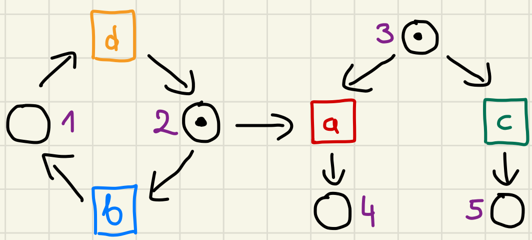
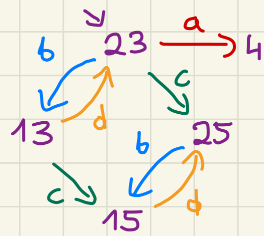
Ćwiczenia 2 9.10

Odtwarzanie sieci Petriego z jej grafu konfiguracji

sieć Petriego



graf konfiguracji



Jak na podstawie grafu konfiguracji stworzyć sieć (dokładniej: jedną z sieci), która mu odpowiada?

Region $\approx$ zbiór wszystkich konfiguracji, które zawierają dane miejsce

Def. Dany graf $G = (V, \delta : V \times T \to V, v_0)$. Zbiór $R \subseteq V$ jest regionem, jeśli $\forall a \in T$ wszystkie a-krawędzie

(1) albo idą z R do $V \setminus R$,

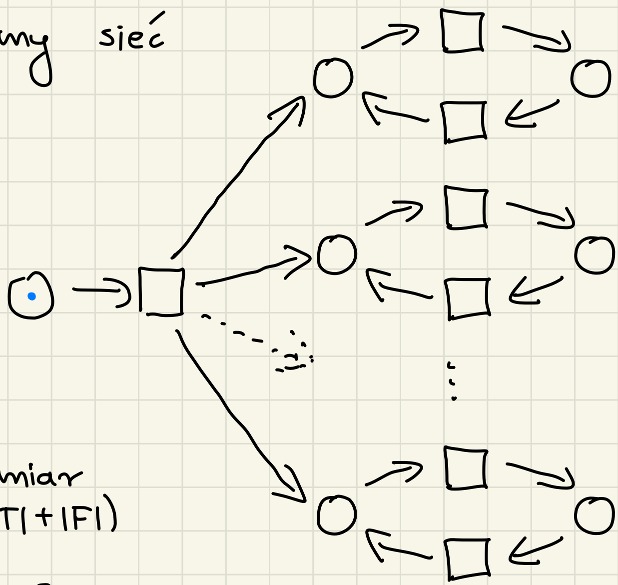
(2) albo idą z $V \setminus R$ do R,

(3) albo idą z R do R lub z $V \setminus R$ do $V \setminus R$.

$\rightsquigarrow$ sieć regionów

1. Czy graf konfiguracji elementarnej sieci Petriego może mieć rozmiar wykładniczy?

* weźmy sieć



rozmiar
$(|P| + |T| + |F|)$

$9k + 3$

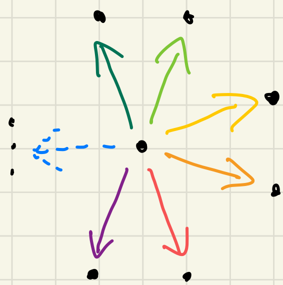
k takich par miejsc

* dla każdej pary mamy dwie możliwości położenia żetonu (lewe albo prawe miejsce), czyli łącznie liczba możliwych konfiguracji wynosi

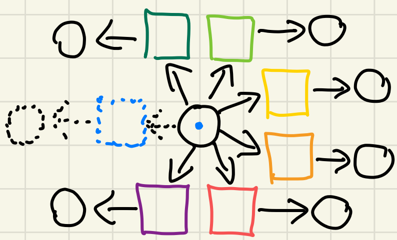
$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k \text{ razy}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konfiguracja} \\ \text{początkowa}}}{1} = 2^k + 1$$

2. Czy sieć regionów może mieć rozmiar wykładniczy?

* wystarczy wziąć graf skierowany i przydzielić każdej krawędzi inną etykietę, np. dla gwiazdy mamy kodowanie



* każdy podzbiór wierzchołków jest tutaj regionem, więc mamy ich wykładniczo wiele
* grafowi temu odpowiada sieć:



* analogicznie można też rozważyć cykl

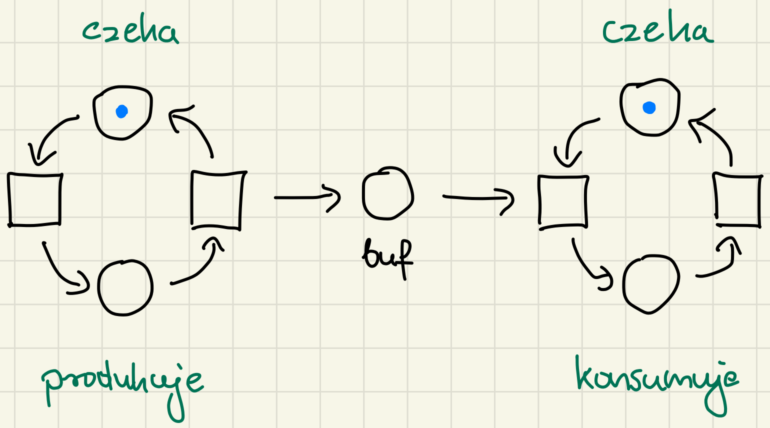
3. Równoważność sieci elementarnych oraz 1-ograniczonych sieci ogólnych

