

Imię i nazwisko: .....

Nr indeksu: .....

teoria	1	2	3	test	1	2	3	4	5	6	SUMA

**Zadania teoretyczne ( $3 \cdot 4 = 12$  punktów)**

Zadanie 1. Proszę podać wzór na liczbę rozwiązań równania  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  w liczbach całkowitych nieujemnych i go szczegółowo uzasadnić. Wskazówka: wykonać najpierw zadanie dla  $k = 3$  i  $n = 2$  (1 punkt).

Zadanie 2. Na podstawie aksjomatów:

(A1)  $P(A) \geq 0$  dla dowolnego zdarzenia  $A$ ;

(A2)  $P(\Omega) = 1$ ;

(A3)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , dla dowolnych zdarzeń  $A, B$  takich, że  $A \cap B = \emptyset$ ,

wywnioskować, że  $P(A) \leq 1$  dla dowolnego zdarzenia  $A$ .

Zadanie 3. (Trzy karty) Na stole leżą obok siebie 3 karty, odwrócone koszulkami do góry, as pik, as karo i as kier. Naszym zadaniem jest wskazanie asa pik. Wskazujemy jedną z kart i w tym momencie słyszymy od prowadzącego grę: "Graczu, odkryję jedną z kart, a Ty się zastanów, czy nie chcesz zmienić swojego wyboru", po czym odkrywa jedną z kart czerwonych. Czy powinniśmy zmienić swój wybór? Prowadzący wie, która karta jest którą, a w przypadku, gdy Gracz wskaże asa pik, prowadzący odkrywa każdą z kart czerwonych z jednakowym prawdopodobieństwem  $1/2$ . Odpowiedź proszę szczegółowo uzasadnić. Jakie mamy szanse zwycięstwa w tej grze,  $1/3$ ,  $1/2$ , a może inna liczba?

**Część testowa ( $7 \cdot 2 = 14$  punktów)**

Proszę wpisać tylko odpowiedzi: tak lub nie. Poprawna odpowiedź na wszystkie podpunkty daje 2 punkty za zadanie, błąd choć w jednym z podpunktów oznacza punkt ujemny. Za poprawną odpowiedź na dwa pytania z trzech i nie udzieleniu odpowiedzi na trzecie, można uzyskać 1 punkt. W każdym pytaniu może być dowolna liczba zdań prawdziwych – także 0. Uwaga: wartość oczekiwana liczby zdobytych punktów z testu przy losowym wpisywaniu odpowiedzi jest ujemna i wynosi  $-4\frac{3}{8}$ .

Zadanie 1. Która z równości jest poprawna:

- (a)  $\sum_{k=1}^4 k = 10$ ,
- (b)  $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$ , dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ ,
- (c)  $\sum_{k=2}^n k = n(n-1)/2$ , dla dowolnej liczby naturalnej  $n \geq 2$ .

Zadanie 2. Wiadomo, że przynajmniej jedno ze zdarzeń  $A$  i  $B$  musi zajść, a ponadto  $P(A) = 2/3$ ,  $P(B) = 5/6$ . Wówczas

- (a)  $P(A|B) < 1/2$ ,
- (b)  $P(A|B) = 3/5$ ,
- (c)  $P(B|A) = 3/4$ .

Zadanie 3. Niech  $X, Y, Z$  będą zmiennymi losowymi o skończonym rozkładzie. Które ze wzorów są zawsze prawdziwe

- (a)  $\mathbb{E}(X + Y + Z) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y + \mathbb{E}Z$ ,
- (b)  $\text{Var}(X + Y + Z) = \text{Var} X + \text{Var} Y + \text{Var} Z$ , jeśli zmienne  $X, Y, Z$  są niezależne.
- (c)  $\text{Var}(2X + 3) = 3 + 4 \text{Var} X$ .

Zadanie 4. Zdarzenia  $A_1, \dots, A_{10}$  są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo  $p$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że zajdzie dokładnie jedno z nich:

- (a)  $p(1-p)^9$ ,
- (b)  $10p(1-p)^9$ ,
- (c)  $1 - (1-p)^{10}$ .

Zadanie 5. Następujące zdania dotyczą podzbiorów pewnego ustalonego zbioru  $\Omega$ . Wskaż, które z poniższych zdań są prawdziwe.

- (a)  $A' \cup B' = A \cap B$ ,
- (b)  $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ , jeśli tylko  $A \subset B$ ,
- (c)  $(A \cap \emptyset) \cup B = B$ .

Zadanie 6. Które ze wzorów są prawdziwe:

- (a)  $\binom{6}{3} = 30$ ,
- (b)  $\binom{20}{6} + \binom{20}{7} = \binom{21}{6}$ ,
- (c)  $\binom{2018}{18} - \binom{2018}{2000} = 1$ .

Zadanie 7. Który z poniższych wzorów jest poprawny:

- (a)  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ ,
- (b)  $P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cup B) + P(B \cup C) + P(A \cup C) + P(A \cup B \cup C)$ ,
- (c)  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ .