Zadanie 8.1. a) kolumny A są liniowo niezależne

Wprowadzenie (intuicja i trochę teorii)

Zauważmy, że gdy układ równań $Ax = b$ ma rozwiązanie, to b musi być liniową kombinacją kolumn macierzy A, na przykład dla

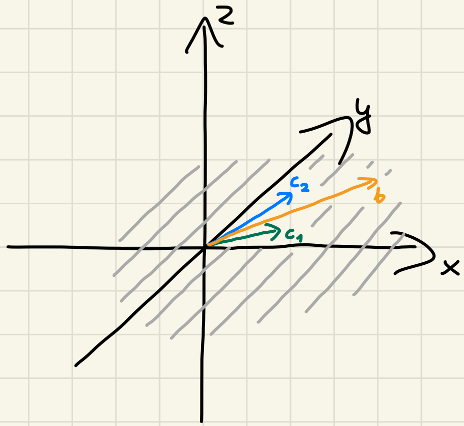
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = b$$

mamy

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ bo } \quad 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

W ogólności wszystkie wektory b, dla których układ $Ax = b$ ma rozwiązanie, tworzą przestrzeń rozpiętą przez kolumny macierzy A.



c_1 pierwsza kolumna A

c_2 druga kolumna A

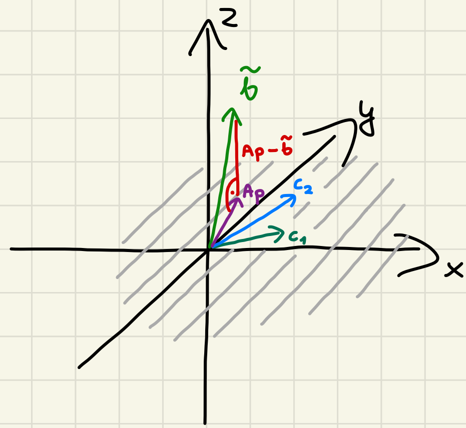
b wektor wyrazów wolnych

przestrzeń rozpięta przez c_1 i c_2

Stąd, jeśli $\tilde{b}$ nie jest liniową kombinacją kolumn A, układ $Ax = \tilde{b}$ nie ma rozwiązań. Można jednak znaleźć rozwiązanie przybliżone, korzystając z metody najmniejszych kwadratów. Szukamy wtedy przybliżonego rozwiązania p, tak aby długość wektora błędu $Ap - \tilde{b}$ była jak najmniejsza.

Łatwo sprawdzić, że wektor błędu musi być prostopadły do przestrzeni kolumn. Z wykładu mamy:

$$p = (A^T A)^{-1} A^T \tilde{b}$$



Przechodzimy do zadania

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Widzimy, że kolumny A są liniowo niezależne, dlatego korzystamy z metody przedstawionej na wykładzie 7. (i przypomnianej na poprzednich stronach). Chcemy najpierw wyznaczyć przybliżone rozwiązanie $p = (A^T A)^{-1} A^T b$. Liczymy po kolei

1. $A^T A$
2. $(A^T A)^{-1}$
3. $A^T b$
4. p jako 2 $\cdot$ 3

1

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & = A \\ A^T & & \\ \| & & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & = A^T A \end{array}$$

②

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_2 \\ w_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - 2w_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \\ -\frac{1}{3} w_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 - 2w_2 \\ w_2 \end{array}$$

czyli

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

③

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A^T b$$

4

$$(A^TA)^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = A^Tb$$

$$\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix} = p$$

Znaleźliśmy zatem przybliżone rozwiązanie p danego układu. Pozostaje pokazać, że wektor błędu $Ap - b$ jest prostopadły do kolumn A

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix} = p$$

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix} - \overset{b}{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Sprawdzenie prostopadłości

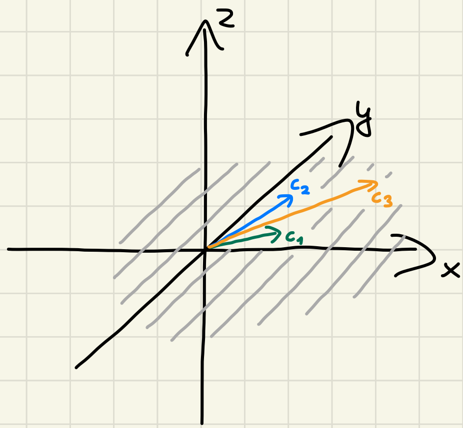
$$\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = [0] \checkmark \qquad \begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = [0] \checkmark$$

Zadanie 8.1. c) **kolumny A są liniowo zależne**

Wprowadzenie (intuicja i trochę teorii)

Tym razem zakładamy, że kolumny macierzy A nie są liniowo niezależne. Innymi słowy, co najmniej jedna kolumna jest kombinacją liniową pozostałych kolumn. Na przykład

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



mamy $c_3 = c_1 + c_2$

Jak sobie z tym radzimy? Najpierw znajdujemy bazę przestrzeni kolumn (u nas np. c_1 i c_2). Możemy to zrobić, schodkując A^T i sprawdzając, które wiersze się nie wyzerowały. W ten sposób wybieramy niezależne kolumny macierzy A i wstawiamy je jako kolumny do nowej macierzy, którą oznaczymy przez B (kolumny te rozpinają przestrzeń kolumn macierzy A – o to nam chodzi).

