rozważmy części globalne $(\coprod_{x:K} A_x) \times_{\coprod_K 1} (\coprod_{x:K} B_x)$:

$$\begin{tikzcd} A_x \times B_x \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & (\coprod_{x:K} A_x) \times_{\coprod_K 1} (\coprod_{x:K} B_x) \arrow[d, "\coprod_K !"] \\ 1 \arrow[r, "\iota_x"'] & \coprod_K 1 \end{tikzcd}$$

Funktor operacji brania pullbacku w każdej kategorii posiada lewy sprzężony (jest to złożenie z bazowym morfizmem), a więc zachowuje wszystkie istniejące granice. Skoro tak, to części globalne $(\coprod_{x:K} A_x) \times_{\coprod_K 1} (\coprod_{x:K} B_x)$ muszą być równe odpowiadającym im iloczynom części globalnych $\coprod_{x:K} A_x$ i $\coprod_{x:K} B_x$, co uzasadnia, że $A_x \times B_x$ faktycznie są pullbackami. Teraz z uniwersalności $\coprod_K 1$ dostajemy $(\coprod_{x:K} A_x) \times_{\coprod_K 1} (\coprod_{x:K} B_x) \approx \coprod_{x:K}(A_x \times B_x)$. $\square$

Uwaga 2.2.1. Sama uniwersalność koproduktów nie gwarantuje, że kwadraty koproduktowych włożeń:

$$\begin{tikzcd} A_x \arrow[r, "\iota_x^A"] \arrow[d, "f_x"'] & \coprod_{x:K} A_x \arrow[d, "\coprod_{x:K} f_x"] \\ B_x \arrow[r, "\iota_x^B"'] & \coprod_K B_x \end{tikzcd}$$

są pullbackami[4]. Weźmy dla kontrprzykładu kategorię tworzoną przez ciało podzbiorów liczb naturalnych. Łatwo jest sprawdzić, że koprodukty są uniwersalne, jednak biorąc sumę nierozłącznych zbiorów, możemy wspólne elementy wyrzucić ze wszystkich injekcji poza jedną, np.:

$$\begin{tikzcd} \{\} \arrow[r] \arrow[d] & \{\} \cup \{2\} \arrow[d] & \{2\} \arrow[l] \arrow[d] \\ \{2\} \arrow[r] & \{2\} \cup \{2\} & \{2\} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Struktury koproduktów nie zmienimy, diagramy nadal będą przemienne, ale niektóre z kwadratów przestaną być pullbackami.

Zauważmy, że dowód twierdzenia 2.2.2 korzystał z uniwersalności koproduktów tylko na obiekcie końcowym, więc można by się pokusić o wzmocnienie twierdzenia wymagając uniwersalności jedynie właśnie takich koproduktów. Następujący wniosek pokazuje, że takie wzmocnienie byłoby tylko pozorne.

Wniosek 2.2.3. *Dla kategorii skończenie zupełnej $\mathbb{C}$ z koproduktami zachodzi następująca równoważność — $\mathbb{C}$ ma ekstensywne (odpowiednio: uniwersalne) koprodukty na obiekcie końcowym wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie koprodukty w $\mathbb{C}$ są ekstensywne (odpowiednio: uniwersalne).*

[4] Dla kategorii z uniwersalnymi koproduktami powyższa własność jest dokładnie równoważna rozłączności koproduktów.

Dowód. W dowodzie korzystamy z charakteryzacji koproduktów ekstensywnych z wniosku 2.2.1. Dla rodziny koproduktowych injekcji $\iota_x \colon A_x \to \coprod_{y:K} A_y$ dobudowujemy pullbacki:

$$\begin{tikzcd}
V_x \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
A_x \arrow[r, "\iota_x"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \coprod_{y:K} A_y \arrow[d, "\coprod_K !"] \\
1 \arrow[r, "x"'] & \coprod_K 1
\end{tikzcd}$$

Uniwersalność $\iota_x \colon A_x \to \coprod_{y:K} A_y$ wynika z własności składania pullbacków, zaś pełna ekstensywność z tego, że jeżeli zarówno zewnętrzny jak i podpierający kwadrat są pullbackami, to górny także. □

Wniosek 2.2.4. *Dla skończenie zupełnej kategorii $\mathbb{C}$ z koproduktami, zachodzi następująca równoważność — binarne koprodukty są rozłączne wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie koprodukty w są rozłączne.*

Dowód. Natychmiastowa implikacja z łączności i przemienności koproduktów. □

Kolejny wniosek mówi, że sprzężenie, które zbudowaliśmy jest faktycznie sprzężeniem monoidalnych rozwłóknień.

Wniosek 2.2.5. *Niech $\mathbb{C}$ będzie jak w twierdzeniu 2.2.2. Wtedy globalne sprzężenie pomiędzy monoidalnymi rozwłóknieniami $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ z wniosku 2.1.4 zadawane przez funktory globalnego indeksu i koproduktu, jest sprzężeniem w 2-kategorii monoidalnych rozwłóknień* **MonFib**.

Dowód. Równości trójkątów są spełnione na mocy wniosku 2.1.4, zaś zachowywanie przez funktory struktury rozwłóknienia i monoidalnej na mocy twierdzeń 2.1.1 i 2.2.2. Wystarczy więc pokazać, że jedność i kojedność sprzężenia są monoidalne, a to dostajemy praktycznie z samej ich definicji. □

Twierdzenie 2.2.6. *Jeżeli w danej kategorii koprodukty są ekstensywne, to produkty binarne są rozdzielne względem koproduktów.*

Dowód. Każdy diagram z rodziny:

$$\begin{tikzcd}
A \times B_x \arrow[r, "id_A \times \iota_x"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \times \coprod_{x:K} B_x \arrow[d, "\pi_2"] \\
B_x \arrow[r, "\iota_x"'] & \coprod_{x:K} B_x
\end{tikzcd}$$

jest pullbackiem, zatem na mocy uniwersalności koproduktów dostajemy izomorfizm $A \times \coprod_{x:K} B_x \approx \coprod_{x:K}(A \times B_x)$. □

Wniosek 2.2.7. *Niech $\mathbb{C}$ będzie jak w twierdzeniu 2.2.2. Wtedy globalne sprzężenie $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ zachowuje produkty pomiędzy kategoriami bazowymi.*

Dowód. Część bazowa funktora $fam(\mathbb{C})$ jest presnopem, więc zachowuje wszystkie istniejące granice.

Dla funktora $cod(\mathbb{C})$ chcemy pokazać, że przy dowolnych zbiorach K i L istnieje izomorfizm $\coprod_{K\times L} 1 \approx (\coprod_K 1) \times (\coprod_L 1)$. Ale $\coprod_{K\times L} 1 \approx \coprod_K(\coprod_L 1) \approx \coprod_K((\coprod_L 1) \times 1)$, a to z rozdzielności produktów względem koproduktów (twierdzenie 2.2.6) jest równe $(\coprod_L 1) \times (\coprod_K 1)$. $\square$

Uwaga 2.2.2. O ile $fam(\mathbb{C})$ zawsze zachowuje produkty w kategorii bazowej, o tyle $cod(\mathbb{C})$ na ogół nie musi (założenie uniwersalności koproduktów było istotne). Weźmy dla kontrprzykładu kategorię dualną do kategorii pierścieni i pierściennych homomorfizmów. W tej kategorii $1 \sqcup 1$ jest pierścieniem $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. $(1 \sqcup 1) \times (1 \sqcup 1)$ jest *wolnym* produktem takich pierścieni, podczas gdy $(1 \sqcup 1) \sqcup (1 \sqcup 1)$ jest ich *prostym* produktem.

Teraz przejdziemy do pokazania kluczowego dla tej części rozważań twierdzenia — mówiącego, że globalne sprzężenie z wniosku 2.1.4 indukuje sprzężenie $\mathbb{C}$-**Cat** $\rightleftharpoons$ $\mathbf{Cat}_{\mathbb{C}}$ pomiędzy kategoriami $\mathbb{C}$-wzbogaconymi i $\mathbb{C}$-wewnętrznymi. Jednak jako, że koncepcja kategorii jest koncepcją 2-kategoryjną, samo istnienie sprzężenia w klasycznym sensie (tj. 1-sprzężenia) praktycznie nie mówi nam nic o wzajemnych powiązaniach kategorii wzbogaconych z wewnętrznymi. Właściwym pojęciem sprzężenia dla 2-kategorii jest bisprzężenie[5] [Ben67]. W naszych rozważaniach wygodnie jednak będzie posłużyć się silniejszym i prostszym w definicji pojęciem 2-sprzężenia.

Definicja 2.2.5 (2-sprzężenie)**.** Sprzężenie w 2-kategorii 2-**Cat** nazywamy 2-sprzężeniem.

Twierdzenie 2.2.8. *Niech $\mathbb{C}$ będzie skończenie zupełną kategorią z ekstensywnymi koproduktami. Wtedy globalne sprzężenie pomiędzy monoidalnymi rozwłóknieniami $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ z wniosku 2.1.4 zadawane przez funktory globalnego indeksu i koproduktu indukuje 2-sprzężenie $\mathbb{C}$-**Cat** $\rightleftharpoons$ $\mathbf{Cat}_{\mathbb{C}}$ pomiędzy kategoriami $\mathbb{C}$-wzbogaconymi i $\mathbb{C}$-wewnętrznymi.*

Dowód. Rozważmy diagram 2-sprzężenia dla dowolnej $fam(\mathbb{C})$-relatywnej kategorii $A = \langle (A_{x,y})_{x,y:A_0}, A_0, (\eta^A_x\colon 1 \to A_{x,x})_{x:A_0}, (\mu^A_{x,y,z}\colon A_{x,y} \times A_{y,z} \to A_{x,z})_{x,y,z:A_0}\rangle$, $cod(\mathbb{C})$-relatywnej kategorii $B = \langle \langle dom, cod\rangle\colon B_1 \to B_0 \times B_0, B_0, \eta^B\colon B_0 \to B_1, \mu^B\colon B_1 \times_{B_0} B_1 \to B_1\rangle$, relatywnych funktorów $f, g\colon A \to B^G$ i relatywnej transformacji naturalnej $\beta\colon g \to f$, gdzie B^G, k^G, f^G, γ^G zdefiniowane są komponentowo za pomocą funktora globalnych części, a $\coprod A$ komponentowo za pomocą funktora koproduktu:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, bend left, "g"] \arrow[dr, bend right, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\beta}{\Swarrow}"] & (\coprod A)^G \arrow[d, bend right, "k^G"'] \arrow[d, bend left, "h^G"] \arrow[d, phantom, "\overset{\gamma^G}{\Rightarrow}"] & \coprod A \arrow[d, bend right, "k"'] \arrow[d, bend left, "h"] \arrow[d, phantom, "\overset{\gamma}{\Rightarrow}"] \\
& B^G & B
\end{tikzcd}
$$

Chcemy pokazać, że składanie z zadawanymi przez $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ jednościami η_A jest izomorfizmem kategorii $Hom(\coprod A, B) \approx Hom(A, B^G)$. Pokażemy to w dwóch krokach —

[5] Warto zwrócić też uwagę, że klasyczne sprzężenie nie tylko pod pewnymi aspektami jest zbyt słabe, ale pod innymi także zbyt silne — nieistnienie 1-sprzężenia pomiędzy kategoriami podkładowymi nie implikuje nieistnienia bisprzężenia pomiędzy 2-kategoriami.

najpierw, że indukowane sprzężenie jest 1-sprzężeniem, a potem, że składanie z η_A jest wiernym i pełnym funktorem $Hom(\coprod A, B) \longrightarrow Hom(A, B^G)$.

Ponieważ definicje relatywnych kategorii i relatywnych funktorów bazują wyłącznie na własnościach rozwłóknień, monoidalnych operacji i produktów w kategoriach bazowych, zaś $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ zachowuje te struktury, wystarczy pokazać, że zarówno jedność sprzężenia jak i jedyny morfizm $\coprod_{x:K} h_x$ z twierdzenia 2.1.3 są relatywnymi funktorami.

