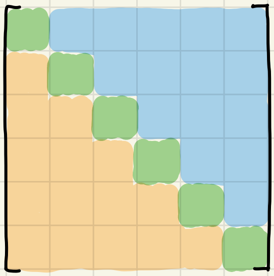
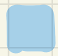
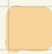
Zadanie 2.6

Mnożenie macierzy dolno trójkątnych

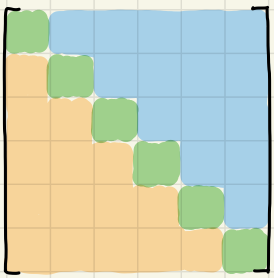
$A =$ 

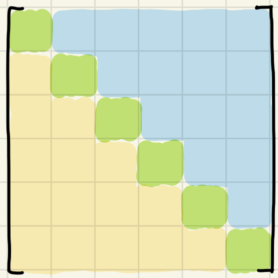
 główna przekątna, elementy mogą być $\neq 0$

 elementy nad główną przekątną mają wartość 0

 elementy poniżej głównej przekątnej mogą być $\neq 0$

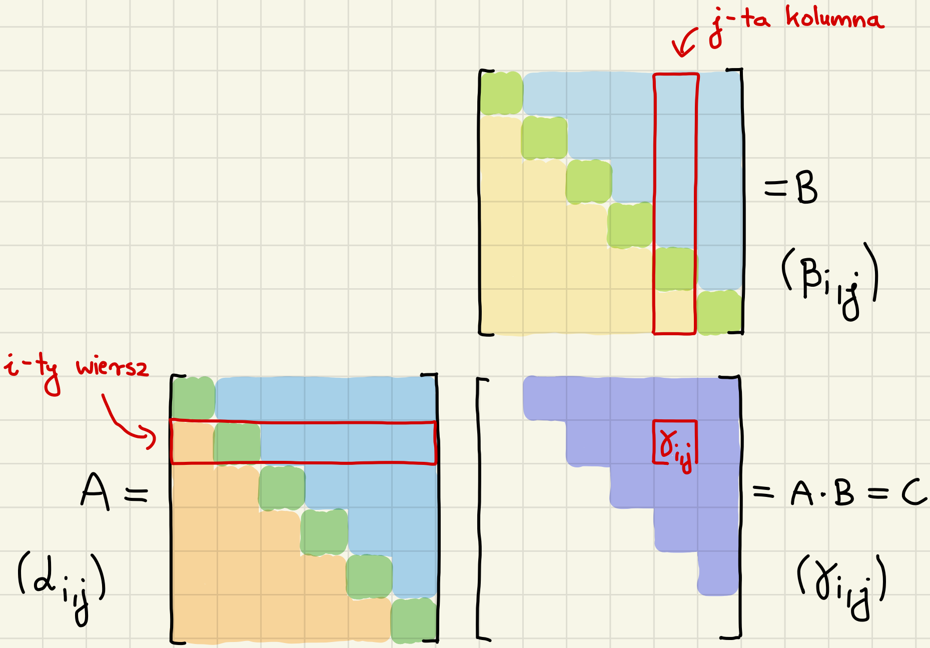
Weźmy dwie macierze dolno trójkątne A i B

$A =$ 

$B =$ 

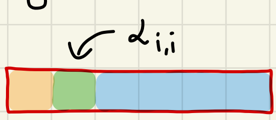
Chcemy pokazać, że ich iloczyn $A \cdot B =: C = (\gamma_{i,j})$ też jest macierzą dolno trójkątną. W tym celu musimy udowodnić, że dla $i < j$ $\gamma_{i,j} = 0$.

Weźmy dowolne $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Wiemy, że $\gamma_{i,j}$ jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza A oraz j-tej kolumny B. Wizualnie wygląda to tak



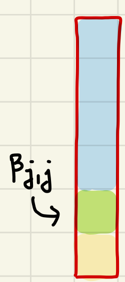
Sprawdzamy, jak wyglądają składniki iloczynu skalarnego, w którego wyniku dostajemy $\gamma_{i,j}$.

1. i-ty wiersz A



elementy $\alpha_{i,k}$ dla $k > i$ są zerowe

2. j-ta kolumna B



elementy $\beta_{k,j}$ dla $k < j$ są wszystkie $= 0$

Stąd wartość $\gamma_{i,j}$ wynosi

$$\alpha_{i,1}\cdot\beta_{1,j}+\ldots+\alpha_{i,i}\cdot\beta_{i,j}+\alpha_{i,i+1}\cdot\beta_{i+1,j}+\ldots$$
$$+\alpha_{i,j-1}\cdot\beta_{j-1,j}+\alpha_{i,j}\cdot\beta_{j,j}+\ldots+\alpha_{i,n}\cdot\beta_{n,j}=0$$

gdzie na czerwono zaznaczone są elementy zerowe.

Skoro i,j były dowolne, takie że $i<j$, dowodzi to, że macierz $C=A\cdot B$ jest dolno trójkątna.