

Imię i nazwisko:

Nr indeksu:

teoria	1	2	3	test	1	2	3	4	5	6	SUMA

Zadania teoretyczne ($3 \cdot 4 = 12$ punktów)

Zadanie 1. [A] Proszę uzasadnić, że liczba podzbiorów zbioru n -elementowego wynosi 2^n . Wskazówka: wykonać najpierw zadanie dla $n = 3$ (1 punkt).

Zadanie 2. [A] Na podstawie aksjomatów:

(A1) $P(A) \geq 0$ dla dowolnego zdarzenia A ;

(A2) $P(\Omega) = 1$;

(A3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, dla dowolnych zdarzeń A, B takich, że $A \cap B = \emptyset$,

wywnioskować, że $P(A) \leq P(B)$ dla dowolnych zdarzeń A, B takich, że $A \subset B$.

Zadanie 3. (Trzy karty) Na stole leżą obok siebie 3 karty, odwrócone koszulkami do góry, as pik, as karo i as kier. Naszym zadaniem jest wskazanie asa pik. Wskazujemy jedną z kart i w tym momencie słyszymy od prowadzącego grę: "Graczu, odkryję jedną z kart, a Ty się zastanów, czy nie chcesz zmienić swojego wyboru", po czym odkrywa jedną z kart czerwonych. Czy powinniśmy zmienić swój wybór? Prowadzący wie, która karta jest którą, a w przypadku, gdy Gracz wskaże asa pik, prowadzący odkrywa każdą z kart czerwonych z jednakowym prawdopodobieństwem $1/2$. Odpowiedź proszę szczegółowo uzasadnić. Jakie mamy szanse zwycięstwa w tej grze, $1/3$, $1/2$, a może inna liczba?

Część testowa ($7 \cdot 2 = 14$ punktów)

Proszę wpisać tylko odpowiedzi: tak lub nie. Poprawna odpowiedź na wszystkie podpunkty daje 2 punkty za zadanie, błąd choć w jednym z podpunktów oznacza punkt ujemny. Za poprawną odpowiedź na dwa pytania z trzech i nie udzieleniu odpowiedzi na trzecie, można uzyskać 1 punkt. W każdym pytaniu może być dowolna liczba zdań prawdziwych – także 0. Uwaga: wartość oczekiwana liczby zdobytych punktów z testu przy losowym wpisywaniu odpowiedzi jest ujemna i wynosi $-4\frac{3}{8}$.

Zadanie 1. Która z równości jest poprawna:

- (a) $\sum_{k=1}^4 k = 10$,
- (b) $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$, dla dowolnej liczby naturalnej n ,
- (c) $\sum_{k=2}^n k = n(n-1)/2$, dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$.

Zadanie 2. Wiadomo, że przynajmniej jedno ze zdarzeń A i B musi zajść, a ponadto $P(A) = 2/3$, $P(B) = 5/6$. Wówczas

- (a) $P(A|B) < 1/2$,
- (b) $P(A|B) = 3/5$,
- (c) $P(B|A) = 3/4$.

Zadanie 3. Niech X, Y, Z będą zmiennymi losowymi o skończonym rozkładzie. Które ze wzorów są zawsze prawdziwe

- (a) $\mathbb{E}(X + Y + Z) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y + \mathbb{E}Z$,
- (b) $\text{Var}(X + Y + Z) = \text{Var } X + \text{Var } Y + \text{Var } Z$, jeśli zmienne X, Y, Z są niezależne.
- (c) $\text{Var}(2X + 3) = 3 + 4 \text{Var } X$.

Zadanie 4. Zdarzenia A_1, \dots, A_{10} są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo p . Jakie jest prawdopodobieństwo, że zajdzie dokładnie jedno z nich:

- (a) $p(1-p)^9$,
- (b) $10p(1-p)^9$,
- (c) $1 - (1-p)^{10}$.

Zadanie 5. Następujące zdania dotyczą podzbiorów pewnego ustalonego zbioru Ω . Wskaż, które z poniższych zdań są prawdziwe.

- (a) $A' \cup B' = A \cap B$,
- (b) $A \cap (\emptyset \cup B) = A$, jeśli tylko $A \subset B$,
- (c) $(A \cap \emptyset) \cup B = B$.

Zadanie 6. Które ze wzorów są prawdziwe:

- (a) $\binom{6}{3} = 30$,
- (b) $\binom{20}{6} + \binom{20}{7} = \binom{21}{6}$,
- (c) $\binom{2018}{18} - \binom{2018}{2000} = 1$.

Zadanie 7. Który z poniższych wzorów jest poprawny:

- (a) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$,
- (b) $P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) + P(B \cup C) + P(A \cup C) + P(A \cup B \cup C)$,
- (c) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.