Funktorialność jedności jest oczywista, jako, że wszystkie jej komponenty są kanonicznymi włożeniami. Natomiast, aby pokazać zachowywania identyczności i złożeń przez h, rozrysujmy jak wygląda sprzężenie na $(A_{x,y})_{x,y:A_0}$:

$$\begin{tikzcd}
(A_{x,y})_{x,y:A_0} \arrow[r, "(\eta_{A_{x,y}})_{x,y:A_0}"] \arrow[dr, "f"'] & \left(\coprod_{x,y:A_0} A_{x,y}\right)^G_{z,v:L} \arrow[d, "h^G"] \\
& B^G_{p,q:M}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{x,y:A_0} A_{x,y} \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_{x,y:A_0} h_{x,y}"'] & \coprod_{A_0\times A_0} 1 \arrow[d, "\coprod_{x:A_0} f_0(x)\times\coprod_{x:A_0} f_0(x)"] \\
B_1 \arrow[r, "\langle dom, cod\rangle"'] & B_0 \times B_0
\end{tikzcd}$$

Mamy pokazać, że diagram zachowywania identyczności jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{x,y:A_0} A_{x,y} \arrow[d, "\coprod_{x,y:A_0} h_{x,y}"'] & \coprod_{A_0} 1 \arrow[l, "\coprod_{x:A_0} \eta^A_x"'] \arrow[d, "\coprod_{x:A_0} f_0(x)"] \\
B_1 & B_0 \arrow[l, "\eta^B"]
\end{tikzcd}$$

Ten diagram się przemienia, jeżeli przemienia się na każdej koproduktowej injekcji $\iota_x \colon 1 \to \coprod_{A_0} 1$, stąd do pokazania zostaje nam:

$$\begin{tikzcd}
A_{x,x} \arrow[d, "h_{x,x}"'] & 1 \arrow[l, "\eta^A_x"'] \arrow[d, "f_0(x)"] \\
B_1 & B_0 \arrow[l, "\eta^B"]
\end{tikzcd}$$

Ale to dostajemy praktycznie z definicji:

$$\begin{tikzcd}
A_{x,x} \arrow[dr, bend left, "f_{x,x}"] & & \\
& B^G_{f_0(x),f_0(x)} \arrow[r, "\gamma^B_{f_0(x),f_0(x)}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B_1 \arrow[d, "\langle dom, cod\rangle"] \\
& 1 \arrow[u, bend left, dashed, "\eta^B_{f_0(x)}"] \arrow[ul, bend left, "\eta^A_x"] \arrow[ur, "\eta^B \circ f_0(x)"'] \arrow[r, "\langle f_0(x), f_0(x)\rangle"'] & B_0 \times B_0
\end{tikzcd}$$

Korzystając z funktorialności f mamy: $f_{x,x} \circ \eta^A_x = \eta^B_{f0(x)}$ i po przedłużeniu o $\gamma^B_{f0(x),f0(x)}$ zachodzi $\gamma^B_{f0(x),f0(x)} \circ f_x \circ \eta^A_x = \gamma^B_{f0(x),f0(x)} \circ \eta^B_{f0(x)}$. Lewa strona to po prostu $h_{x,x} \circ \eta^A_x$, a prawa z definicji równa jest $\eta^B \circ f_0(x)$.

Analogicznie przebiega dowód dla zachowywania złożeń — własności koproduktów pozwalają sprawdzić przemienność diagramu tylko na każdej koproduktowej injekcji, a to z kolei jest gwarantowane zachowywaniem złożeń przez f.

Teraz przejdźmy do pokazania, że składanie z η_A jest wiernym i pełnym funktorem $Hom(\coprod A, B) \longrightarrow Hom(A, B^G)$ — tj. dla każdej naturalnej transformacji $\beta\colon g \to f$ istnieje dokladnie jedna naturalna transformacja $\gamma\colon k \to h$, taka, że $\eta_A \bullet \gamma^G = \beta$:

$$\begin{tikzcd}
1_{A_0} \arrow[r, "(!\iota_x)_{x:A_0}"] \arrow[dr, "\beta"'] & 1_L \arrow[d, "\gamma^G"] \\
& B^G_{p,q:M}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{A_0} 1 \arrow[r, "\coprod_{A_0} !"] \arrow[d, "\coprod_{x:A_0} \gamma_x"'] & \coprod_{A_0} 1 \arrow[d, "\coprod_{x:A_0} k_0(x) \times \coprod_{x:A_0} h_0(x)"] \\
B_1 \arrow[r, "\langle dom, cod \rangle"'] & B_0 \times B_0
\end{tikzcd}$$

Podobnie jak w poprzedniej implikacji, możemy argumentować, że ta własność sprowadza się do pytania czy dla dowolnej relatywnej transformacji naturalnej β morfizm γ zadawany przez sprzężenie $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ jest także relatywną transformacją naturalną i znowu podobnie jak poprzednio, tę własność wystarczy sprawdzić na każdej koproduktowej injekcji, a to zachodzi z relatywnej naturalności β. $\square$

Wniosek 2.2.9. *Niech $\mathbb{C}$ będzie lokalnie kartezjańsko domkniętą kategorią. Wszystkie kogranice w $\mathbb{C}$ są uniwersalne.*

Dowód. Weźmy dowolny kostożek kograniczny $\tau_i\colon A_i \to X$ w $\mathbb{C}$. On jest oczywiście także kostożkiem w $\mathbb{C}/X$ gdzie morfizmem $X \longrightarrow X$ jest identyczność, a morfizmami $A_i \longrightarrow X$ są kograniczne włożenia τ_i. Biorąc dowolny morfizm $h\colon Y \to Z$ i przekształcając kostożek $\tau_i\colon A_i \to X$ przez funktor pullbacku h^*, z lokalnie kartezjańskiej domkniętości (istnienia prawego sprzężonego do h^*) dostajemy w kategorii $\mathbb{C}/Y$ kostożek kograniczny. Teraz wystarczy jeszcze tylko zauważyć, że jeżeli kostożek w płacie kategorii $\mathbb{C}/A$ dla dowolnego $A \in \mathbb{C}$ jest kograniczny, to odpowiadający mu kostożek obcięty do dziedzin morfizmów jest kograniczny w całej kategorii $\mathbb{C}$ — funktor obcinający morfizmy do ich dziedzin posiada prawy sprzężony (kartezjańskie mnożenie przez A), więc zachowuje kogranice. $\square$

Każdy topos elementarny jest lokalnie kartezjańsko domknięty i ma rozłączne koprodukty. Zatem, z powyższego, dostajemy następujący wniosek.

Wniosek 2.2.10. *Dla dowolnego toposu elementarnego $\mathbb{C}$ posiadającego wszystkie koprodukty, a więc, w szczególności, dla każdego toposu Grothendiecka*[6]*, funktory globalnych części i koproduktu tworzą sprzężenie pomiędzy kategoriami $\mathbb{C}$-wzbogaconymi a $\mathbb{C}$-wewnętrznymi.*

[6] Na mocy twierdzenia Girauda, topos elementarny jest toposem Grothendiecka wtedy i tylko wtedy gdy posiada zbiór generatorów i wszystkie **Set**-indeksowane koprodukty [Joh03, Mac94]. Przez zbiór generatorów kategorii $\mathbb{C}$ rozumiemy zbiór G obiektów z $\mathbb{C}$, taki że dla dowolnej pary *różnych* morfizmów $f, g\colon A \to B$ istnieje obiekt $X \in G$ i morfizm $x\colon X \to A$, że $f \circ x \neq g \circ x$. Innymi słowy, jeżeli dwa dowolne morfizmy w $\mathbb{C}$ są różne, to istnieje G-prametryzowany element $x \in^G A$, który te morfizmy rozróżnia, tj. $f \neq g \Leftrightarrow \exists_{x \in^G A} f(x) \neq g(x)$. Oczywiście każda kategoria mała posiada zbiór generatorów.

Definicja 2.2.6 (Kategoria o niepodzielnych całościach)**.** Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią z obiektem początkowym i końcowym. Powiemy, że $\mathbb{C}$ ma niepodzielne całości[7], jeżeli jedynymi podobiektami obiektu końcowego są on sam i obiekt początkowy.

Definicja 2.2.7 (Kategoria globalnie rozłączna)**.** Niech $\mathbb{C}$ będzie skończenie zupełną kategorią z obiektem początkowym. Powiemy, że $\mathbb{C}$ jest globalnie rozłączna jeżeli pullback dowolnych różnych dwóch globalnych sekcji jest obiektem początkowym.

Twierdzenie 2.2.11. *Jeżeli kategoria zupełna ma niepodzielne całości, to jest globalnie rozłączna.*

Dowód. Rozważmy pullback dwóch globalnych sekcji o wspólnej kodziedzinie:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "y"] \\ 1 \arrow[r, tail, "x"'] & A \end{tikzcd}$$

Oczywiście $m\colon X \to 1$ jest monomorfizmem, jako, że zostało skonstruowane jako pullback monomorfizmu (globalnej sekcji). Zatem albo $X \approx 0$, albo $X \approx 1$ ale wtedy $x = y$. ☐

Lemat 2.2.12. *Jeżeli kategoria jest globalnie rozłączna i posiada uniwersalne koprodukty na obiekcie końcowym, to każda globalna sekcja $1 \longrightarrow \coprod_A 1$ jest koproduktowym włożeniem.*

Dowód. Jeżeli obiekt końcowy jest także obiektem początkowym, to sytuacja jest oczywista. Załóżmy, że obiekt końcowy nie jest początkowy. Ta część dowodu przebiega przez sprzeczność. Bierzemy globalną sekcję $\gamma\colon 1 \longrightarrow \coprod_A 1$, która nie jest koproduktowym włożeniem, i rozważamy jej pullbacki wzdłuż wszystkich koproduktowych włożeń ι_x:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "!"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\gamma"] \\ 1 \arrow[r, "\iota_x"'] & \coprod_A 1 \end{tikzcd}$$

Dzięki uniwersalności koproduktów mamy: $1 \approx \coprod_A 0 \approx 0$. ☐

Twierdzenie 2.2.13. *Niech $\mathbb{C}$ będzie skończenie zupełną, globalnie rozłączną kategorią ze wszystkimi* **Set***-indeksowanymi ekstensywnymi koproduktami. Wtedy jedność sprzężenia $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ jest izomorfizmem.*

Dowód. Natychmiastowy wniosek z lematu 2.2.12. ☐

2.3. Kategorie quasiekstensywne

Najczęściej pojęcie ekstensywnych koproduktów wprowadza się jako pewną abstrakcję dla zachowania, jakie mają koprodukty w **Set**. Jasne jest, że w dowolnej kategorii z koproduktami, jeżeli tylko mamy dwa morfizmy $f\colon A \to C$ i $g\colon B \to D$, to zawsze możemy je zlepić do jednego

[7] W literaturze funkcjonuje określenie „2-wartościowy topos”, na topos, który ma niepodzielne całości w powyższym sensie. Jednak mówienie, że kategoria jest „2-wartościowa” w odniesieniu do dowolnej kategorii mogłoby być mylące.

morfizmu $f \sqcup g\colon A \sqcup B \to C \sqcup D$. Jednak w **Set** dodatkowo, prawdziwy jest też odwrotny fakt — każdy morfizm $h\colon X \to C \sqcup D$, możemy rozciąć do pary morfizmów $h_C\colon X_C \to C$ i $h_D\colon X_D \to D$ — biorąc po prostu $X_C = h^{-1}[C]$, $X_D = h^{-1}[D]$ i obcinając h do $h_C = h{\restriction}_C$ i $h_D = h{\restriction}_D$ odpowiednio, tak że powrotne ich zlepienie da nam z dokładnością do izomorfizmu wejściowe h. Koprodukty ekstensywne starają się imitować właśnie takie zachowanie. Formalnie, definiujemy pojęcie skończenie ekstensywnej kategorii $\mathbb{C}$, jako kategorii ze skończonymi koproduktami, w której funktory koproduktu $\sqcup\colon \mathbb{C}/C \times \mathbb{C}/D \to \mathbb{C}/(C \sqcup D)$ zadają równoważność pomiędzy kategoriami. Okazuje się [CSW94, KST07], że ten warunek jest tożsamy z wymogiem, aby $\mathbb{C}/C$ miało skończone ekstensywne koprodukty w sensie definicji 2.2.3.

Jak jednak zauważyliśmy w poprzednim rozdziale, dla kategorii zupełnych ze wszystkimi koproduktami, ekstensywność *wszystkich* koproduktów jest równoważna ekstensywności koproduktów na obiekcie końcowym. Podobnie można pokazać, że dla kategorii zupełnych ze skończonymi koproduktami, ekstensywność jest implikowana przez znacznie słabszy warunek — mówiący, że tylko sam funktor $\sqcup\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}/(1 \sqcup 1)$ stanowi równoważność kategorii. Łatwo pokazać, że w kategoriach zupełnych prawdziwy jest także ogólniejszy fakt — $\mathbb{C}$ ma wszystkie koprodukty ekstensywne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru K funktory $\coprod\colon \mathbb{C}^K \to \mathbb{C}/(\coprod_K 1)$ są równoważnościami kategorii. Nasuwa się pytanie, jak silny jest wymóg istnienia sprzężenia zachowującego strukturę monoidalnych rozwłóknień w porównaniu z istnieniem tak zdefiniowanych równoważności $\mathbb{C}^K \approx \mathbb{C}/(\coprod_K 1)$. W tym rozdziale odpowiemy na to pytanie, próbując odwrócić twierdzenie 2.2.2. Zaczniemy od kilku prostych obserwacji.

