Zadanie 6.4. a

Mamy dane dwie bazy B, C przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i chcemy znaleźć przekształcenie φ, które przeprowadza wektory bazy B kolejno na wektory bazy C. To znaczy:

$$B = \left\{ \underset{b_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

$$\downarrow \varphi \qquad \downarrow \varphi \qquad \downarrow \varphi$$

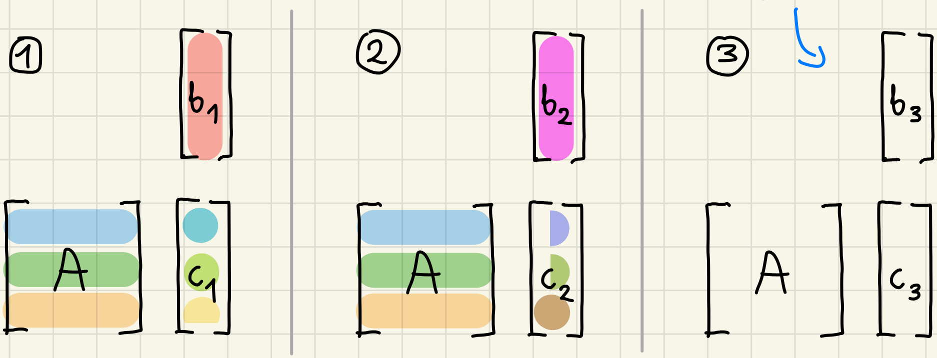
$$C = \left\{ \underset{c_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{c_2}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{c_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \right\}$$

Warunki opisujące φ można zapisać w postaci $\varphi(b_i) = c_i$ dla każdego $i \in \{1, 2, 3\}$ lub też w postaci macierzowej – z wykładu wiemy, że φ odpowiada macierz A wymiaru 3×3, taka że dla dowolnego wektora b

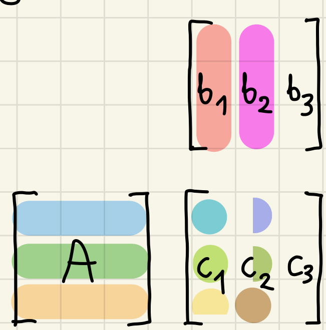
$$\varphi(b) = Ab.$$

Innymi słowy, żeby zobaczyć, na co przekształcenie φ przenosi b, wystarczy pomnożyć A przez b. Nasze warunki możemy więc zapisać jako $Ab_i = c_i$ dla $i \in \{1,2,3\}$. Graficznie wygląda to tak:

tu już mi brakło kolorów

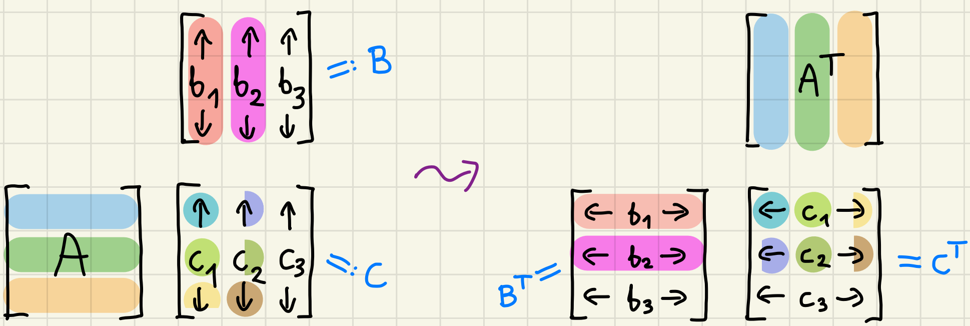


Wszystkie te warunki można zatem zapisać w jednym iloczynie macierzy:



Jak w takim razie znaleźć macierz A, która spełnia te warunki? Znamy już metodę Gaussa-Jordana i z zadania 6.2 wiemy, że można ją stosować nie tylko do odwracania macierzy. Jak użyć tej metody tutaj?

Można przepisać podany iloczyn w trochę innej postaci (w pewnym sensie „transponujemy cały układ", ale łatwo sprawdzić po kolorach, że wszystko dalej się zgadza):



Jeśli wprowadzimy oznaczenia macierzy B i C jak powyżej, to warunek $AB = C$ przechodzi nam na $B^T A^T = C^T$, gdzie cały czas szukamy A^T.

Aby to zrobić, używamy tej samej metody, co w 6.2, czyli zapisujemy macierze B^T i C^T obok siebie $[B^T \mid C^T]$, i operacjami na wierszach chcemy dojść do postaci $[I \mid D]$. Wtedy D będzie szukaną macierzą A^T. Rzeczywiście:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C^T \end{bmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} A^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \end{array}$$

to zachodzi: $B^T A^T = C^T$ $\Rightarrow$ to też zachodzi: $I A^T = D$

czyli: $A^T = D$

Pozostaje wykonać obliczenia:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \leftarrow b_1 \rightarrow & \leftarrow c_1 \rightarrow \\ \leftarrow b_2 \rightarrow & \leftarrow c_2 \rightarrow \\ \leftarrow b_3 \rightarrow & \leftarrow c_3 \rightarrow \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 - 3w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} w_1 \\ w_3 \\ w_2 \end{array}$$

uwaga: w tej metodzie nic nie stoi nam na przeszkodzie, aby zamieniać wiersze miejscami

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & -11 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ w_3 - 4w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \\ -w_2 \\ \frac{1}{4} w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 - w_2 \\ w_2 - 3w_1 \\ w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 - w_2 \\ w_2 \\ w_3 \end{array}$$

Po lewej stronie dostaliśmy macierz identyczności, czyli to, co jest po prawej to A^T. Stąd

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & \frac{11}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \end{bmatrix} \rightsquigarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{9}{4} & \frac{21}{4} & -\frac{11}{4} \end{bmatrix},$$

co kończy rozwiązanie zadania.