Kolokwium AL (27.11.2023)

(za każde zadanie można zdobyć 10pkt)

Zadanie 1

Wyznacz rozkład LDU dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2

Dana jest 4×3 macierz A oraz wektor b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) **(7pkt)** Znajdź bazy czterech fundamentalnych przestrzeni dla A.

(b) **(3pkt)** Znajdź wektor o jaki należy przesunąć przestrzeń zerową $N(A)$, aby otrzymać zbiór wszystkich rozwiązań układu $Ax = b$.

Zadanie 3

Znajdź (metodą Gaussa-Jordana) macierz odwrotną do macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4

Podaj przykład nieskończonego ciągu zstępujących przestrzeni liniowych, to znaczy:
Podaj przykład ciągu przestrzeni liniowych $(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots)$ takiego, że zawsze (dla każdego $i \geq 2$), X_i jest podprzestrzenią liniową X_{i-1} i jednocześnie $X_i \neq X_{i-1}$.

Wskazówka: Istnieje konstrukcja (niejedyna, ale taka na pewno), gdy za X_1 można wziąć przestrzeń wszystkich wielomianów nad liczbami rzeczywistymi.

Zadanie 1

Chcemy znaleźć rozkład LDU macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Najpierw zauważamy, że na pierwszej pozycji w pierwszym wierszu jest 0, dlatego robimy zamianę wierszy, na przykład pierwszego z drugim. Operacji tej odpowiada macierz permutacji:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a w jej wyniku dostajemy:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zaczynamy od poschodkowania tej macierzy.

Dla każdej wykonanej operacji podajemy też odpowiadającą jej macierz:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow EPA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

odejmujemy od trzeciego wiersza pierwszy

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow FEPA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

odejmujemy od trzeciego wiersza drugi

Uzyskana na końcu macierz będzie odpowiadać iloczynowi DU z rozkładu LDU. Najpierw możemy jednak znaleźć macierz L, która reprezentuje operacje wykonane powyżej na macierzy. W tym celu odwracamy macierze E i F (zamieniamy znak niezerowego elementu poza przekątną), a następnie je mnożymy:

$$L = E^{-1}F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pozostaje rozłożyć macierz DU na składowe

$$DU = FEPA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

przekątna

każdy wiersz podzielony przez wyraz stojący na przekątnej

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

co kończy rozwiązanie.

Zadanie 2. a

Szukamy baz czterech fundamentalnych przestrzeni dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zaczynamy od przestrzeni zerowej A, czyli zbioru takich wektorów $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, że

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =: Ax$$

Schodkujemy macierz A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - 2w_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 - w_2 \\ w_4 + w_2 \end{array}$$

Czyli warunki narzucone na x_i to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Stąd $x_2 = -x_3$, co po podstawieniu do pierwszego równania daje $x_1 - 2x_3 + x_3 = 0$, zatem $x_1 = x_3$.

Ogólny wzór na wektory spełniające dane równanie ma więc postać $(\alpha, -\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (podstawiliśmy α za x_3). Baza przestrzeni rozwiązań to np. $[1, -1, 1]^T$. $\leftarrow N(A)$

Przechodzimy teraz do przestrzeni wierszy A. Rozpinają ją wektory będące wierszami, a jej przykładową bazą są niezerowe wiersze w poschodkowanej macierzy A, u nas:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \leftarrow C(A^T)$$

Przechodzimy do wyznaczenia dualnej przestrzeni zerowej i przestrzeni kolumn macierzy A. W tym celu robimy wszystkie kroki co poprzednio, tylko dla transponowanej macierzy A. Zaczynamy od dualnej przestrzeni zerowej A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Schodkujemy macierz A^T

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ w_3 - w_2 \end{array}$$

Stąd do tej przestrzeni należą wektory $x \in \mathbb{R}^4$, t. że

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases},$$

czyli ogólne rozwiązanie jest opisane przez

$$(-\alpha - 2\beta,\ -\alpha+\beta,\ \alpha,\ \beta), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Bazą przestrzeni jest więc na przykład para wektorów

dla $\alpha=1, \beta=0$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \leftarrow N(A^T)$$

dla $\alpha=0, \beta=1$

Jako bazę przestrzeni kolumn mogą być z kolei wzięte niezerowe wiersze poschodkowanej macierzy A^T

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad \leftarrow C(A)$$

Zadanie 2.b

Szukamy teraz wektora, o jaki należy przesunąć przestrzeń zerową $N(A)$, aby otrzymać zbiór wszystkich rozwiązań układu $Ax=b$. W tym celu wystarczy znaleźć dowolne rozwiązanie tego układu.