Wniosek 2.3.1. *Niech $\mathbb{C}$ będzie skończenie zupełną kategorią. Jeżeli globalne sprężenie $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ zachowuje strukturę rozwłóknień, to jego jedność η jest morfizmem kartezjańskim.*

Dowód. Przypomnijmy definicję jedności $(\eta_x\colon A_x \to (\coprod_{x:K} A_x)^G_{\phi(x)})_{x:K}$ z twierdzenia 2.1.3:

$$\begin{tikzcd}
A_x \arrow[dr, dashed, "\eta_x"] \arrow[drr, bend left, "\iota^A_x"] \arrow[ddr, bend right, "!"'] & & \\
& (\coprod_{x:K} A_x)^G_{\iota_x} \arrow[r, "\gamma^A_{\iota_x}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \coprod_{x:K} A_x \arrow[d, "\coprod_K !"] \\
& 1 \arrow[r, "\iota_x = (\coprod_K !)\circ\iota^A_x"'] & \coprod_{x:K} 1
\end{tikzcd}$$

Pytanie o to, czy η_x jest izomorfizmem, sprowadza się do pytania, czy kwadrat:

$$\begin{tikzcd}
A_x \arrow[r, "\iota^A_x"] \arrow[d, "!"'] & \coprod_{x:K} A_x \arrow[d, "\coprod_K !"] \\
1 \arrow[r, "\iota_x"'] & \coprod_K 1
\end{tikzcd}$$

jest pullbackiem. Ale biorąc kartezjański morfizm:

$$A_x \xrightarrow{\langle id_{A_x}, * \mapsto x\rangle} (A_x)_{x:K}$$

widzimy, że on jest przekształcany przez funktor koproduktu na dokładnie powyższy kwadrat. A skoro funktor koproduktu ma zachowywać strukturę rozwłóknienia, to ι^A_x musi być także morfizmem kartezjańskim — czyli pullbackiem. $\square$

Wniosek 2.3.2. *Niech $\mathbb{C}$ będzie skończenie zupełną kategorią ze wszystkimi uniwersalnymi koproduktami. Kojedność ϵ sprężenia fam$(\mathbb{C}) \rightleftharpoons$ cod$(\mathbb{C})$ jest morfizmem kartezjańskim.*

Dowód. Kojedność zdefiniowana jest jako kwadrat:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "b"'] & \coprod_{x:K} B_x \arrow[l, "\epsilon=\coprod_{x:K}\gamma_x^B"'] \arrow[d, "\coprod_K !"] \\
C & \coprod_K 1 \arrow[l, "\coprod_{x:K}\iota_x"]
\end{tikzcd}$$

który jest pullbackiem na mocy uniwersalności koproduktów (stabilność $\coprod_K 1$). □

Uwaga 2.3.1. Jeżeli koprodukty nie są uniwersalne, to kojedność sprzężenia w ogólności nie musi być kartezjańska. Orimagiem (albo lubrazem) zbioru A nazwiemy rodzinę P_A podzbiorów A zamkniętą ze względu na branie dowolnych niepustych sum. **Orimg** to kategoria lubrazów $\langle A, P_A\rangle$, $\langle B, P_B\rangle$ i funkcji $f\colon A \to B$ zachowujących lubrazową strukturę — tj. dla każdego $A_0 \in P_A$ zachodzi $f[A_0] \in P_B$. Kategoria **Orimg** jest zupełna, posiada wszystkie koprodukty i jest globalnie rozłączna. Funktor globalnych części rozcina orimagi, zaś funktor koproduktu skleja tak rozcięte części do najmniejszego orimaga na rozłącznej sumie podkładowych zbiorów.
Zauważmy, że choć funktor koproduktu zachowuje strukturę rozwłóknień, to kojedność sprzężenia nie jest kartezjańska. Aby się o tym przekonać, weźmy orimag $H = \langle\{1,2\},\{\{1\},\{1,2\}\}\rangle$ z morfizmem $h\colon H \to 1 \sqcup 1$ rozdzielającym obydwa elementy — $h(1) = *_L$, $h(2) = *_R$:

$$\begin{tikzcd}
\langle\{1\},\{\{1\}\}\rangle \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \langle\{1,2\},\{\{1\},\{1,2\}\}\rangle \arrow[d, "h"] & \langle\{2\},\{\}\rangle \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\llcorner", very near start] \\
\langle\{*\},\mathscr{P}(\{*\})\rangle \arrow[r] & \langle\{*_L,*_R\},\mathscr{P}(\{*_L,*_R\})\rangle & \langle\{*\},\mathscr{P}(\{*\})\rangle \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Biorąc globalne części H dostaniemy odpowiednio $L = \langle\{1\},\{\{1\}\}\rangle$ i $R = \langle\{2\},\{\}\rangle$. Jednak $L \sqcup R = \langle\{1,2\},\{\{1\}\}\rangle \neq H$.

Twierdzenie 2.3.3 (Charakteryzacja koproduktów ekstensywnych w kategoriach skończenie zupełnych)**.** *Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią skończenie zupełną. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathbb{C}$ jest ekstensywna*

2. *istnieje sprzężenie pomiędzy funktorem globalnych części i funktorem koproduktu fam$(\mathbb{C}) \rightleftharpoons$ cod$(\mathbb{C})$ zachowujące strukturę rozwłóknień, monoidalną i produkty binarne w bazach, którego jedność i kojedność są morfizmami kartezjańskimi*

3. *istnieje sprzężenie pomiędzy funktorem globalnych części i funktorem koproduktu fam$(\mathbb{C}) \rightleftharpoons$ cod$(\mathbb{C})$ zachowujące strukturę rozwłóknień, którego jedność i kojedność są morfizmami kartezjańskimi*

4. *dla każdego zbioru K kanoniczny funktor $\coprod\colon \mathbb{C}^K \to \mathbb{C}/(\coprod_K 1)$ jest równoważnością kategorii*

Dowód. Implikacja ($1 \longrightarrow 2$) jest treścią twierdzenia 2.2.2 i wniosku 2.3.2.

Implikacja ($2 \longrightarrow 3$) jest oczywista.

Dla pokazania implikacji ($3 \longrightarrow 4$) załóżmy, że istnieje sprzężenie rozwłóknień $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ mające kartezjańską kojedność. Niech $C\colon \mathbb{C}/(\coprod_K 1) \to \mathbb{C}^K$ będzie funktorem „koproduktowych części” — przyporządkowującym morfizmom $f\colon A \to \coprod_K 1$ kolekcje $A_{\iota_x : K}$ pochodzące *tylko* z samych koproduktowych włożeń $\iota_x\colon 1 \to \coprod_K 1$. Twierdzimy, że funktor $\coprod$ obcięty do $\mathbb{C}^K$ jest lewym sprzężonym C. Rozpiszmy aproksymacyjną definicję sprzężenia raz jeszcze:

$$\begin{tikzcd}
(A_x)_{x:K} \arrow[r, "(\eta_x)_{x:K}"] \arrow[dr, "(f_x)_{x:K}"'] & (\coprod_{x:K} A_x)^G_{x:K} \arrow[d, "(\coprod_{x\in K} h_x)^G_{x:K}"] \\
& (B_x)_{x:K}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{x:K} A_x \arrow[r, "\amalg_K !"] \arrow[d, "\amalg_{x:K} h_x"'] & \coprod_K 1 \arrow[d, "\amalg_K \phi(x)"] \\
B \arrow[r, "b"'] & \coprod_K 1
\end{tikzcd}$$

Identyczna argumentacja jak w dowodzie twierdzenia 2.1.3 gwarantuje nam, że trójkąt jest przemienny i $\coprod_{x:K} h_x$ jest jedynym morfizmem uprzemienniającym.

Końcówka dowodu wniosku 2.3.1 pokazuje też, że tak naprawdę $(\coprod_{x:K} A_x)^G_{y:L} \approx A_{y:K} \cup (\coprod_{x:K} A_x)^G_{y:L\setminus\psi[K]}$, zaś jedność obcięta do obrazu $(A_x)_{x:K}$ jest izomorfizmem. O izomorficzności kojedności przekonamy się wypisując jej jawną postać:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \coprod_{x:K} B_x \arrow[l, "\epsilon = \amalg_{x:K} \gamma^B_x"'] \arrow[d, "\amalg_K !"] \\
\coprod_K 1 \arrow[r, equal, "id"'] & \coprod_K 1
\end{tikzcd}$$

Kwadrat z założenia jest pullbackiem, zatem ϵ — izomorfizmem.

Dowód implikacji ($4 \longrightarrow 1$) przebiega w dokładnie taki sam sposób jak podczas charakteryzacji kategorii skończenie ekstensywnych [CSW94, KST07]. □

Jak przekonaliśmy się na przykładzie orimagów (uwaga 2.3.1), pojęcie kategorii ekstensywnej jest silniejsze od istnienia sprzężenia *fam*$(\mathbb{C}) \rightleftharpoons$ *cod*$(\mathbb{C})$ zachowującego strukturę monoidalną. Faktycznie, kategorie ekstensywne mówią dużo więcej niż moglibyśmy oczekiwać — pozwalają nam „rozlepić” *dowolny* morfizm $f\colon X \to A \sqcup B$ na parę morfizmów $f_A\colon X_A \to A$ i $f_B\colon X_B \to B$, a później zlepić do morfizmu wejściowego. Takie „rozlepienie” oczywiście „rozrywa” krzyżową strukturę pomiędzy X_A i X_B, więc wymóg, aby $X \approx X_A \sqcup X_B$, sprawia, że *każdy* obiekt X musi mieć strukturę jednoznacznie indukowaną przez własne części. Nam wystarcza umiejętność „rozlepiania” uprzednio „zlepionych” morfizmów. Kategorie, które na to pozwalają nazwiemy kategoriami „quasiekstensywnymi”[8].

[8] Nazwa bierze się stąd, że jak pokażemy dalej, warunek ten jest równoważny posiadaniu przez kanoniczne sprzężenie $\coprod\colon \mathbb{C}^K \to \mathbb{C}/(\coprod_K 1)$ jedności będących izomorfizmami — czyli jest mniej więcej „połową” warunku ekstensywności.

Definicja 2.3.1 (Kategoria quasiekstensywna)**.** Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią z koproduktami i pullbackami wzdłuż koproduktowych włożeń. Powiemy, że $\mathbb{C}$ jest quasiekstensywna, jeżeli każdy diagram postaci:

$$\begin{tikzcd}
A_x \arrow[r, "\iota^A_x"] \arrow[d, "f_x"'] & \coprod_{x:K} A_x \arrow[d, "\coprod_{x:K} f_x"] \\
B_x \arrow[r, "\iota^B_x"'] & \coprod_{x:K} B_x
\end{tikzcd}$$

jest pullbackiem.

Wniosek 2.3.4. *Kategoria zupełna $\mathbb{C}$ spełnia warunek quasiekstensywności na koproduktach obiektów końcowych wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{C}$ jest quasiekstensywna.*

Wniosek 2.3.5. *Koprodukty w kategoriach quasiekstensywnych są rozłączne.*

Dowód. Weźmy dowolny koprodukt $\coprod_{x:K} A_x$ i dwa różne elementy $x, y \colon K$. Konstruujemy diagram:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\iota^0_y"] \arrow[d, "*"'] & A_y \arrow[d, "\iota_y"] \\
A_x \arrow[r, "\iota_x"'] & \coprod_{x:K} A_x
\end{tikzcd}$$

ι_y jest kanonicznym koproduktowym morfizmem z $(\coprod_{K \setminus \{y\}} 0 \sqcup A_y)$ w $\coprod_{x:K} A_x$, zaś ι^0_y jedynym koproduktowym włożeniem. Zatem kwadrat jest pullbackiem na mocy quasiekstensywności. $\square$

Twierdzenie 2.3.6 (Charakteryzacja koproduktów quasiekstensywnych w kategoriach skończenie zupełnych)**.** *Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią skończenie zupełną. Następujące warunki są równoważne:*

1. *$\mathbb{C}$ jest quasiekstensywna*
2. *istnieje sprzężenie pomiędzy funktorem globalnych części i funktorem koproduktu $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ zachowujące strukturę rozwłóknień, monoidalną i produkty binarne na bazach*
3. *istnieje sprzężenie pomiędzy funktorem globalnych części i funktorem koproduktu $fam(\mathbb{C}) \rightleftharpoons cod(\mathbb{C})$ zachowujące strukturę rozwłóknień*
4. *dla każdego zbioru K, kanoniczny funktor $\coprod \colon \mathbb{C}^K \to \mathbb{C}/(\coprod_K 1)$ zadaje sprzężenie, którego jedność jest izomorfizmem*

Dowód. ($1 \longrightarrow 2$). Zauważmy, że we wszystkich dowodach powołujących się na ekstensywność, korzystaliśmy de facto z ekstensywności wzdłuż morfizmów koproduktowych. Jedynym nieoczywistym miejscem jest pokazanie zachowywania kartezjańskich morfizmów przez $\coprod$. Niech więc $\langle (f_x)_{x:K}, \phi \rangle \colon (A_x)_{x:K} \to (B_x)_{x:L}$ będzie kartezjańskim morfizmem w $fam(\mathbb{C})$. Skonstruujemy rodzinę podwójnych kwadratów parametryzowaną przez $x \colon K$:

$$\begin{tikzcd}
B_{\phi(x)} \arrow[r, "\iota^B_{\phi(x)}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \coprod_{x:K} B_{\phi(x)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \coprod_{x:L} B_x \arrow[d, "\coprod_L !"] \\
1 \arrow[r, "x"'] & \coprod_K 1 \arrow[r, "\coprod_{x:K} \phi(x)"'] & \coprod_L 1
\end{tikzcd}$$

gdzie wszystkie kwadraty są pullbackami na mocy quasiekstensywności. Ponieważ morfizm $\langle (f_x)_{x:K}, \phi \rangle$ jest kartezjański, to jego każdy komponent f_x zadaje izomorfizm pomiędzy $B_{\phi(x)}$ a A_x, więc także $\iota^B_{\phi(x)} \circ f_x \colon A_x \to \coprod_{x:K} B_{\phi(x)}$ tworzy pullback i na mocy quasiekstensywności $\coprod_{x:K} f_x$ jest kartezjański.