$\Leftarrow$

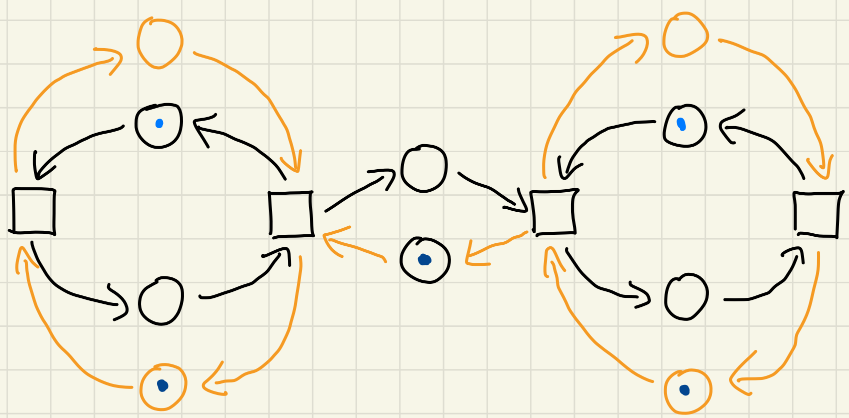
* możemy założyć, że nie ma wag > 1, wpp tranzycje z takimi łukami można usunąć
* otrzymana sieć jest siecią elementarną, bo początkowa konfiguracja kładzie na pola pojedyncze żetony, a w dowolnej osiągalnej konfiguracji M każda żywa tranzycja t spełnia $t^\bullet \cap M = \emptyset$

$\Rightarrow$

* aby zapewnić 1-ograniczoność, musimy rozbić każde miejsce p na dwa nowe p_e i p_f oznaczające odpowiednio: pole p jest puste (empty) i pole p jest pełne (full), tj. ma położony jeden żeton



Bez zmiany sieć producent / konsument nie jest ograniczona (przez pole buf, które może zebrać dowolną liczbę tokenów).



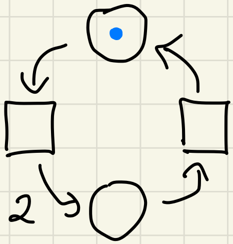
* niezmiennik: p_e i p_f mają łącznie 1 żeton
* każdemu biegowi w podstawowej sieci w oczywisty sposób odpowiada bieg nowej sieci

4. Skonstruuj sieć oraz podaj dla niej konfigurację, która jest:

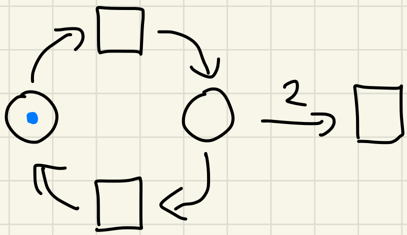
a) żywa, ale nie ograniczona,

b) ograniczona, ale nie żywa.

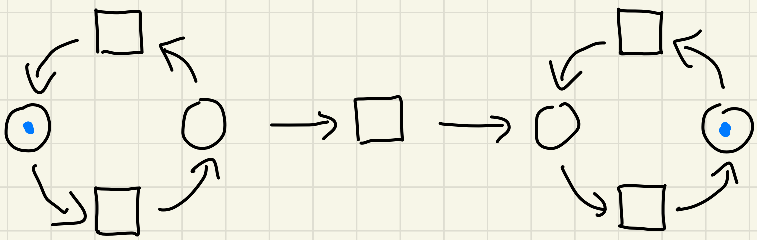
Przykład dla a)



Przykład dla b)

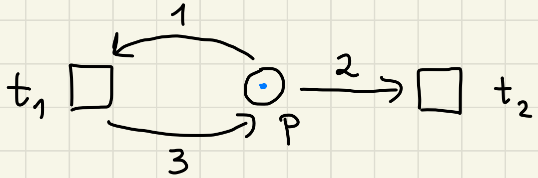


Inny przykład dla b)



5. Czy żywotność jest monotoniczna w ogólnych sieciach Petriego?

* pokażemy przykład, gdzie zwiększenie liczby żetonów w konfiguracji powoduje, że w początkowo żywej sieci występuje deadlock
* w tym celu konstruujemy sieć, w której jeśli jest nieparzysta liczba żetonów, to sieć jest żywa, a jeśli liczba ta jest parzysta, to może wystąpić blokada