Następnie szukamy przybliżonego rozwiązania układu $By = b$. Przykładowo z układu $Ax = b$ dla $b = [5, 5, 1]^T$ przechodzimy do układu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zastawiliśmy tylko liniowo niezależne kolumny c_1 i c_2 z A

i stosując metodę z poprzedniego podpunktu, dostajemy

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tutaj nie możemy dostać 1, tak jak w b, bo kolumny c_1 i c_2 mają zera na ostatniej pozycji

przybliżone rozwiązanie

Można to interpretować tak, że najbliższym wektorem wyrazów wolnych, dla którego podany na początku układ ma już rozwiązanie, jest wektor $\bar{b} = [5, 5, 0]^T$. Pozostaje zatem tylko wrócić do macierzy A i zobaczyć, dla jakich x zachodzi $Ax = \bar{b}$.

To zadanie mamy już uproszczone, bo wiemy, że $B \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{b}$, a B zawiera dokładnie dwie pierwsze kolumny A. Jeśli więc zignorujemy trzecią kolumnę A, dostaniemy $A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{b}$. Stąd $[2, 1, 0]^T$ jest jednym z rozwiązań układu $Ax = \bar{b}$, ale jest ich więcej. Na początku zauważyliśmy, że kolumny A spełniają warunek $c_3 = c_1 + c_2$, czyli $1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 - 1 \cdot c_3 = 0$. Przemnożenie A przez wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ daje zatem zerowy efekt (jest to rozwiązanie układu jednorodnego $Ax = 0$). Dlatego ostatecznie wszystkie przybliżone rozwiązania to $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Przechodzimy do zadania

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12\end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

Zaczynamy od sprawdzenia, czy kolumny A są liniowo niezależne. W tym celu schodkujemy macierz A^T

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 7 & 10\\ 2 & 5 & 8 & 11\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{bmatrix} \sim \begin{array}{cl} \begin{bmatrix}1 & 4 & 7 & 10\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2\end{bmatrix} & \begin{array}{l} w_1\\ w_2 - w_1\\ w_3 - w_1\end{array} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cl} \begin{bmatrix}1 & 4 & 7 & 10\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} & \begin{array}{l} w_1\\ w_2\\ w_3 - 2w_2\end{array} \end{array}$$

Trzecia kolumna jest zatem kombinacją dwóch pozostałych. Od tej pory będziemy więc rozważać macierz B złożoną z dwóch pierwszych kolumn A.

Przechodzimy do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania r układu $By = b$. Robimy to tak jak poprzednim razem $r = (B^T B)^{-1} B^T b$

① $B^T B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 166 & 188 \\ 188 & 214 \end{bmatrix}$$

② $(B^T B)^{-1}$

skorzystamy ze wzoru (będzie na wykładzie 10.)

$$\left(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

czyli mamy

$$\frac{1}{166 \cdot 214 - 188 \cdot 188} \begin{bmatrix} 214 & -188 \\ -188 & 166 \end{bmatrix} = \frac{1}{180} \begin{bmatrix} 214 & -188 \\ -188 & 166 \end{bmatrix}$$

③ $B^T b$

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 7 & 10\\ 2 & 5 & 8 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32\\37\end{bmatrix}$$

④

$$\frac{1}{180}\cdot\begin{bmatrix}214 & -188\\ -188 & 166\end{bmatrix}\begin{bmatrix}32\\37\end{bmatrix}=\frac{1}{180}\begin{bmatrix}-108\\126\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{6}{10}\\ \frac{7}{10}\end{bmatrix}$$

W ten sposób otrzymaliśmy przybliżone rozwiązanie układu $By = b$. Odpowiada mu wektor wyrazów wolnych

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\\ 7 & 8\\ 10 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{6}{10}\\ \frac{7}{10}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{10}\\ \frac{11}{10}\\ \frac{14}{10}\\ \frac{17}{10}\end{bmatrix}=\bar{b}$$

Na koniec szukamy jeszcze przybliżonych rozwiązań układu $Ax = b$, czyli innymi słowy rozwiązań układu $Ax = \overline{b}$. W tym celu wystarczy znaleźć jedno (dowolne) rozwiązanie tego układu oraz rozwiązać układ jednorodny $Ax = 0$. Przykładowym rozwiązaniem jest wektor $\begin{bmatrix} -6/10 \\ 7/10 \end{bmatrix}$ rozszerzony na trzeciej pozycji o zero (wynika to z poprzedniej strony)

$$\begin{bmatrix} -\frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{8}{10} \\ \frac{11}{10} \\ \frac{14}{10} \\ \frac{17}{10} \end{bmatrix}$$

Pozostaje rozwiązać układ jednorodny (następna strona)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - w_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - 2w_2 \\ w_4 - 3w_2 \end{array}$$

Szukane x opisane są przez równania: $-3x_2 - 6x_3 = 0$ i $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Z pierwszego mamy $x_2 = -2x_3$, co po podstawieniu do drugiego równania daje $x_1 = x_3$. Stąd rozwiązaniem układu jednorodnego jest każdy wektor $[\alpha, -2\alpha, \alpha]^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a co za tym idzie przybliżone rozwiązania $Ax = b$ mają postać

$$\begin{bmatrix} -\frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R}.$$