Teoria minorów

Michał Pilipczuk

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

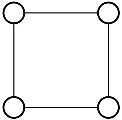
28 sierpnia 2011

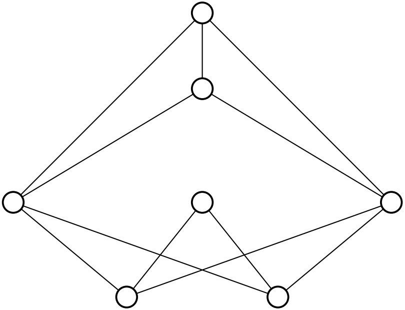
Podgraf

- Co to znaczy, że jeden graf zawiera drugi?

Podgraf

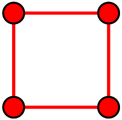
- Co to znaczy, że jeden graf zawiera drugi?

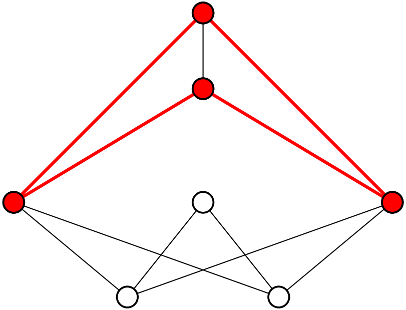




Podgraf

- Co to znaczy, że jeden graf zawiera drugi?

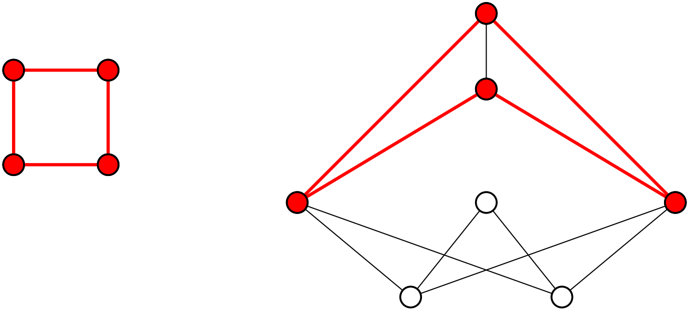




- *H* jest **podgrafem** *G*: istnieje włożenie f wierzchołków H w wierzchołki G, że jeśli $vw \in E(H)$, to $f(v)f(w) \in E(G)$.

Podgraf

- Co to znaczy, że jeden graf zawiera drugi?



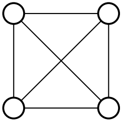
- H jest **podgrafem** G: istnieje włożenie f wierzchołków H w wierzchołki G, że jeśli $vw \in E(H)$, to $f(v)f(w) \in E(G)$.
- **Problem:** Nie zachowuje się dobrze topologicznie.

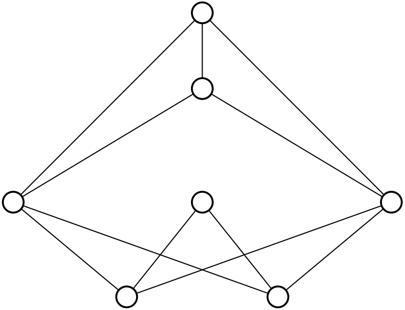
Minor

- Minor to taki „rozmazany" podgraf.

Minor

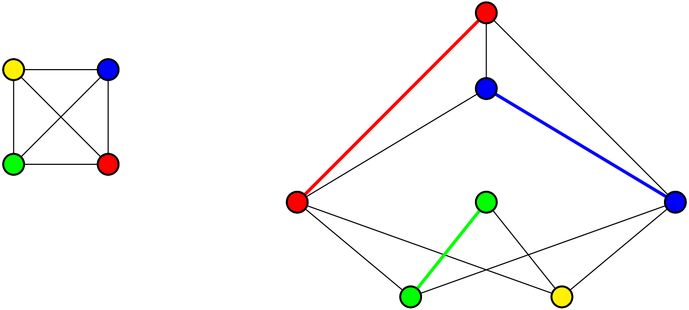
- Minor to taki „rozmazany” podgraf.





Minor

- Minor to taki „rozmazany” podgraf.



- H jest **minorem** G: istnieje włożenie f wierzchołków H w **rozłączne, spójne podzbiory wierzchołków** G, że jeśli $vw \in E(H)$, to pomiędzy $f(v)$ i $f(w)$ jest jakaś krawędź.

Minor: alternatywna definicja

- Graf H jest **minorem** G, jeśli H można uzyskać z G za pomocą sekwencji operacji:

Minor: alternatywna definicja

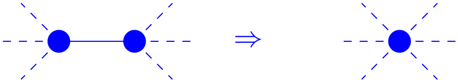
- Graf H jest **minorem** G, jeśli H można uzyskać z G za pomocą sekwencji operacji:
  - **Usunięcie wierzchołka**: usuwamy v z grafu.

