# Zadanie 1.15

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + 4x_3 = \beta_2 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

1. Jeśli $\alpha = 0$, to wszystkie trzy równania podają warunki tylko na $x_2$ i $x_3$. W szczególności będą wtedy tylko dwie wartości wiodące. Rzeczywiście, podstawiając $\alpha = 0$, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 \\ 4x_3 = \beta_2 \\ 0 = \beta_3 \end{cases}$$

Oczywiście gdy $\beta_3 \neq 0$, układ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań). W przeciwnym razie układ upraszcza się do postaci

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 & R1 \\ \quad\quad\;\; 4x_3 = \beta_2 & R2 \end{cases}$$

Mamy tutaj dwie wartości wiodące.

Zaczynając od dolnego schodka, wyznaczamy kolejno zmienne związane (stojące przy wartościach wiodących). Z R2 mamy

$$x_3 = \frac{1}{4}\beta_2,$$

co po podstawieniu do R1 daje

$$2x_2 + 3\cdot\frac{1}{4}\beta_2 = \beta_1$$

$$2x_2 = \beta_1 - \frac{3}{4}\beta_2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{3}{8}\beta_2$$

Zmienna $x_1$ jest tutaj zmienną wolną, może przyjmować dowolne wartości. Formalnie, dla $\alpha = 0$, $\beta_3 = 0$, rozwiązanie zapisujemy jako

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{3}{8}\beta_2 \\ x_3 = \frac{1}{4}\beta_2 \end{cases}$$

rozwiązań jest nieskończenie wiele

lub $(x_1, x_2, x_3) = (t, \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{3}{8}\beta_2, \frac{1}{4}\beta_2)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(*) Dalej załadamy $\alpha \neq 0$. Wtedy schodkujemy dany układ

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 & R1 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + 4x_3 = \beta_2 & R2 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = \beta_3 & R3 \end{cases}$$

odejmując pierwsze równanie od dwóch kolejnych

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 & R1 \\ (\alpha-2)x_2 + x_3 = \beta_2 - \beta_1 & R2-R1 \\ (\alpha-2)x_2 + (\alpha-3)x_3 = \beta_3 - \beta_1 & R3-R1 \end{cases}$$

(2) Widzimy, że jeśli $\alpha - 2 = 0$, czyli $\alpha = 2$, to ponownie nie będzie trzech wartości wiodących. Rzeczywiście, dostajemy wtedy

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 & R1 \\ x_3 = \beta_2 - \beta_1 & R2 \\ -x_3 = \beta_3 - \beta_1 & R3 \end{cases}$$

Po dodaniu drugiego równania do ostatniego będziemy mieli

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 & R1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = \beta_2 - \beta_1 & R2 \\ \qquad\qquad\quad 0 = \beta_3 + \beta_2 - 2\beta_1 & R3 + R2 \end{cases}$$

co oznacza, że układ jest sprzeczny, jeśli $\beta_3 + \beta_2 - 2\beta_1 \neq 0$. W przeciwnym razie układ upraszcza się do formy

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 \\ \qquad\qquad 1x_3 = \beta_2 - \beta_1 \end{cases}$$

czyli ma dwie wartości wiodące. Rozwiązujemy układ podstawiając $x_3$ z drugiego równania do równania pierwszego

$$2x_1 + 2x_2 + 3(\beta_2 - \beta_1) = \beta_1$$

$$2x_1 = -2x_2 + 4\beta_1 - 3\beta_2$$

$$x_1 = -x_2 + 2\beta_1 - \tfrac{3}{2}\beta_2$$

Tym razem $x_2$ jest zmienną wolną. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $(x_1, x_2, x_3) = (-t + 2\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2, t, \beta_2 - \beta_1)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(*) Dalej zakładamy $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 2$. Przepisujemy układ po pierwszym schodkowaniu

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 & R1 \\ (\alpha-2)x_2 + x_3 = \beta_2 - \beta_1 & R2 \\ (\alpha-2)x_2 + (\alpha-3)x_3 = \beta_3 - \beta_1 & R3 \end{cases}$$

i schodkujemy dalej, odejmując drugie równanie od trzeciego

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 & R1 \\ (\alpha-2)x_2 + x_3 = \beta_2 - \beta_1 & R2 \\ (\alpha-4)x_3 = \beta_3 - \beta_2 & R3 - R2 \end{cases}$$

(3) Tym samym widzimy, że trzecią wartością $\alpha$, dla której układ nie ma trzech wartości wiodących, jest $\alpha = 4$. Faktycznie, po podstawieniu dostajemy

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 \\ 2x_2 + x_3 = \beta_2 - \beta_1 \\ 0 = \beta_3 - \beta_2 \end{cases}$$

Ponownie z ostatniego równania wynika, że układ jest sprzeczny dla $\beta_3 - \beta_2 \neq 0$, czyli $\beta_3 \neq \beta_2$. W przeciwnym razie mamy

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 \\ \qquad 2x_2 + x_3 = \beta_2 - \beta_1 \end{cases}$$

gdzie występują dwie wartości wiodące, zmienne $x_1, x_2$ są związane, a $x_3$ jest zmienną wolną.

Wyznaczamy $x_2$ z ostatniego równania

$$2x_2 = -x_3 + \beta_2 - \beta_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1$$

Teraz podstawiamy otrzymane wyrażenie za $x_2$ w pierwszym równaniu

$$4x_1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1\right) + 3x_3 = \beta_1$$

$$4x_1 - x_3 + \beta_2 - \beta_1 + 3x_3 = \beta_1$$

$$4x_1 = -2x_3 + 2\beta_1 - \beta_2$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2$$

Znowu mamy nieskończenie wiele rozwiązań postaci $\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{4}\beta_2, -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1, t\right)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(*) Ostatecznie, aby mieć trzy wartości wiodące, zakładamy $\alpha \notin \{0, 2, 4\}$. Wtedy wartościami tymi są $\alpha$, $\alpha - 2$ i $\alpha - 4$

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \beta_1 \\ (\alpha-2)x_2 + x_3 = \beta_2 - \beta_1 \\ (\alpha-4)x_3 = \beta_3 - \beta_2 \end{cases}$$

Układ w tym przypadku ma jedno rozwiązanie. Dokładne wyznaczenie tego rozwiązania już sobie odpuścimy.