$(2 \longrightarrow 3)$. Oczywiste.

$(3 \longrightarrow 4)$. Natychmiast z dowodu wniosku 2.3.1.

$(4 \longrightarrow 1)$. Podpierając się wnioskiem 2.3.4 wystarczy, że pokażemy quasiekstensywność na koproduktach obiektów końcowych. Weźmy przemienny kwadrat:

$$\begin{tikzcd} A_x \arrow[r, "\iota^A_x"] \arrow[d, "!"'] & \coprod_{x:K} A_x \arrow[d, "\coprod_K !"] \\ 1 \arrow[r, "\iota_x"'] & \coprod_K 1 \end{tikzcd}$$

Morfizm $\coprod_K ! \colon \coprod_{x:K} A_x \to \coprod_K 1$ został zmapowany przez funktor koproduktu z kolekcji $(A_x)_{x:K}$. Jeżeli weźmiemy jego pullback wzdłuż ι_x, to otrzymamy P_x i izomorfizm $\eta_x \colon A_x \to P_x$. Więc A_x jest także pullbackiem. □

2.4. (Kontr)przykłady

W tym rozdziale prześledzimy kilka konkretnych przykładów aproksymacji pomiędzy monoidalnymi rozwłóknieniami $\mathit{fam}(\mathbb{C})$ i $\mathit{cod}(\mathbb{C})$. Zaczniemy od zbadania prostej sytuacji dobrze charakteryzującej to, co dzieje się w nie-globalnie rozłącznych kategoriach („pozornego dodawania informacji” do kolekcji obiektów). Później, zobaczymy kategorię, przy której następuje całkowita zapaść pojęcia indeksowania, pomimo zachowywania informacji o kolekcjach wejściowych (będzie to spowodowane brakiem uniwersalności koproduktów). Dalej, przypadek kategorii wymuszającej przeprowadzenie aproksymacji niejako „w drugą stronę”, aniżeli czyniliśmy to wcześniej, dla otrzymania jakiegokolwiek sensownego pomostu pomiędzy światem wzbogaconym a wewnętrznym. I w końcu, zamkniemy rozdział rozważając globalne przejście z dwukategorii do 2-kategorii, jako ilustrację sprzężenia kategorii ekstensywnych o niepodzielnych całościach.

2.4.1. Aproksymacja w $\mathbf{Set}/2$

Kategoria $\mathbf{Set}/2$ to „płat” w $\mathbf{Set}$ nad zbiorem dwuelementowym $2 = \{0, 1\}$: obiektami są funkcje $a \colon A \to 2$, $b \colon B \to 2$, a morfizmami $a \longrightarrow b$, funkcje $f \colon a \to b$ takie, że $a = b \circ f$. Myślimy o obiektach w $\mathbf{Set}/2$ jak o parach zbiorów $\langle a^{-1}[\{0\}], a^{-1}[\{1\}] \rangle$, a o morfizmach $f \colon \langle A_0, A_1 \rangle \to \langle B_0, B_1 \rangle$ jak o parach funkcji $\langle f{\downarrow}_{A_0} \colon A_0 \to B_0, f{\downarrow}_{A_1} \colon A_1 \to B_1 \rangle$. W rzeczywistości kategoria $\mathbf{Set}/2$ jest równoważna[9] kategorii $\mathbf{Set}^2 \approx \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$.

Kategoria $\mathbf{Set}/2$ jest toposem Grothendiecka[10], więc w szczególności jest skończenie zupełna i posiada wszystkie $\mathbf{Set}$-indeksowane uniwersalne koprodukty. Ciekawą własnością $\mathbf{Set}/2$ jest to, że jej obiekt terminalny $1 = \langle \{*\}, \{*\} \rangle$ ma nietrywialną koproduktową

[9]Równoważność pomiędzy kategoriami $\mathbf{Set}/K$ i $\mathbf{Set}^K$ staje się jasna, kiedy uzmysłowimy sobie, że jest to klasyczna odpowiedniość między indeksowaniem „płaskim”, a indeksowaniem „punktowym”.

[10]Dla dowolnej małej kategorii $\mathbb{C}$, kategoria presnopów $\mathbf{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$ jest toposem Grothendiecka [Mac94, Gol06].

dekompozycję — na dwa obiekty — lewą „połówkę” $\frac{1}{2}_L = \langle\{*\}, \{\}\rangle$ i prawą „połówkę” $\frac{1}{2}_R = \langle\{\}, \{*\}\rangle$ o własności $1 \approx \frac{1}{2}_L \sqcup \frac{1}{2}_R$. Czyli podstawową jednostką „budującą” $\mathbf{Set}/2$ nie jest obiekt końcowy, a „lewa i prawa połówka elementu”[11]. W rezultacie, części obiektu nad całym elementem nie zawsze muszą być (i z reguły nie będą) rozłączne.

Obiekty w $\mathit{fam}(\mathbf{Set}/2)$ to *rodziny par* zbiorów indeksowane zbiorami, podczas gdy obiekty w $\mathit{cod}(\mathbf{Set}/2)$ to *pary rodzin* zbiorów indeksowanych zbiorami (podobnie morfizmy). Sprzężenie $\mathit{fam}(\mathbf{Set}/2) \rightleftharpoons \mathit{cod}(\mathbf{Set}/2)$ przyjmuje następującą postać:

$$\begin{tikzcd}
\langle A_{0x}, A_{1x}\rangle_{x:K} \arrow[r, "{\langle\langle id_{A_{0x}}, id_{A_{1x}}\rangle, \Delta\colon K \to K \times K\rangle}"] \arrow[dr, "{\langle\langle f_{1x}, f_{2x}\rangle_{x:K},\ \phi\colon K \to E_0 \times E_1\rangle}"'] & \langle A_{0x,y}, A_{1x,y}\rangle_{x,y:K} \arrow[d, "{\langle\langle f_{1x,y}, f_{2x,y}\rangle_{x,y:K},\ (\pi_1 \circ \phi) \times (\pi_2 \circ \phi)\colon K \times K \to E_0 \times E_1\rangle}"] \\
& \langle B_{0x,y}, B_{1x,y}\rangle_{x:E_0,y:E_1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{x:K}\langle A_{0x}, A_{1x}\rangle \arrow[r, "\coprod_K !"] \arrow[d, "\coprod_{x:K}\langle f_{1x}, f_{2x}\rangle"'] & \coprod_K\langle\{*\}, \{*\}\rangle \arrow[d, "\coprod_{x:K} \phi(x)"] \\
\langle B_0, B_1\rangle \arrow[r, "{\langle d_0, d_1\rangle}"'] & \langle E_0, E_1\rangle
\end{tikzcd}$$

gdzie $B_{0_{x,y}} = d_0^{-1}[\{x\}]$, $B_{1_{x,y}} = d_1^{-1}[\{y\}]$. Jedność jest tu morfizmem kartezjańskim indukowanym przez przeindeksowanie wzdłuż diagonali $\Delta\colon K \to K \times K$.

Kategorie $\mathit{cod}(\mathbf{Set}/2)$-relatywne odpowiadają parom klasycznych kategorii. Funktor koproduktu rozdziela kategorie z „podwójnymi” morfizmami na pary kategorii, zaś funktor globalnych części rozciąga pary kategorii, do kategorii z „podwójnymi” morfizmami na iloczynie kartezjańskim obiektów.

2.4.2. Aproksymacja w $1/\mathbf{Set}$

Kategoria $1/\mathbf{Set}$ to „kopłat” w $\mathbf{Set}$ pod obiektem końcowym. Ustalamy zbiór jednoelementowy $\{\bot\}$: obiektami w $1/\mathbf{Set}$ są funkcje $A^\bot\colon \{\bot\} \to A$, a morfizmami z obiektu $A^\bot\colon \{\bot\} \to A$ do obiektu $B^\bot\colon \{\bot\} \to B$, funkcje $f\colon A \to B$ takie, że $f(A^\bot(\bot)) = B^\bot(\bot)$. Słowem, o obiektach możemy myśleć jak o zwykłych zbiorach, zaś o morfizmach, jak o funkcjach częściowych — $f(a) = B^\bot(\bot)$ wtedy i tylko wtedy gdy f na elemencie a nie jest określona.

Kategoria $1/\mathbf{Set}$ posiada wszystkie granice i kogranice, nie istnieją w niej obiekty wykładnicze (poza trywialnymi). Ciekawą własnością $1/\mathbf{Set}$ jest to, że ma obiekt początkowy równy obiektowi końcowemu[12]. Zauważmy jeszcze, że dowolna suma na obiekcie końcowym jest po prostu izomorfizmem. Stąd obiekty, na jakie mapuje kolekcje funktor $\coprod\colon \mathit{fam}(1/\mathbf{Set}) \to$

[11] Zauważmy też, że nie $\{1\}$, a właśnie zbiór $\{\frac{1}{2}_L, \frac{1}{2}_R\}$ jest zbiorem generującym $\mathbf{Set}/2$.

[12] Zatem obiekt początkowy nie jest ścisły, co z kolei mówi, że kategoria nie jest dystrybutywna, czyli nie jest też ekstensywna, więc nawet nie wszystkie binarne koprodukty są uniwersalne.

cod(1/**Set**), posiadają tylko jedną część globalną — samą siebie. Rozpisanie definicji sprzężenia *fam*(1/**Set**) $\rightleftharpoons$ *cod*(1/**Set**) wygląda teraz następująco:

$$
\begin{tikzcd}
(A_x)_{x:K} \arrow[r, "(\iota^A_x)_{x:K}"] \arrow[dr, "(f_x)_{x:K}"'] & \coprod_{x:K} A_x \arrow[d, "h"] \\
& \overline{B}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{x:K} A_x \arrow[r, "!"] \arrow[d, "h"'] & \{\} \arrow[d, "!"] \\
B \arrow[r, "b"'] & C
\end{tikzcd}
$$

gdzie ι^A_x to koproduktowe włożenia, $\overline{B}$ jest zbiorem tych elementów z B na których $b\colon B \to C$ jest nieokreślona, a h to jedyny morfizm z definicji koproduktu. Spróbujmy zrozumieć, co stało się w tym przykładzie. Sklejając kolekcję obiektów $(A_x)_{x:K}$, a potem biorąc jej globalne części, nie zatraciliśmy co prawda jakichkolwiek informacji wejściowych — $\coprod_{x:K} A_x$ ma dokładnie takie same koelementy co $(A_x)_{x:K}$, ale zmieniliśmy całkowicie strukturę indeksowania — indeksy zostały zgubione.

