Zadanie 9.3

Zaczynamy od podpunktu (a). Na początek sprawdzimy czy z definicji macierzy antysymetrycznej można wyznaczyć wartości niektórych jej elementów.

Spójrzmy na wyrazy na przekątnej:

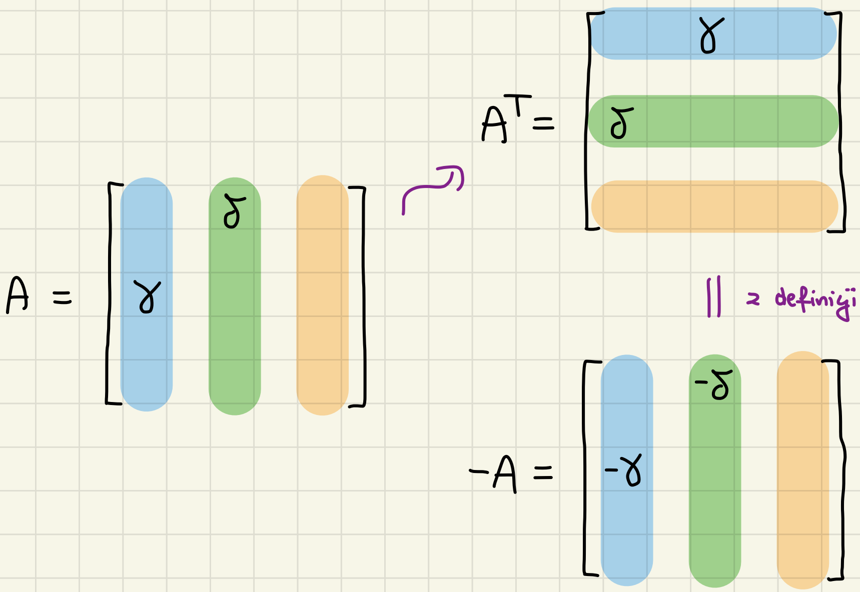
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\parallel \quad \text{z definicji}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -\alpha & & \\ & -\beta & \\ & & -\gamma \end{bmatrix}$$

Czyli jeśli na przekątnej A jest element α, to musi on spełniać $\alpha = -\alpha$, co zachodzi tylko dla zera. Stąd wszystkie wyrazy na przekątnej macierzy antysymetrycznej muszą być zerami.

Spójrzmy teraz na pary wyrazów symetrycznych względem przekątnej



Tym razem widzimy, że muszą to być elementy przeciwne.

Aby najpierw przekazać intuicję, zaczniemy od przykładu macierzy $A=(\alpha_{i,j})$ antysymetrycznej 3×3 i policzymy jej wyznacznik wzorem

$$\det A = \sum_{\sigma\in\Pi} \alpha_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot\alpha_{\sigma(n),n}\cdot\det(P_\sigma)$$

dana macierz w ogólności $n\times n$

zbiór permutacji n elementów

macierz permutacji

Ogólna postać macierzy A wygląda następująco

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Rozważmy teraz wszystkie możliwe permutacje

wkład do wyznacznika:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0}_{\text{elementy macierzy}} \cdot \underbrace{1}_{\det P_i} = 0$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad 0 \cdot (\gamma) \cdot (-\gamma) \cdot (-1) = 0$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \cdot 0 \cdot (-\beta) \cdot (-1) = 0$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha \cdot (-\alpha) \cdot 0 \cdot (-1) = 0$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha \cdot \gamma \cdot (-\beta) \cdot 1 = -\alpha\beta\gamma$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \beta \cdot (-\alpha) \cdot (-\gamma) \cdot 1 = \alpha\beta\gamma$$

Zauważmy, że pojawiają się dwa przypadki: albo macierz permutacji zawiera jedynkę na przekątnej i wtedy wkład do wyznacznika się od razu zeruje (przypadki P_1, P_2, P_3, P_4), albo w macierzy tej na przekątnej są same zera – tak jak w macierzach P_5 i P_6.

W drugim przypadku zauważamy jednak, że wkłady P_5 i P_6 do wyznacznika są przeciwne, dlatego w sumie się zerują. Składa się na to kilka czynników: (1) macierz P_5 nie jest symetryczna względem przekątnej, (2) dlatego istnieje inna macierz $P_6 = P_5^T$ (powstała przez transponowanie), (3) dodatkowo z antysymetryczności macierzy A elementy wybrane przez P_5 i P_6 są przeciwne, (4) a z definicji wyznacznika $\det P_6 = \det P_5^T = \det P_5$, bo transponowanie nie ma na niego wpływu.

Łatwo to uogólnić na macierz A wymiaru $n \times n$.