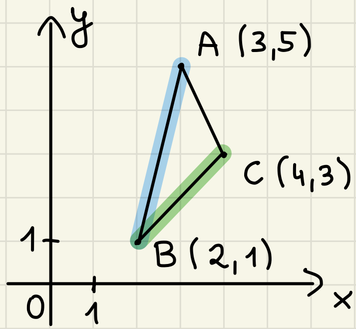
Zadanie 10.6

Zaczynamy od podpunktu (a), gdzie mamy dane trzy wierzchołki trójkąta w $\mathbb{R}^2$. Narysujmy to w układzie współrzędnych, gdzie oznaczymy wierzchołki kolejno przez A, B, C:



Trójkąt ABC jest rozpięty na przykład przez wektory $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ – policzymy ich współrzędne.

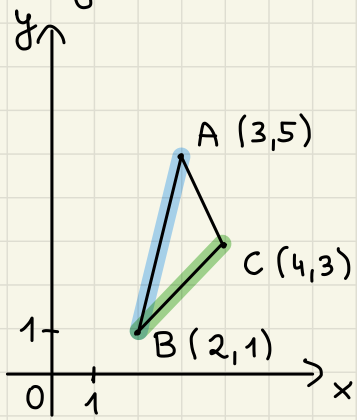
$$\overrightarrow{BA} = [3-2,\ 5-1]^T = [1, 4]^T$$

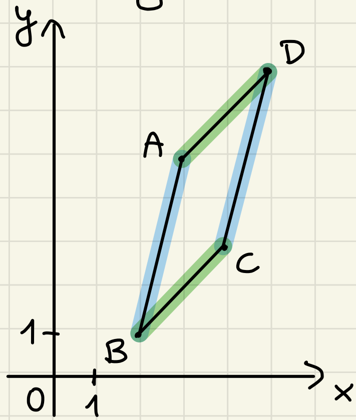
$$\overrightarrow{BC} = [4-2,\ 3-1]^T = [2, 2]^T$$

(od współrzędnych punktu końcowego odejmujemy współrzędne punktu początkowego danego wektora)

Mamy daną figurę dwuwymiarową w przestrzeni dwuwymiarowej, zatem jej pole możemy policzyć jako wartość bezwzględną wyznacznika macierzy, której kolumnami są wektory ją rozpinające.

Prawie, bo ta zasada działa dla równoległoboków, a w ogólności – równoległościanów. Zauważamy jednak, że trójkąt jest połową równoległoboku rozpiętego przez te same wektory:





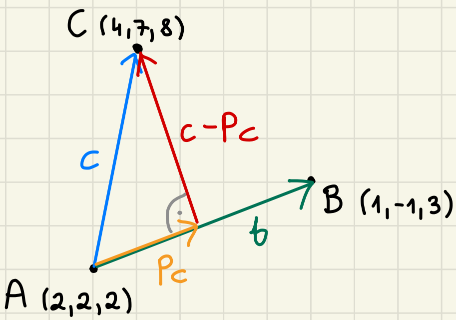
Wpisujemy więc wektory $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ w kolumny macierzy i liczymy jej wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 2 - 8 = -6$$

Pole równoległoboku ABCD jest zatem równe 6 (bo bierzemy wartość bezwzględną), czyli pole trójkąta ABC to 3 (połowa pola równoległoboku).

Przechodzimy do podpunktu (b). Tutaj mamy dany trójkąt w przestrzeni trójwymiarowej, czyli nie możemy skorzystać ze wzoru z wyznacznikiem do policzenia jego pola (bo trójkąt jest figurą dwuwymiarową). Zamiast tego policzymy je ze wzoru $\frac{1}{2}ah$, gdzie a i h to długości podstawy i opuszczonej na nią wysokości.

Zaczynamy od naszkicowania punktów w przestrzeni i zaznaczenia potrzebnych wektorów. Tym razem ponownie wyznaczymy wektory $b = \overrightarrow{AB}$ oraz $c = \overrightarrow{AC}$. Odcinek AB potraktujemy tu jako podstawę trójkąta (jej długość to długość wektora b). Następnie będziemy chcieli znaleźć długość wysokości opuszczonej z C na AB. W tym celu zrzutujemy wektor c na b i odejmiemy



otrzymany rzut od wektora c. Wynikowy wektor $c - Pc$ będzie wtedy wektorem wysokości, co łatwo zauważyć na rysunku. Liczymy

1. współrzędne wektorów b i c

$$b = [1-2, -1-2, 3-2]^T = [-1, -3, 1]^T$$

$$c = [4-2, 7-2, 8-2]^T = [2, 5, 6]^T$$

2. macierz P rzutowania na prostą wyznaczoną przez wektor $b = \overrightarrow{AB}$

$$P = \frac{bb^T}{b^Tb}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}}_{= b^Tb} \end{array}
\qquad
\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{= bb^T} \end{array}$$

zatem

$$P = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

③ rzut c na b $\quad P_c$

$$\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 33 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

④ wektor wysokości $c - P_c$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

⑤ długości podstawy i wysokości

$$\|b\| = \sqrt{b^T b} = \sqrt{11}$$

$$\|c - P_c\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

⑥ pole trójkąta

$$\frac{1}{2} \cdot \|b\| \cdot \|c - P_c\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{11} \cdot 3\sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{66}$$