Naturalnie pojawia się tu pytanie, czy nie dałoby się znaleźć jakiegoś „lepszego” sprzężenia, zachowującego więcej ze struktury kolekcji obiektów. W rzeczy samej, już dość naiwnym przedsięwzięciem było wystartowanie od funktora globalnych sekcji indeksu. Dla dowolnej kategorii $\mathbb{C}$ pełną informację o obiekcie dają nam *wszystkie* morfizmy wchodzące w dany obiekt (wniosek z lematu Yonedy), więc pełną strukturę fundamentalnego indeksowania dostajemy biorąc *wszystkie* „elementy indeksów”, a nie tylko „globalne elementy indeksów”. Oczywiście dla pewnych kategorii „globalne elementy indeksu” pokrywają cały indeks wejściowy (niekoniecznie rozłącznie — np. jak miało to miejsce w **Set**/2), ale dla innych kategorii tak już być nie musi. Za to możliwe, że wtedy będzie istniał inny obiekt, oznaczmy go G, taki, że „G-elementy indeksu” pokryją dobrze, albo choćby lepiej niż „elementy globalne”, indeks wejściowy. Można by nawet w pierwszym odruchu sądzić, że wybór obiektu końcowego na G był przeprowadzony w jakimś sensie ad hoc — dlaczego akurat obiekt końcowy miałby w jakimkolwiek sensie lepiej opisywać pozostałe obiekty, niż którykolwiek inny? Po chwili zastanowienia można jednak odeprzeć: po pierwsze — jak pokazaliśmy, istnieje szeroka klasa kategorii, dla których „elementy globalne” dają sensowne informacje; po drugie — na któryś z obiektów musieliśmy się zdecydować, a w kategoriach zupełnych jedynym obiektem, o którym na pewno wiemy, że istnieje jest właśnie obiekt końcowy; i w końcu po trzecie, w ogólnym przypadku biorąc dowolny obiekt nie mielibyśmy żadnego jawnego sposobu na skonstruowanie sprzężenie — obiekt końcowy ma tę przyjemną własność, że z dowolnego obiektu istnieje doń zawsze jeden i tylko jeden morfizm, natomiast biorąc dowolne G nie mielibyśmy jak poskładać koproduktów $\coprod_{x:K} ?_x \colon \coprod_{x:K} A_x \to \coprod_K G$, nie mając gwarancji że $?_x$ istnieje, a nawet gdyby istniało, nie wiedząc dokładnie które z $?_x$ włączyć do budowy.

Akurat kategoria 1/**Set** daje nam inny naturalny wybór na G, niż obiekt końcowy — zbiór jednoelementowy $\{*\}$. Jeżeli rozszerzymy $Hom(G, -)$ do funktora „G-części”, otrzymamy następującą postać lewego sprzężenia:

$$
\begin{tikzcd}
(A_x)_{x:K} \arrow[r, "(id_{A_x})_{x:K}"] \arrow[dr, "\langle (f_x)_{x:K}, \phi:K\to C\rangle"'] & (A_x)_{x:K} \arrow[d, "\langle (f_x)_{x:K}, \phi:K\to C\rangle"] \\
& (b^{-1}[\{y\}])_{y:C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{x:K} A_x \arrow[r, "\coprod_K *"] \arrow[d, "\coprod_{x:K} f_x"'] & \coprod_K \{*\} \arrow[d, "\coprod_{x:K} \phi(x)"] \\
B \arrow[r, "b"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Jedność sprzężenia jest izomorfizmem, zaś kojedność obcina funkcje częściowe do ich dziedziny.

Samo sprzężenie zachowuje struktury rozwłóknień i monoidalne, a także granice w kategoriach bazowych, więc mamy zadaną także naturalną odpowiedniość pomiędzy kategoriami 1/**Set**-wzbogaconymi i 1/**Set**-wewnętrznymi — z jednej strony jest to włożenie, a z drugiej wycięcie tych części kategorii, które niosą ze sobą jakąkolwiek nieokreśloność.

2.4.3. Aproksymacja w ωSet

ω**Set** jest swoistego rodzaju połączeniem dwóch uniwersów z dwóch krańcowo oddalonych światów — klasycznego uniwersum teoriomnogościowego i uniwersum realizowalnego[13]. W klasycznej teorii mnogości jeżeli mamy zbiór A i „element" x, to albo x należy do A, albo nie. Świat realizowalny jest już o wiele bardziej skomplikowany. Niech np. A będzie zbiorem tych liczb naturalnych n, że n jest poprawnym kodem maszyny Turinga T i T zatrzymuje się na pustej taśmie[14]. Weźmy teraz dowolną liczbę naturalną x. Oczywiście nadal mamy albo „$x \in A$", albo „$x \notin A$". Tylko skąd wiemy, która ewentualność zachodzi? Jeżeli faktycznie „$x \in A$", to łatwo jesteśmy w stanie skonstruować pewien dowód k pokazujący zatrzymanie maszyny. Jeżeli jednak „$x \notin A$", to w ogólności możemy nie być w stanie. Postawmy teraz trochę trudniejsze pytanie — niech B będzie dowolnym zbiorem par $\langle n, m\rangle$, gdzie n, m są naturalne. Czy „$\pi_1[B] \subset A$"? Znowuż nadal albo pierwsza współrzędna każdego elementu x z B należy do A, albo nie. Ale teraz najczęściej nie będziemy w stanie ani udowodnić, że taka inkluzja zachodzi, ani udowodnić, że nie zachodzi. W końcu rozważmy sytuację, w której mamy do dyspozycji dowolny zbiór C elementów postaci $\langle n, q\rangle$, gdzie n jest liczbą naturalną, zaś $q = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy n-ta maszyna Turinga zatrzymuje się na pustej taśmie. Tym razem pytania czy „$\pi_1[C] \subset A$" stają się trywialne. Morał z tych dywagacji jest dwutorowy — po pierwsze: w rzeczywistości do udzielenia odpowiedzi na pytanie, czy jakiś element należy do danego zbioru, czasami potrzebna jest nam dodatkowa wiedza o tym elemencie (np. z jakiego innego zbioru on pochodzi); a po drugie: udzielenie twierdzącej odpowiedzi zawsze musi być związane z dowodem danego faktu[15]. Jako, że klasyczne teoriomnogościowe uniwersum nie pozwala nam rozumować w ten sposób, spróbujemy teraz zbudować uniwersum, które będzie włączało aspekt obliczalności. Zbiory $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ w naszym uniwersum będą złożone z par $\langle x, E_x\rangle$, gdzie E_x jest niepustym podzbiorem liczb naturalnych. Intuicyjnie x będzie dowolnym elementem, a E_x będzie zbiorem dowodów mówiących, że „$x \in \mathbb{A}$". Piszemy A jako oznaczenie $\pi_1[\mathbb{A}]$. Funkcje $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, to klasyczne funkcje $f\colon A \to B$ o tej własności, że istnieje częściowo-rekurencyjna funkcja e, taka, że dla każdego $x \in A$ mamy $\forall_{n \in E_x} e(n) \in E_{f(x)}$. Tj. funkcje muszą zachowywać w sposób częściowo-rekurencyjny dowody należenia do zbiorów. Tak skonstruowane uniwersum tworzy kategorię, którą oznaczamy ω**Set**.

ω**Set** jest quasitoposem[16]. ω**Set** nie posiada wszystkich **Set**-indeksowanych koproduktów, nawet na obiekcie końcowym. Aby to zobaczyć, spróbujmy skonstruować $\coprod_{2^{\aleph_0}} 1$. W takim obiekcie, jako, że musiałby mieć on $2^{\aleph_0}$ globalnych elementów, istniałyby przynajmniej

[13]Formalnie można pokazać, że ω**Set** jest „dopełnioną sumą" kategorii **Set** i **Per** [Jac01] .

[14]Zakładamy, że mamy tutaj ustalone rekurencyjne kodowanie.

[15]Odpowiedzi negatywnej, oczywiście też. Tutaj po prostu polaryzujemy sytuację — zamiast pytania czy $x \notin A$ możemy zadać pytanie czy $x \in \overline{A}$, gdzie $\overline{A}$ to zbiór elementów o własnościach „nie A".

[16]Spełnia wszystkie aksjomaty toposu elementarnego, za wyjątkiem istnienia klasyfikatora podobiektów dla wszystkich monicznych strzałek. W quasitoposach wymagane jest klasyfikowanie wyłącznie regularnych monomorfizmów.

dwa różne x i y, takie, że $E_x \cap E_y \neq \emptyset$. Niech $n \in E_x \cap E_y$ i weźmy obiekt P, którego pewne dwa elementy $a\colon 1 \to P$ i $b\colon 1 \to P$ mają rozłączne zbiory dowodów. Teraz możemy w takiej kolejności ustawić rodzinę elementów $v\colon 1 \to P$ aby indukowany morfizm z koproduktu $h\colon \coprod_{2^{\aleph_0}} 1 \to P$ musiał spełniać własność $h \circ x = a$ i $h \circ y = b$. Stąd dochodzimy do sprzeczności, bo n musiałoby być tłumaczone zarówno na $k \in E_a$ jak i $l \in E_b$, ale w wyborze P żądaliśmy $E_a \cap E_b = \emptyset$.

Ostatnia obserwacja pokazuje, że funktor globalnych części $\omega\mathbf{Set}$ nie posiada lewego sprzężonego. Nie widać też zbytnio żadnego innego sensownego wyboru „G-części". Zbadajmy jednak trochę bliżej związek tej kategorii z klasycznymi zbiorami. Najpierw zauważmy, że istnieje wierne i pełne włożenie $\nabla\colon \mathbf{Set} \to \omega\mathbf{Set}$ zadane w następujący sposób:

- $\nabla(A) = \{(x, \mathbf{N})\colon x \in A\}$
- $\nabla(f) = f$

∇ mówi, że klasyczne zbiory to te ω-zbiory, które ignorują dowody tego, że ich elementy do nich należą[17]. ∇ jest prawym sprzężonym do funktora zapominania $U\colon \omega\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, który okazuje się być po prostu funktorem globalnych sekcji. Jeżeli weźmiemy fundamentalne rozwłóknienie dla $\omega\mathbf{Set}$ i przeciągniemy je przez ∇, dostaniemy rozwłóknienie równoważne $\mathit{fam}(\omega\mathbf{Set})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathit{Fam}(\omega\mathbf{Set}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathit{fam}(\omega\mathbf{Set})"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \omega\mathbf{Set}^{\to} \arrow[d, "\mathit{cod}(\omega\mathbf{Set})"] \\
\mathbf{Set} \arrow[r, "\nabla"'] & \omega\mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

Zatem sprzężenie z kategorii bazowej $U \leftrightarrows \nabla$ podnosi się do sprzężenia całych rozwłóknień. Takie sprzężenie dodatkowo zachowuje struktury monoidalne i produkty w kategoriach bazowych. Zwróćmy uwagę, że aproksymację, którą tutaj mamy, otrzymaliśmy biorąc funktor *prawy* sprzężony do funktora globalnych części, a nie *lewy*, jak miało to miejsce w poprzednich sytuacjach.

Prawy sprzężony do funktora globalnych części wymusza w szczególności związek: $\mathit{Hom}(B, (A_x)_{x:K}) \approx \mathit{Hom}(B \longrightarrow 1, R((A_x)_{x:K}))$ i co za tym idzie nie istnieje dla kategorii[18] $1/\mathbf{Set}$, ani dla kategorii[19] $\mathbf{Set}/2$. Przechodząc do ogólnego przypadku, obserwujemy, że już sam funktor globalnych sekcji rzadko zachowuje koprodukty, więc jeszcze rzadziej miewa prawy sprzężony.

2.4.4. Aproksymacja w Cat

Zajmiemy się teraz przykładem struktury, względem której zarówno kategorie wzbogacone jak i wewnętrzne pełnią centralną rolę w całej teorii kategorii.

Cat jest kategorią kartezjańsko domkniętą, globalnie rozłączną, posiada wszystkie granice i kogranice. **Cat** nie jest lokalnie kartezjańsko domknięta — nie każdy funktor pullbacku

[17] „wszystko jest dowodem należenia do zbioru, dla tych elementów, które do zbioru należą"
[18] Nie sposób ustalić funkcję indeksującą kojedność.
[19] Choćby z powodów ilościowych.

zachowuje koekwalizatory. Istnieje natomiast prosta charakteryzacja obiektów $F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ wzdłuż których funktor pullbacku posiada prawy sprzężony — są to dokładnie te obiekty, które spełniają warunek Conduché-Girauda [Gir64][20]: jeżeli $F(f) = l \circ k$, to istnieje faktoryzacja $f = b \circ a$, że $F(a) = k$, $F(b) = l$ i ponadto taka faktoryzacja jest jedyna z dokładnością do wertykalnych morfizmów:

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, dashed, "{a,F(a)=k}"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
\mathbb{A} \arrow[ddd, "F"'] & & Y \arrow[r, dashed, "{b,F(b)=l}"'] & Z \\
 & & & \\
 & I \arrow[dr, "k"'] \arrow[drr, bend left, "F(f)"] & & \\
\mathbb{B} & & J \arrow[r, "l"'] & K
\end{tikzcd}
$$

Koprodukty w **Cat** są ekstensywne. Rozłączność jest konsekwencją tego, że koprodukty kategorii są nadbudowane na koproduktach z **Set**, a uniwersalność staje się jasna, kiedy przypomnimy sobie (wniosek 2.2.3), że wystarczy ją pokazać na obiekcie końcowym (samo istnienie funktora $\mathbb{C} \longrightarrow \coprod_K 1$ wymusza na $\mathbb{C}$ rozłączne włókna).