Aby to zrobić, schodkujemy macierz $[A|b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - 2w_1 \end{array} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ w_3 - w_2 \\ w_4 + w_2 \end{array}$$

Pozostaje nam rozwiązać układ dwóch równań

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \quad \wedge \quad x_2 + x_3 = 1$$

Z drugiego dostajemy $x_2 = 1 - x_3$, co po podstawieniu do pierwszego da nam

$$x_1 + 2(1 - x_3) + x_3 = 1$$

$$x_1 + 2 - 2x_3 + x_3 = 1$$

$$x_1 = x_3 - 1$$

Przykładowe rozwiązanie układu dostajemy podstawiając za x_3 wartość 1. Otrzymujemy wtedy $x = [0, 0, 1]^T$.

Zadanie 3

Szukamy macierzy odwrotnej do A, korzystając z metody Gaussa-Jordana. W tym celu dopisujemy obok A macierz identyczności i chcemy operacjami na wierszach przejść z postaci $[A \mid I]$ do $[I \mid B]$. Wtedy macierz B będzie szukaną odwrotnością

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad w_3 - 2w_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad w_3 + 3w_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 7 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} w_1 - 3w_3 \\ w_2 - 2w_3 \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} w_1 - 2w_2 \\ \\ \end{array}$$

Stąd

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4

Jedno z możliwych rozwiązań jest następujące: za X_1 bierzemy przestrzeń wszystkich wielomianów nad liczbami rzeczywistymi, czyli postaci

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n,$$

gdzie współczynniki α_i są liczbami rzeczywistymi i takie też liczby możemy podstawiać za x. Oczywiście dla wielomianów mamy dobrze określone ich dodawanie i mnożenie przez skalar (liczbę rzeczywistą). Mamy także element zerowy, którym jest po prostu 0.

Chcemy teraz zdefiniować nieskończony zstępujący ciąg podprzestrzeni X_1. Innymi słowy chcemy, aby zachodziło $X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \supsetneq \ldots$

Pomysł na konstrukcję $X_2, X_3, X_4, \ldots$ jest następujący.

Niech X_2 będzie podzbiorem X_1, który zawiera wielomiany postaci:

$$a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n, \quad n \geq 2, \quad a_i \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Mówiąc inaczej, zabraniamy wystąpień składników $a_0 \in \mathbb{R}$ i $a_1 x$ dla $a_1 \in \mathbb{R}$.

Aby pokazać, że X_2 jest podprzestrzenią X_1, sprawdzamy najpierw, że X_2 jest zamknięte na operacje dodawania i mnożenia przez skalar.

Łatwo sprawdzić, że suma dwóch wielomianów postaci $(*)$, na przykład:

$$b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_k x^k$$

$$c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_l x^l$$

też ma postać $(*)$. Rzeczywiście, jeśli bez straty ogólności założymy $k \geq l$, to suma tych wielomianów jest równa

$$(b_2 + c_2) x^2 + (b_3 + c_3) x^3 + \ldots + (b_l + c_l) x^l$$

$$+ b_{l+1} x^{l+1} + \ldots + b_k x^k.$$

Musimy jednak pamiętać o jednym szczególnym przypadku i zauważyć, że dla $k=l$ oraz współczynników, które są przeciwne: $b_i = -c_i$ dla $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$, jako sumę dostajemy 0. Jest to jednak poprawny element zbioru X_2, który otrzymujemy przez wzięcie $a_i = 0$ w (*). Podobnie sprawdzamy, że mnożenie przez skalar też daje nam elementy ze zbioru X_2.

Ostatnia rzecz to pokazanie, że X_2 jest właściwym podzbiorem X_1. Rzeczywiście, każdy element X_2 jest wielomianem, czyli należy do X_1, a są też wielomiany, które należą do X_1 i nie należą do X_2 (np. $2+x$). Stąd $X_2 \subsetneq X_1$.

Podobnie X_m dla $m \geqslant 3$ definiujemy jako zbiór wielomianów postaci:

$$a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots + a_n x^n, \quad n \geqslant m, \; a_i \in \mathbb{R}.$$