Zadanie 4.4. d)

Chcemy znaleźć rozkład LDU macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Najpierw schodkujemy macierz $A$ (da nam to rozkład na macierze $L$ i $DU$).

W pierwszym kroku chcemy odjąć od drugiego wiersza pierwszy wiersz przemnożony przez 2.

Do tego celu używamy macierzy elementarnej

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

← ustalamy pierwszy element w drugim wierszu na $-2$

Mamy

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Kontynuujemy schodkowanie i od trzeciego wiersza odejmujemy drugi wiersz pomnożony przez 2. Tę operację reprezentuje macierz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$

ustalamy drugi element w trzecim wierszu na $-2$

Dostajemy

$$FEA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Wynikowa macierz jest już górnotrójkątna, czyli będzie odpowiadała iloczynowi $DU$.

Najpierw jednak wyznaczamy macierz $L$:

$$FEA = DU$$

$$\overbrace{F^{-1}F}^{I}EA = F^{-1}DU$$

$$\overbrace{E^{-1}E}^{I}A = E^{-1}F^{-1}DU$$

$$A = E^{-1}F^{-1}DU, \quad \text{czyli } L = E^{-1}F^{-1}$$

Wyznaczamy $E^{-1}F^{-1}$.

Jak wygląda macierz odwrotna do macierzy elementarnej? Musi ona „odwracać" akcję, którą reprezentuje ta macierz. Stąd, jeśli macierz E odejmuje od drugiego wiersza pierwszy pomnożony przez 2, to $E^{-1}$ będzie dodawać do drugiego wiersza dwukrotność wiersza pierwszego:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że rzeczywiście $E \cdot E^{-1} = I$.

Podobnie mamy:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Możemy już wyznaczyć L:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = F^{-1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=E^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} = 1 \cdot \bullet \\ = 2 \cdot \bullet + 1 \cdot \bullet \\ = 1 \cdot \bullet \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = E^{-1}F^{-1} = L$$

<u>Uwaga „na marginesie"</u>:

Jak interpretować mnożenie z lewej strony przez macierz elementarną? U nas przez $E^{-1}$

- jedynka na pierwszej pozycji → przepisz pierwszy wiersz $F^{-1}$ do macierzy wynikowej
- na pierwszych dwóch pozycjach 2 i 1 → w macierzy wynikowej upisz sumę dwukrotności pierwszego wiersza $F^{-1}$ i wiersza drugiego
- jedynka na trzeciej pozycji → przepisz trzeci wiersz $F^{-1}$

Mamy już L. Teraz trzeba wyznaczyć DU.

Wiemy, że

$$DU = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Chcemy zapisać tę macierz jako iloczyn macierzy przekątniowej D i macierzy górnotrójkątnej U.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

reguła: przepisujemy przekątną macierzy DU

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \; / \; 1 \\ = \; / \; 2 \\ = \; / \; (-6) \end{matrix}$$

reguła: przepisujemy wiersze DU podzielone przez odpowiedni wyraz na przekątnej

W ten sposób dostajemy rozkład A na iloczyn macierzy L (lower triangular), D (diagonal) oraz U (upper triangular).