Kolekcje w rozwłóknieniu $\mathit{fam}(\mathbf{Cat})$, to indeksowane zbiorami kolekcje kategorii. O kolekcjach w rozwłóknieniu $\mathit{cod}(\mathbf{Cat})$ możemy myśleć jak o kategoriach indeksowanych, w których pojęcie przeindeksowania nie zachowuje się „funktorialnie", a tylko „relacyjnie"[21]. Indukowane sprzężenie pomiędzy rozwłóknieniami przyjmuje postać:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{A}_x)_{x:K} \arrow[r, "(id_{\mathbb{A}_x})_{x:K}"] \arrow[dr, "{\langle (F_x)_{x:K}, \phi : K \to C_0 \rangle}"'] & (\mathbb{A}_x)_{x:K} \arrow[d, "{\langle (F_x)_{x:K}, \phi : K \to C_0 \rangle}"] \\
 & (\mathbb{B}_y)_{y:C_0}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{x:K} \mathbb{A}_x \arrow[r, "\coprod_K !"] \arrow[d, "\coprod_{x:K} F_x"'] & \coprod_K 1 \arrow[d, "\coprod_{x:K} \phi(x)"] \\
\mathbb{B} \arrow[r, "G"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

Gdzie $\mathbb{B}_y$ to włókno $\mathbb{B}$ nad obiektem y. Akcja przechodzenia z kategorii indeksowanych do kolekcji kategorii i na powrót, po prostu wycina wszystkie niewertykalne morfizmy.

Pojęcie kategorii **Cat**-wzbogaconych jest oczywiście pojęciem klasycznych 2-kategorii, a pojęcie **Cat**-wewnętrznych — pojęciem (ścisłych) dwukategorii [Ben67, Kas74]. Aproksymacja 2-$\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{DoubleCat}$ to zwykłe zanurzenie 2-kategorii w dwukategorie. Aproksymacja w przeciwnym kierunku, tj. $\mathbf{DoubleCat} \longrightarrow$ 2-**Cat**, usuwa krzyżowe dwumorfizmy, pozostawiając tylko leżące nad równoległymi 1-morfizmami.

Choć aproksymacja pomiędzy 2-kategoriami i dwukategoriami indukowana przez funktory koproduktu i globalnych części przebiega wyjątkowo gładko i zgodnie ze wszelkimi oczekiwaniami, w praktyce pojęcie całego rozwłóknienia $\mathit{cod}(\mathbf{Cat})$ rzadko się pojawia (jak już

[20] Girud pokazał także, że ten warunek jest równoważny kociągłości funktora pullbacku.

[21] Mówiąc formalnie, przeindeksowania są dystrybutorami [Ben00].

zauważyliśmy wyżej $cod(\mathbf{Cat})$ nie ma nawet międzywłóknowych produktów). Twierdzenie Conduché-Girauda każe nam szukać „dobrych" rozwłóknień w podkategorii $\mathbf{Cat}^{\to}$ funktorów spełniających warunek „podnoszenia". Zazwyczaj jako tę kategorię wybiera się kategorię rozwłóknień **Fib**. Claudio Hermida [Her99] pokazał, że $\mathbf{Fib} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ tworzy naprawdę 2-rozwłóknienie. Zauważmy jeszcze, że aproksymacje **Set**-indeksowanej kolekcji kategorii, przechodziły na kategorie indeksowane leżące nad dyskretnymi bazami — czyli przechodziły na obiekty właśnie z **Fib**. Może więc sensowniej byłoby rozważać kategorie **Fib**-relatywne — tj. dwukategorie, w których indeksowanie przebiega w funktorialny sposób, a operacje kategoryjne (złożenie i identyczność) zachowują tę strukturę?

Jeżeli weźmiemy morfizm $f\colon A \to B$ i rozważymy jego możliwe przeindeksowania wzdłuż morfizmów bazowych $g\colon C \to A$ i $h\colon B \to D$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, squiggly, "g"'] & A \arrow[d, "f"'] & \\ & B \arrow[r, squiggly, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

to zobaczymy, że jest on „korozwłókniony" na kodziedzinie i „rozwłókniony" na dziedzinie. Natomiast sam fakt, że w kategoriach z pullbackami, f jest *także* „rozwłókniony" na kodziedzinie wynika z istnienia prawego sprzężonego do operacji składania[22]. Prostym podejściem mogłoby być dalsze ograniczenie $\mathbf{Cat}^{\to}$ do funktorów będących zarówno rozwłóknieniami, jak i korozwłóknieniami. Jednak taki wymóg zamiast rozwiązywać problem, tylko by go maskował. Podczas wprowadzania pojęcia kategorii relatywnych, obiekty z kategorii służyły wyłącznie do indeksowania morfizmów. Tak rzeczywiście jest w kategoriach wzbogaconych, wewnętrznych, czy T-multikategoriach. Jest to zgodne z naszymi intuicjami odnośnie pojęcia kategorii i dlatego uzasadnione na tym poziomie abstrakcji wydawało się zdegradowanie roli obiektów tylko do czynności indeksującej. W takiej sytuacji indeksowanie dziedzinowe i kodziedzinowe morfizmów przebiega w tym samym „kierunku". Jednak już np. dla C-operadów Bayeza i Dolana [BaD97] wewnętrzna struktura obiektów zaczyna mieć znaczenie[23]. Kategorie relatywne wymuszając indeksowanie o tej samej wariancji dziedziny i kodziedziny, nie nadają się do rozważań tego typu struktur[24].

[22]Korozwłóknienie jest rozwłóknieniem wtedy i tylko wtedy gdy każdy funktor przeindeksowujący posida prawy sprzężony.

[23]Np. możemy wyrazić fakt, że pewne obiekty są podobiektami innych i w związku z tym morfizmy o dziedzinie nadobiektu są też morfizmami z podobiektu; dualnie dla kodziedzin.

[24]Właściwym uniwersum wydają się być tutaj tzw. „fibred spans" ze skośną strukturą monoidalną na kategoriach totalnych, co jest obiektem dalszych badań autora.

Podsumowanie

Praktycznie cały materiał tej pracy powstał w sierpniu 2007 jako odpowiedź na pytania, które pojawiły się podczas mojej dyskusji z Martinem Hylandem na multikonferencji we Wrocławiu i nie zawiera późniejszych badań. Niektóre z prezentowanych tu wyników, okazały się być już znane. I tak:

1. Silne kategorie monoidalne są rozważane także w wielu innych miejscach. Dobrą ich prezentację można znaleźć u Michaela Shulmana [Shu07]. Wkładem niniejszej pracy jest zaprezentowanie kategorii monoidalnych w ogólniejszej formie, w której przeindeksowania są (niesilnymi) monoidalnymi funktorami i pokazanie jak struktura monoidalna zadana na samych włóknach rozszerza się na całe rozwłóknienie.

2. Kategorie relatywne względem monoidalnych rozwłóknień w nieco mniej ogólnej formie zostały wprowadzone przez Gouzou i Gruniga w pracy [GaG76]. Inne podejście do połączenia kategorii wzbogaconych z wewnętrznymi, opiera się na idei kategorii wzbogaconych bikategorią i było studiowane min. w pracy Streeta [Str83] i obszerniej u Bettiego, Carboniego, Streeta i Waltersa w [Bet83]. Ich podejście, z przyczyn technicznych, uogólnia kategorie wzbogacone tylko w przypadku kategorii monoidalnych posiadających „odpowiednio porządne" koprodukty. Wkładem naukowym niniejszej pracy, w tym kontekście, jest przeprowadzenie pełnego dowodu 2-kategoryjności kategorii relatywnych, funktorów relatywnych i relatywnych naturalnych transformacji względem dowolnego monoidalnego rozwłóknienia nad kartezjańską bazą, a także zdefiniowanie ogólnego pojęcia eksternalizacji kategorii relatywnej, obejmującego pojęcia klasycznej eksternalizacji kategorii wewnętrznych i konstrukcji kategorii podkładowej, kategorii wzbogaconej.

3. Wyniki zawarte w rozdziale drugim są w całości nowe. Praca wprowadza pojęcie kategorii quasiekstensywnej jako kategorii $\mathbb{C}$, dla której kanoniczne włożenia $\coprod \colon \mathbb{C}^K \to \mathbb{C}/(\coprod_K 1)$ są kategoryjnymi reflektorami i dowodzi kolejno trzech twierdzeń charakteryzacyjnych w kategoriach skończenie zupełnych łączących istnienie koproduktów, koproduktów ekstensywnych i koproduktów quasiekstensywnych z istnieniem globalnego sprzężenia pomiędzy **Set**-indeksowanym rozwłóknieniem $\mathit{fam}(\mathbb{C})$, a rozwłóknieniem fundamentalnym $\mathit{cod}(\mathbb{C})$. Te wyniki są dalej wykorzystywane w dowodzie istnienia 2-sprzężenia kategorii wzbogaconych i kategorii wewnętrznych względem ustalonej skończenie zupełnej kategorii z ekstensywnymi koproduktami.

Podziękowania

Miejsce, w którym stoimy, zależy przynajmniej w tak samej mierze od ludzi, jakich spotykamy, jak od nas samych. Ja miałem to szczęście spotykać wielu wielkich ludzi. Dziękuję

Włodzimierzowi Holsztyńskiemu za jego artykuły i ciekawe dyskusje, w których miałem przyjemność uczestniczyć, będąc jeszcze we wczesnych klasach szkoły średniej. To on pierwszy wszczepił we mnie miłość do teorii kategorii i matematyki w ogólności. Gdyby nie Włodek, na pewno nie zajmowałbym się takimi zagadnieniami i pewnie nie byłoby mnie nawet na tej uczelni. Za sprawowanie pieczy nad pracą magisterską pragnę podziękować promotorowi. Dziękuję Andrzejowi Tarleckiemu za ukierunkowanie moich zainteresowań w stronę teoretycznych problemów informatyki, a także za to, że zawsze mogłem liczyć na jego pomoc. Dziękuję Pawłowi Urzyczynowi za pokazanie mi pięknego i bogatego świata logiki. Ich bedanke mich bei Thomas Streicher für seine Geduld beim Beantworten meiner Fragen, für interessante und wichtige Diskussionen sowie für den Hinweis auf die Arbeit von Gouzou und Grunig, die den Begriff der relativen Kategorien einführt. I am grateful to John Power for pointing out the concept of enrichment over locally cocomplete bicategories.

Dodatek A

Podstawowe pojęcia i definicje

W tym rozdziale przypomnimy podstawowe pojęcia, definicje i fakty wykorzystywane dalej w pracy.

A.1. Kategorie monoidalne

Wprowadzenie do kategorii monoidalnych można znaleźć w książkach [Mac97] i [Bor94].

Definicja A.1.1 (Kategoria monoidalna)**.** Kategorią monoidalną nazywamy trójkę $\langle \mathbb{C}, \otimes, I \rangle$, gdzie $\mathbb{C}$ jest kategorią, $\otimes$ funktorem $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, a I obiektem z $\mathbb{C}$, wyposażoną w naturalne izomorfizmy:

- $\alpha_{A,B,C} \colon (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$
- $l_A \colon I \otimes A \to A$
- $r_A \colon A \otimes I \to A$

spełniające następujące koherencyjne prawa:

- łączność

$$
\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha \otimes id"] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha"] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "id \otimes \alpha"']
\end{tikzcd}
$$

- jedynka

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes C \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "r \otimes id"'] & & A \otimes (I \otimes C) \arrow[dl, "id \otimes l"] \\
& A \otimes C &
\end{tikzcd}
$$

- równość jedynkowych włożeń — $l_I = r_I \colon I \otimes I \to I$

Definicja A.1.2 (Ścisła kategoria monoidalna)**.** Kategoria monoidalna jest ścisła jeżeli wszystkie izomorfizmy zapewniające koherencję są identycznościami.

Definicja A.1.3 (Funktor monoidalny)**.** Niech $\langle \mathbb{C}, \otimes^{\mathbb{C}}, I^{\mathbb{C}} \rangle$ i $\langle \mathbb{D}, \otimes^{\mathbb{D}}, I^{\mathbb{D}} \rangle$ będą dwiema monoidalnymi kategoriami. Monoidalnym funktorem $F \colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ nazywamy trójkę uporządkowaną $\langle \dot{F}, \theta, \xi \rangle$, gdzie:

- $\dot{F}$ jest funktorem $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$,
- θ naturalną transformacją $\dot{F}(-) \otimes^{\mathbb{D}} \dot{F}(-) \longrightarrow \dot{F}(- \otimes^{\mathbb{C}} -)$,
- ξ morfizmem $I^{\mathbb{D}} \longrightarrow \dot{F}(I^{\mathbb{C}})$

spełniającą następujące koherencyjne prawa łączności, prawostronnej i lewostronnej jedności. Dla uproszczenia notacji, jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumień, będziemy funktor $\dot{F}$ oznaczać także po prostu jako F.