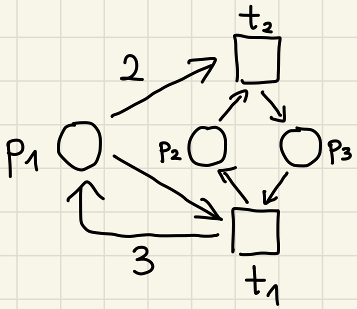


← sieć nieograniczona

* gdy na miejscu p jest jeden żeton, to odpalanie t_1 lub t_2 nie zmienia parzystości na p – zawsze będzie tam co najmniej 1 żeton
* jeśli na p są 2 żetony, odpalenie t blokuje sieć

Kontrprzykład 2:

p₂ i p₃ przełączają „tryb" działania sieci



$$M(p_1,p_2,p_3) = (1,0,1)$$

$$M'(p_1,p_2,p_3) = (2,1,1)$$

* konfiguracja M jest żywa – jedyny możliwy bieg to odpalanie na zmianę t_1 i t_2
* konfiguracja M' nie jest żywa – blokuje się po odpaleniu t_2
* M jest 3-ograniczone, M' – 4-ograniczone

M:

$$\begin{tikzcd}(1,0,1) \arrow[r, bend left, "t_1"] & (3,1,0) \arrow[l, bend left, "t_2"]\end{tikzcd}$$

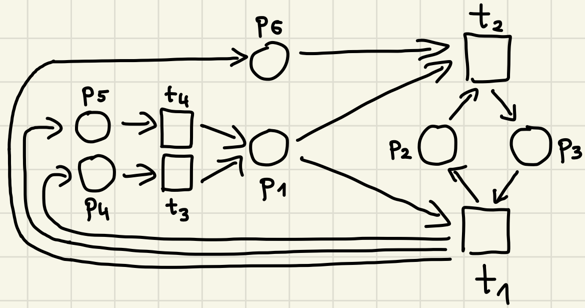
M':

$$\begin{tikzcd} & (0,0,2) \\ (2,1,1) \arrow[ur, "t_2"] \arrow[r, "t_1"] & (4,2,0) \arrow[l, bend left, "t_2"]\end{tikzcd}$$

* czy istnieje przykład z M 2-ograniczonym? ile (najmniej) ograniczone może wtedy być M'?

Kontrprzykład 3:

N:



$M(N) = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$ $\quad$ $M'(N) = (1, 1, 1, 0, 0, 1)$

* konfiguracja M żywa, bo odpala cyklicznie:

$$t_1 \to t_3 \to t_4 \to t_2 \to t_1 \to \dots$$

* konfiguracja M' pozwala na osiągnięcie blokady, jeśli odpalimy tranzycję t_2 jako pierwszą

* obie konfiguracje są 2-ograniczone:

- dla M możemy położyć 2 żetony na p_1
- w M' po odpaleniu t_1 dostajemy:

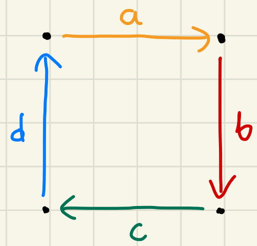
$$(0, 2, 0, 1, 1, 2) \xrightarrow{t_3, t_4} (2, 2, 0, 0, 0, 2) \to \dots$$

* czy istnieje przykład z M 1-ograniczonym?
czy M' ma wtedy szansę być 1-ograniczone?

6. Niech N będzie spójną ogólną siecią Petriego, dla której konfiguracja M jest 1-ograniczona i żywa. Udowodnij, że dowolna żywa konfiguracja $M' > M$ sieci N nie może być 1-ograniczona.

* jeśli dla pewnego miejsca p zachodzi $M'(p) > 1$, to nowa konfiguracja nie jest 1-ograniczona
* w przeciwnym przypadku niech p będzie takim miejscem, że $M(p) = 0$ i $M'(p) = 1$
* miejsce p nie jest odizolowane, zatem bez straty ogólności możemy wziąć t, takie że $p \in {}^{\bullet}t$
* skoro M jest żywa, to istnieje sekwencja s tranzycji, dla której $M \xrightarrow{s} M'' \xrightarrow{t}$, czyli w szczególności $M''(p) = 1$
* stąd $M' \xrightarrow{s} M'''$ i $M'''(p) = 2$, co dowodzi, że M' nie jest 1-ograniczona

1^D. Rozważ cykl skierowany G o czterech wierzchołkach i czterech krawędziach etykietowanych kolejno literami a, b, c, d. Skonstruuj sieć o mniej niż czterech miejscach, której graf konfiguracji jest izomorficzny z G.



2^D. Czy sieć regionów skonstruowana z grafu konfiguracji sieci S może być podwójnie wykładnicza względem S?

3^D. Czy istnieje ogólna sieć Petriego N oraz dwie konfiguracje M i M', $M' > M$, takie że M jest żywa i 1-ograniczona, a M' nie jest żywa?

zadania do pomyślenia w domu (nieobowiązkowe)