Zadanie 6

Chcemy znaleźć postać A^k dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

W tym celu znajdziemy najpierw wyznacznik macierzy $A - \lambda I$, czyli

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -1-\lambda & 2 & 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -1 & 2 & 2-\lambda \\ 2 & -1 & 2-\lambda & 2 & -1 \end{array}\right.$$

iloczyny z zielonych linii dodajemy, a z czerwonych odejmujemy

$$\det(A-\lambda I) = (-1-\lambda)(2-\lambda)^2 - 4 - 4 - 4(2-\lambda) + (1+\lambda) - 4(2-\lambda)$$

$$= -(1+\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2) - 8 - 8(2-\lambda) + 1 + \lambda$$

$$= -(4-4\lambda+\lambda^2+4\lambda-4\lambda^2+\lambda^3) - 8 - 16 + 8\lambda + 1 + \lambda$$

$$= -4 + 4\lambda - \lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 24 + 8\lambda + 1 + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27)$$

$$= -(\lambda+3)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = -(\lambda+3)(\lambda-3)^2$$

Dostaliśmy zatem

$$\det(A-\lambda I) = -(\lambda+3)(\lambda-3)^2,$$

więc wartościami własnymi macierzy A są $\lambda_1=-3$ i $\lambda_2=3$ (wartość dwukrotna). Szukamy teraz wektorów własnych – dla wartości λ_i są one opisane równaniem $(A-\lambda_i I)x=0$. Dlatego rozwiązujemy dwa układy jednorodne:

1) dla wartości $\lambda_1=-3$

$$\underset{\overset{\|}{A-(-3)I}}{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2-w_1 \\ w_3-w_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \frac{1}{2}w_1 \\ \frac{1}{3}w_2 \\ w_3+w_2 \end{array}$$

czyli

$$\begin{cases} x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_2=x_3 \\ x_1+2x_3=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_2=x_3 \\ x_1=-2x_3 \end{cases}$$

Wartości $\lambda_1 = -3$ odpowiadają więc wektory własne postaci $[-2\alpha, \alpha, \alpha]^T$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$

(podstawiliśmy za x_3 wartość α)

Jako przykładowy wektor wybieramy ten dla $\alpha = 1$, czyli $w_1 = [-2, 1, 1]^T$.

2) dla wartości $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} w_2 \\ w_1 \\ w_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 + 2w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array}$$

zatem $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, czyli $x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$.

Mamy dwie zmienne wolne, co oznacza, że tej wartości własnej odpowiadają dwa wektory:

$w_2 = [1, 2, 0]$, $w_3 = [1, 0, 2]$ (podstawiliśmy $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, a później $x_2 = 0$, $x_3 = 2$)

Tak na marginesie: równie dobrze można było podstawić 1, 0 i 0, 1, tylko dostalibyśmy ułamki, przez co późniejsze obliczenia byłyby bardziej skomplikowane. Zasada jest taka, że po kolei podstawiamy za jedną zmienną wolną jakąś wartość niezerową, a za pozostałe zera (i przechodzimy tak przez wszystkie zmienne wolne).

Wracamy do zadania. Mamy macierz 3×3, dla której znaleźliśmy trzy wektory własne. Oznacza to, że możemy te wektory wpisać jako kolumny macierzy S i będzie to macierz diagonalizująca dla A — taka że $S^{-1} A S = \Lambda$, gdzie wynikowa macierz jest diagonalna z wartościami własnymi na przekątnej. Co więcej, z powyższego wzoru wynika, że $A = S \Lambda S^{-1}$, a co za tym idzie $A^k = S \Lambda^k S^{-1}$.

Przy wcześniejszych oznaczeniach mamy:

$$S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Szukamy S^{-1}. Możemy to zrobić ze wzoru

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} C_S^T,$$

gdzie C_S jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy S (wykład 10).

Po otrzymaniu macierzy S^{-1} wymnażamy kolejno S, Λ^k i S, aby otrzymać A^k...