- łączność

$$\begin{tikzcd}
(F(A) \otimes^{\mathbb{D}} F(B)) \otimes^{\mathbb{D}} F(C) \arrow[r, "\alpha^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, "\theta \otimes id"] & F(A) \otimes^{\mathbb{D}} (F(B) \otimes^{\mathbb{D}} F(C)) \arrow[d, "id \otimes \theta"] \\
F(A \otimes^{\mathbb{C}} B) \otimes^{\mathbb{D}} F(C) \arrow[d, "\theta"] & F(A) \otimes^{\mathbb{D}} F(B \otimes^{\mathbb{C}} C) \arrow[d, "\theta"] \\
F((A \otimes^{\mathbb{C}} B) \otimes^{\mathbb{C}} C) \arrow[r, "F(\alpha^{\mathbb{C}})"] & F(A \otimes^{\mathbb{C}} (B \otimes^{\mathbb{C}} C))
\end{tikzcd}$$

- prawostronna jedność

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes^{\mathbb{D}} I^{\mathbb{D}} \arrow[r, "id \otimes \xi^{\mathbb{D}}"] \arrow[d, "r^{\mathbb{D}}"] & F(A) \otimes^{\mathbb{D}} F(I^{\mathbb{C}}) \arrow[d, "\theta"] \\
F(A) & F(A \otimes^{\mathbb{C}} I^{\mathbb{C}}) \arrow[l, "F(r^{\mathbb{C}})"]
\end{tikzcd}$$

- lewostronna jedność

$$\begin{tikzcd}
I^{\mathbb{D}} \otimes^{\mathbb{D}} F(A) \arrow[r, "\xi^{\mathbb{D}} \otimes id"] \arrow[d, "l^{\mathbb{D}}"] & F(I^{\mathbb{C}}) \otimes^{\mathbb{D}} F(A) \arrow[d, "\theta"] \\
F(A) & F(I^{\mathbb{C}} \otimes^{\mathbb{C}} A) \arrow[l, "F(l^{\mathbb{C}})"]
\end{tikzcd}$$

Definicja A.1.4 (Silny funktor monoidalny)**.** Powiemy, że monoidalny funktor $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ zadany jako $\langle \dot{F}, \theta, \xi \rangle$ jest silny, jeżeli θ i ξ są izomorfizmami.

Definicja A.1.5 (Ścisły funktor monoidalny)**.** Powiemy, że monoidalny funktor $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ zadany jako $\langle \dot{F}, \theta, \xi \rangle$ jest ścisły, jeżeli θ i ξ są morfizmami *identycznościowymi.*

Definicja A.1.6 (Monoidalna naturalna transformacja)**.** Niech $\langle F, \theta, \xi \rangle$, $\langle G, \vartheta, \varsigma \rangle$ będą dwoma równoległymi funktorami pomiędzy monoidalnymi kategoriami $\langle \mathbb{C}, \otimes^{\mathbb{C}}, I^{\mathbb{C}} \rangle$ i $\langle \mathbb{D}, \otimes^{\mathbb{D}}, I^{\mathbb{D}} \rangle$. Monoidalna naturalna transformacja τ z funktora F do funktora G to naturalna transformacja $\tau\colon F \to G$ spełniająca dodatkowo następujące prawa:

- zachowywanie mnożenia

$$\begin{tikzcd}
F(A) \otimes^{\mathbb{D}} F(B) \arrow[r, "\tau_A \otimes^{\mathbb{D}} \tau_B"] \arrow[d, "\theta"'] & G(A) \otimes^{\mathbb{D}} G(B) \arrow[d, "\vartheta"] \\
F(A \otimes^{\mathbb{C}} B) \arrow[r, "\tau_{A \otimes^{\mathbb{C}} B}"'] & G(A \otimes^{\mathbb{C}} B)'
\end{tikzcd}$$

- zachowywanie jedynki

$$\begin{tikzcd} & I^{\mathbb{D}} \arrow[dl, "\xi"'] \arrow[dr, "\varsigma"] & \\ F(I^{\mathbb{C}}) \arrow[rr, "\tau_{I^{\mathbb{C}}}"'] & & G(I^{\mathbb{C}}) \end{tikzcd}$$

Definicja A.1.7 (Monoid)**.** Niech $\langle \mathbb{C}, \otimes, I \rangle$ będzie kategorią monoidalną. Monoid w kategorii $\mathbb{C}$, to trójka uporządkowana $\langle M, \mu\colon M \otimes M \to M, \eta\colon I \to M \rangle$, gdzie $M \in \mathbb{C}$, zaś $\mu\colon M \otimes M \to M$, a $\eta\colon I \to M$, spełniająca następujące prawa:

- łączność

$$\begin{tikzcd} (M \otimes M) \otimes M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\mu\otimes id"'] & & (M \otimes M) \otimes M \arrow[d, "id\otimes\mu"] \\ M \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M & M \otimes M \arrow[l, "\mu"] \end{tikzcd}$$

- jedynka

$$\begin{tikzcd} I \otimes M \arrow[r, "\eta\otimes id"] \arrow[dr, "r"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] & M \otimes I \arrow[l, "id\otimes\eta"'] \arrow[dl, "l"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Definicja A.1.8 (Homomorfizm monoidów)**.** Niech $\mathrm{M} = \langle M, \mu\colon M \otimes M \to M, \eta\colon I \to M \rangle$, $\mathrm{M}' = \langle M', \mu'\colon M' \otimes M' \to M, \eta'\colon I \to M' \rangle$ będą dwoma monoidami w kategorii monoidalnej $\langle \mathbb{C}, \otimes, I \rangle$. Homomorfizmem monoidów $h\colon \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ nazywamy morfizm $h\colon M \to M'$ spełniający następujące prawa:

- zachowujący złożenia

$$\begin{tikzcd} M \otimes M \arrow[r, "h\otimes h"] \arrow[d, "\mu"'] & M' \otimes M' \arrow[d, "\mu'"] \\ M \arrow[r, "h"'] & M' \end{tikzcd}$$

- zachowujący jedynki

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ M \arrow[rr, "h"'] & & M' \end{tikzcd}$$

Wniosek A.1.1. *Ścisłe kategorie monoidalne wraz ze ścisłymi monoidalnymi funktorami odpowiadają monoidom i homomorfizmom monoidów w kategorii monoidalnej* $\langle \mathbf{Cat}, \times, 1 \rangle$.

Wniosek A.1.2. *Monadą i morfizmem monad nazywamy odpowiednio monoid i homomorfizm monoidów w ścisłej kategorii monoidalnej* $\langle \mathbb{C}^{\mathbb{C}}, \circ, id_{\mathbb{C}} \rangle$.

A.2. Rozwłóknienia

Rozwłóknienie to kategoryjna abstrakcja pojęcia kolekcji obiektów. Wprowadzenie do teorii rozwłóknień można znaleźć w [Pho95, Jac01, Str99, Bor94, Joh03]. Pewne algebraiczne własności i to, jak rozwłóknienia powstają wewnątrz bikategorii, opisane zostało w pracy Rossa Streeta [Str80, Str87].

Definicja A.2.1 (Morfizm wertykalny)**.** Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie funktorem. Powiemy, że morfizm $v\colon X \to Y$ jest wertykalny, jeżeli $p(v) = id$.

Definicja A.2.2 (Morfizm kartezjański)**.** Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie funktorem. Powiemy, że morfizm $f\colon Y \to Z$ w kategorii $\mathbb{C}$ jest kartezjański, gdy dla dowolnego morfizmu $g\colon X \to Z$ i dekompozycji $p(g) = p(f) \circ k$ istnieje dokładnie jeden morfizm h, taki, że $p(h) = k$ i $g = f \circ h$:

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, dashed, "h"'] \arrow[drr, bend left, "g"] & & \\
\mathbb{C} \arrow[dd, "p"'] & & Y \arrow[r, "f"'] & Z \\
& p(X) \arrow[dr, "k"'] \arrow[drr, bend left, "p(g)"] & & \\
\mathbb{B} & & p(Y) \arrow[r, "p(f)"'] & p(Z)
\end{tikzcd}
$$

Definicja A.2.3 (Końcowe podniesienie)**.** Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie funktorem. Dla obiektu Z_K z kategorii $\mathbb{C}$ i morfizmu $j\colon J \to p(Z_K)$, powiemy, że morfizm *lift* $j\colon Z_J \to Z_K$ jest końcowym (albo kartezjańskim) podniesieniem j, jeżeli jest kartezjański i $p(\mathit{lift}\ j) = j$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d, "p"'] & Z_J \arrow[r, dashed, "\mathit{lift}\ j"] & Z_K \\
\mathbb{B} & J \arrow[r, "j"] & p(Z_K)
\end{tikzcd}
$$

Definicja A.2.4 (Rozwłóknienie)**.** Funktor $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ jest rozwłóknieniem jeżeli dla każdego obiektu Z_K i każdego morfizmu $j\colon J \to p(Z_K)$ istnieje końcowe podniesienie. Kategorię $\mathbb{C}$ nazywamy kategorią totalną, a kategorię $\mathbb{B}$ kategorią bazową rozwłóknienia.

Definicja A.2.5 (Korozwłóknienie)**.** Funktor $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ nazywamy korozwłóknieniem, jeżeli funktor $p^{op}\colon \mathbb{C}^{op} \to \mathbb{B}^{op}$ jest rozwłóknieniem.

Definicja A.2.6 (Włókno)**.** Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie rozwłóknieniem, a J obiektem z $\mathbb{B}$. Włóknem nad J nazywamy podkategorię $\mathbb{C}_J$ kategorii $\mathbb{C}$ tych morfizmów $f\colon A \to B$, dla których $p(f) = id_J$.

Definicja A.2.7 (Podzielone rozwłóknienie)**.** Powiemy, że rozwłóknienie $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ jest podzielone, jeżeli mamy przyporządkowanie każdej parze — obiekt Z_J z $\mathbb{C}$ leżący nad J i morfizm $j\colon I \to J$ z $\mathbb{B}$ — końcowego podniesienia *lift* $j\colon j^*(Z_J) \to Z_J$.

Twierdzenie A.2.1 (Funktory przeciwobrazu)**.** *Niech $p: \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ będzie podzielonym rozwłóknieniem, a $j: I \to J$ ustalonym morfizmem w kategorii bazowej. Przyporządkowanie $Z_J \mapsto j^*(Z_J)$ kanonicznie rozciąga się do funktora włókien $j^*: \mathbb{C}_J \to \mathbb{C}_I$ zwanego „funktorem przeciwobrazu j" lub „przeindeksowaniem wzdłuż j". Ponadto, dla dowolnych $j: I \to J$, $k: J \to K$ i $l: K \to L$ istnieją naturalne izomorfizmy:*

- $\eta^J: id_{\mathbb{C}_J} \to (id_J)^*$
- $\lambda^{j,k}: j^* \circ k^* \to (k \circ j)^*$

spełniające następujące prawa:

- *identyczność*

$$\begin{tikzcd}
(id_I)^* \circ j^* \arrow[r, "\lambda^{id_I,j}"] & j^* \arrow[d, leftrightarrow, "id"] & j^* \circ (id_J)^* \arrow[l, "\lambda^{j,id_J}"'] \\
& j^* \arrow[ul, "\eta^I \circ j^*"] \arrow[ur, "j^* \circ \eta^J"'] &
\end{tikzcd}$$

- *łączność*

$$\begin{tikzcd}
j^* \circ k^* \circ l^* \arrow[r, "j^* \circ \lambda^{k,l}"] \arrow[d, "\lambda^{j,k} \circ l^*"'] & j^* \circ (l \circ k)^* \arrow[d, "\lambda^{j,l \circ k}"] \\
(k \circ j)^* \circ l^* \arrow[r, "\lambda^{k \circ j,l}"'] & (l \circ k \circ j)^*
\end{tikzcd}$$

Definicja A.2.8 (Rozdzielone rozwłóknienie)**.** Powiemy, że rozwłóknienie $p: \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ jest rozdzielone, jeżeli jest podzielone i naturalne izomorfizmy z twierdzenia A.2.1 są identycznościami.

Definicja A.2.9 (Zewnętrzne rozwłóknienie)**.** Niech $\mathbb{B}$ będzie kategorią z pullbackami, a $\mathbb{C}$ kategorią wewnętrzną[1] względem $\mathbb{B}$. Definiujemy zewnętrzne (albo $\mathbb{B}$-indeksowane) rozwłóknienie $fam_{\mathbb{B}}(\mathbb{C}): Fam_{\mathbb{B}}(\mathbb{C}) \to \mathbb{B}$ następująco:

- obiekty we włóknie nad I, to morfizmy $x, y: I \to C_0$
- morfizmy we włóknie nad I z obiektu x do obiektu y, to morfizmy $f: I \to C_1$ takie, że $dom \circ f = x$ i $cod \circ f = y$; identycznością na x jest morfizm $i \circ x$, a złożenie f z g, takich, że $cod \circ f = dom \circ g$, zadajemy jako $comp \circ \langle f,_{C_0} g\rangle$, gdzie $\langle -,_{C_0} -\rangle$ jest pullbackową parą nad C_0
- kartezjańskie podniesienie morfizmu $k: I \to J$, to ten sam morfizm k

W przypadku $\mathbb{B} = \mathbf{Set}$ będziemy zewnętrzne rozwłóknienia oznaczać także $fam(\mathbb{C}): Fam(\mathbb{C}) \to \mathbf{Set}$

Definicja A.2.10 (Wewnętrzne rozwłóknienie)**.** Niech $\mathbb{B}$ będzie kategorią z pullbackami. Definiujemy wewnętrzne (albo fundamentalne) rozwłóknienie $cod(\mathbb{B}): \mathbb{B}^{\to} \to \mathbb{B}$ dla $\mathbb{B}$, jako funktor przypisujący morfizmom $f: A \to B$ ich kodziedziny B.

[1] Zobacz rozdział A.4.

Definicja A.2.11 (Wewnętrzna logika)**.** Niech $\mathbb{B}$ będzie kategorią z pullbackami. Definiujemy rozwłóknienie wewnętrznej logiki $sub(\mathbb{B})\colon Sub(\mathbb{B}) \to \mathbb{B}$ kategorii $\mathbb{B}$, jako funktor przypisujący klasom abstrakcji monomorfizmów[2] $m\colon A \to B$ ich kodziedziny B.

Definicja A.2.12 (Kartezjański funktor)**.** Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ i $q\colon \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ będą dwoma rozwłóknieniami. Kartezjańskim funktorem (albo funktorem rozwłóknień) $p \longrightarrow q$ nazywamy parę funktorów $\langle F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}, L\colon \mathbb{B} \to \mathbb{E}\rangle$, takich, że $q \circ F = L \circ p$ i F zachowuje kartezjańskie morfizmy:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{B} \arrow[r, "L"] & \mathbb{E} \end{tikzcd}$$

Definicja A.2.13 (Naturalna transformacja kartezjańskich funktorów)**.** Niech $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{B}$ i $q\colon \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ będą dwoma rozwłóknieniami, a $\langle F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}, L\colon \mathbb{B} \to \mathbb{E}\rangle$ i $\langle G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{D}, K\colon \mathbb{B} \to \mathbb{E}\rangle$ parą równoległych kartezjańskich funktorów. Naturalną transformacją kartezjańskich funktorów $\langle F, L\rangle \longrightarrow \langle G, K\rangle$ nazywamy parę naturalnych transformacji $\langle \tau\colon F \to G, \sigma\colon L \to K\rangle$ taką, że dla każdego obiektu $C \in \mathbb{C}$ zachodzi $q(\tau_C) = \sigma_{p(C)}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{B} \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & \mathbb{E} \end{tikzcd}$$

Definicja A.2.14 (Kartezjańska naturalna transformacja)**.** Naturalna transformacja kartezjańskich funktorów $\langle \tau, \sigma\rangle$ jest kartezjańska jeżeli każdy komponent τ jest kartezjańskim morfizmem (tj. τ powstaje jako kartezjańskie podniesienie σ).

Wniosek A.2.2. *Rozwłóknienia, kartezjańskie funktory i transformacje naturalne tworzą 2-kategorię* **Fib***.*

Wniosek A.2.3. *Rozwłóknienia, kartezjańskie funktory i kartezjańskie transformacje naturalne tworzą 2-kategorię* **CartFib***.*

Wniosek A.2.4. *Funktory kodziedzinowe* $\mathit{fib}\colon \mathbf{Fib} \to \mathbf{Cat}$ *i* $\mathit{cfib}\colon \mathbf{CartFib} \to \mathbf{Cat}$ *są rozwłóknieniami.*

A.3. Kategorie wzbogacone

Podstawową pracą studiującą kategorie wzbogacone strukturą monoidalną jest książka Maxwella Kellyego [Kel82]. Dobre wprowadzenie w tematykę można znaleźć także w [Bor94].

[2] $m\colon X \to B \approx n\colon Y \to B$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje izomorfizm $i\colon X \to Y$ taki, że $i \circ m = n$.

Bikategorie, będące „rozluźnioną” wersją pojęcia 2-kategorii zostały opisane w pracy Jeana Bénabou [Ben67].

Definicja A.3.1 (Kategoria wzbogacona)**.** Niech $\langle \mathbb{C}, \otimes, I \rangle$ będzie monoidalną kategorią. $\mathbb{C}$-wzbogacona kategoria składa się z:

- zbioru C_0,
- kolekcji $(C_{1\,x,y})_{x,y:C_0}$ obiektów kategorii $\mathbb{C}$
- kolekcji morfizmów $(comp_{x,y,z}\colon C_{1\,x,y} \otimes C_{1\,y,z} \longrightarrow C_{1\,x,z})_{x,y,z:C_0}$
- kolekcji morfizmów $(i_x\colon I \longrightarrow C_{1\,x,x})_{x:C_0}$

spełniających następujące prawa

- łączność mnożenia

$$\begin{tikzcd}
(C_{1_{x,y}} \otimes C_{1_{y,z}}) \otimes C_{1_{z,v}} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "comp \otimes id"'] & & C_{1_{x,y}} \otimes (C_{1_{y,z}} \otimes C_{1_{z,v}}) \arrow[d, "id \otimes comp"] \\
C_{1_{x,y}} \otimes C_{1_{z,v}} \arrow[dr, "comp"'] & & C_{1_{x,y}} \otimes C_{1_{y,v}} \arrow[dl, "comp"] \\
& C_{1_{x,v}} &
\end{tikzcd}$$

- neutralność jedynki

$$\begin{tikzcd}
C_{1_{x,x}} \otimes C_{1_{x,y}} \arrow[r, "comp"] & C_{1_{x,y}} & C_{1_{x,y}} \otimes C_{1_{y,y}} \arrow[l, "comp"'] \\
I \otimes C_{1_{x,y}} \arrow[u, "i_x \otimes id"] \arrow[ur, "l"'] & & C_{1_{x,y}} \otimes I \arrow[u, "id \otimes i_y"'] \arrow[ul, "r"]
\end{tikzcd}$$

Definicja A.3.2 (2-kategoria)**.** 2-kategorią nazywamy kategorię wzbogaconą strukturą monoidalną $\langle \mathbf{Cat}, \times, \mathbf{1} \rangle$. 2-kategorię[3] 2-kategorii, 2-funktorów i 2-naturalnych transformacji oznaczamy 2-**Cat**.

Definicja A.3.3 (Sprzężenie)**.** Sprzężenie w 2-kategorii $\mathbb{W}$, to czwórka uporządkowana $\langle f\colon A \rightarrow B, g\colon B \rightarrow A, \eta\colon id_A \rightarrow g \circ f, \epsilon\colon f \circ g \rightarrow id_B \rangle$, spełniająca warunki trójkąta:

– $(\eta \bullet id_g) \circ (id_g \bullet \epsilon) = id_g$

– $(id_f \bullet \eta) \circ (\epsilon \bullet id_f) = id_f$

gdzie $\circ$ jest zwykłym kategoryjnym złożeniem, natomiast $\bullet$ złożeniem *comp* z definicji kategorii wzbogacanej.

[3] Oczywiście odnosimy się tutaj do pojęć 2-kategorii względem dwóch kolejnych poziomów teoriomnogościowego uniwersum.

A.4. Kategorie wewnętrzne

Kategorie wewnętrzne pojawiają się najczęściej podczas omawiania rozwłóknień, jako alternatywny opis tychże[4]. Obszerne omówienie tych pojęć można znaleźć w książce Francisa Borceuxa [Bor94] i monografii Barta Jacobsa [Jac01]. Wprowadzenie do 2-kategorii i dwukategorii znajduje się w pracy Maxwella Kellyego i Rossa Streeta [Kas74].

Definicja A.4.1 (Kategoria wewnętrzna)**.** Niech $\mathbb{B}$ będzie kategorią z pullbackami. $\mathbb{B}$-wewnętrzna kategoria składa się z:

- obiektu $C_0 \in \mathbb{B}$,
- kolekcji $C_1 \in \mathbb{B}$ wraz z morfizmami indeksującymi $dom, cod\colon C_1 \to C_0$
- morfizmu $comp\colon C_2 \to C_1$, gdzie C_2 jest pullbackiem dom z cod i następujące diagramy są przemienne:

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C_1 \arrow[d, "dom"] \\ C_1 \arrow[r, "cod"'] & C_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \arrow[d, "cod"'] & C_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "comp"] & C_1 \arrow[d, "dom"] \\ C_0 & C_1 \arrow[l, "cod"] \arrow[r, "dom"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

- morfizmu $i\colon C_0 \to C_1$ spełniającego: $dom \circ i = cod \circ i = id_{C_0}$

spełniających następujące prawa:

- łączność mnożenia

$$\begin{tikzcd} C_3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & C_1 \arrow[d, "dom"] \\ C_2 \arrow[r, "cod \circ \pi_1"'] & C_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_3 \arrow[r, "id \times comp"] \arrow[d, "comp \times id"'] & C_2 \arrow[d, "comp"] \\ C_2 \arrow[r, "comp"'] & C_1 \end{tikzcd}$$

- neutralność jedynki

$$\begin{tikzcd} C_0 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "i \times id"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & C_2 \arrow[d, "comp"] & C_1 \times_{C_0} C_0 \arrow[l, "id \times i"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & C_1 & \end{tikzcd}$$

Definicja A.4.2 (Dwukategoria)**.** Dwukategorią nazywamy kategorię wewnętrzną względem kategorii **Cat**. 2-kategorię dwukategorii, dwufunkorów i dwunaturalnych transformacji oznaczamy **DoubleCat**.

[4]Dokładniej, kategorie wewnętrzne są 2-równoważne tzw. „małym” rozwłóknieniom.

Bibliografia

[BaD97] J. C. Baez, J. Dolan, *Higher-Dimensional Algebra III: n-Categories and the Algebra of Opetopes*, Advances in Mathematics, Volume 135, 1997.

[BaW02] M. Barr and C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, Version 1.1, 2002.

[Ben67] J. Béanabou, *Introduction to Bicategories*, Reports of the Midwest Category Seminar, Lecture Notes in Math. 47, Springer, 1967.

[Ben00] J. Béanabou, *Distributors at Work*, notatki z kursu na temat dystrybutorów wygłoszonego przez Jean Bénabou w czerwcu 2000 na TU Darmstadt, http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/∽streicher.

[Bet83] R. Betti, A. Carboni, R. Street, R. Walters, *Variation Through Enrichment*, Journal of Pure and Applied Algebra 29, 1983.

[Bor94] F. Borceux, *The Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge University Press, 1994.

[CSW94] F. Carboni, S. Lack, R. Walters, *Introduction to Extensive and Distributive Categories*, Journal of Pure and Applied Algebra 84, 145-158, 1993.

[Gir64] J. Giraud, *Méthode de la Descente*, Mémoires de la Société Mathématique de France, 2, 1964.

[GaG76] M. F. Gouzou and R. Grunig, *Fibrations Relatives*, Seminaire de Theorie des Categories, 1976.

[Gol06] R. Goldblatt, *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*, Dover Publications, Revised edition 2006.

[Her99] C. Hermida, *Some Properties of Fib as Fibred 2-category*, Journal of Pure and Applied Algebra 134 (1), 83-109, 1999.

[Jac01] B. Jacobs, *Categorical Logic and Type Theory*, Elsevier, 2001.

[Joh03] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Oxford University Press, 2003.

[Kas74] G. M. Kelly, R. Street, *Review of the Elements of 2-categories*, Lecture Notes in Math 420, Springer, 1974.

[Kel82] G. M. Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series No.64, 1982.

[KST07] B. Klin, P. Sobociński, A. Tarlecki, *Category Theory and its Sample Applications*, wykład na MIMUW w semestrze letnim 2006/2007, http://www.mimuw.edu.pl/∽tarlecki/teaching/2006/ct.

[LaS88] J. Lambek and P. J. Scott, *Introduction to Higher-Order Categorical Logic*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1988.

[Mac94] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer Verlag, 1994.

[Mac97] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, 1997.

[Pitt87] A. Pitts, *Polymorphism is Set Theoretic, Constructively*, Category Theory and Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 283, 1987.

[Pho95] W. Phoa, *An Introduction to Fibrations, Topos Theory, the Effective Topos and Modest Sets*, LFCS report ECS-LFCS-92-208, 1995, http://www.lfcs.inf.ed.ac.uk/reports/92/ECS-LFCS-92-208.

[Rey84] J. Reynolds, *Polymorphism is not Set-Theoretic*, Semantics of Data Types, Lecture Notes in Computer Science 173, 1984.

[Shu07] M. Shulman, *Framed Bicategories and Monoidal Fibrations*, do publikacji, 2007.

[Str80] R. Street, *Fibrations in Bicategories*, Cahiers Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 21, 1980.

[Str87] R. Street, *Correction to "Fibrations in Bicategories"*, Cahiers Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, 28, 1987.

[Str83] R. Street, *Enriched Categories and Cohomology*, Quaestiones Mathematicae, 6, 1983.

[Str99] T. Streicher, *Fibred Categories á la Bénabou*, notatki z wykładu, 1999, http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/∽streicher.