Minor: alternatywna definicja

- Graf H jest **minorem** G, jeśli H można uzyskać z G za pomocą sekwencji operacji:
  - **Usunięcie wierzchołka**: usuwamy v z grafu.
  - **Usunięcie krawędzi**: usuwamy vw z grafu.

Minor: alternatywna definicja

- Graf H jest **minorem** G, jeśli H można uzyskać z G za pomocą sekwencji operacji:
    - **Usunięcie wierzchołka**: usuwamy v z grafu.
    - **Usunięcie krawędzi**: usuwamy vw z grafu.
    - **Kontrakcja krawędzi**: ściągamy krawędź vw.



Porządek minorowy

- **Oznaczenie**: $H \preceq G$

Porządek minorowy

- **Oznaczenie**: $H \preceq G$
- $\preceq$ jest przechodni, zwrotny i antysymetryczny.

Porządek minorowy

- **Oznaczenie**: $H \preceq G$
- $\preceq$ jest przechodni, zwrotny i antysymetryczny.
- Czyli indukuje na klasie grafów **porządek częściowy**.

Motywacja

Twierdzenie Kuratowskiego

Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ani K_5 ani $K_{3,3}$ jako minoru.

Motywacja

Twierdzenie Kuratowskiego

Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ani K_5 ani $K_{3,3}$ jako minoru.

- Grafy planarne są zamknięte na minory.

Motywacja

Twierdzenie Kuratowskiego

Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ani K_5 ani $K_{3,3}$ jako minoru.

- Grafy planarne są zamknięte na minory.
- Inne klasy zamknięte na minory: lasy; grafy zanurzalne w jakąś powierzchnię.

Motywacja

Twierdzenie Kuratowskiego

Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ani K_5 ani $K_{3,3}$ jako minoru.

- Grafy planarne są zamknięte na minory.
- Inne klasy zamknięte na minory: lasy; grafy zanurzalne w jakąś powierzchnię.
- Pytanie ogólniejsze:

Motywacja

Twierdzenie Kuratowskiego

Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera ani K_5 ani $K_{3,3}$ jako minoru.

- Grafy planarne są zamknięte na minory.
- Inne klasy zamknięte na minory: lasy; grafy zanurzalne w jakąś powierzchnię.
- Pytanie ogólniejsze:

Hipoteza Wagnera

Każda klasa zamknięta na minory charakteryzuje się przez **skończony** zbiór zabronionych minorów.

Hipoteza Wagnera

Hipoteza Wagnera, wersja klasyczna

Porządek minorów jest dobrym quasi-porządkiem (well quasi-order, WQO).

- Po ludzku, dla każdego ciągu grafów $G_1, G_2, G_3, \ldots$ istnieją takie $i < j$, że $G_i \preceq G_j$.

Hipoteza Wagnera

Hipoteza Wagnera, wersja klasyczna

Porządek minorów jest dobrym quasi-porządkiem
(well quasi-order, WQO).

- Po ludzku, dla każdego ciągu grafów $G_1, G_2, G_3, \ldots$ istnieją takie $i < j$, że $G_i \preceq G_j$.
- W szczególności, nie ma nieskończonych ciągów zstępujących ani nieskończonych antyłańcuchów.

Hipoteza Wagnera

Hipoteza Wagnera, wersja klasyczna

Porządek minorów jest dobrym quasi-porządkiem (well quasi-order, WQO).

- Po ludzku, dla każdego ciągu grafów $G_1, G_2, G_3, \ldots$ istnieją takie $i < j$, że $G_i \preceq G_j$.
- W szczególności, nie ma nieskończonych ciągów zstępujących ani nieskończonych antyłańcuchów.
- Tak naprawdę to równoważne.

Historia problemu

- Sformułowana w latach trzydziestych, Wagner się do niej nigdy nie przyznawał.

Historia problemu

- Sformułowana w latach trzydziestych, Wagner się do niej nigdy nie przyznawał.
- **Lata 60.**: wyniki w okolicy, twierdzenie Kruskala.

Historia problemu

- Sformułowana w latach trzydziestych, Wagner się do niej nigdy nie przyznawał.
- **Lata 60.**: wyniki w okolicy, twierdzenie Kruskala.
- **1983**: Neil Robertson i Paul Seymour ogłaszają, że udowodnili twierdzenie.

Historia problemu

- Sformułowana w latach trzydziestych, Wagner się do niej nigdy nie przyznawał.
- **Lata 60.**: wyniki w okolicy, twierdzenie Kruskala.
- **1983**: Neil Robertson i Paul Seymour ogłaszają, że udowodnili twierdzenie.
- Dowód zostanie opublikowany w serii artykułów.

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50
Graph minors. XV. Giant Steps, JCT, Series B, Vol. 68, Iss. 1, September 1996, p. 112-148

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50
Graph minors. XV. Giant Steps, JCT, Series B, Vol. 68, Iss. 1, September 1996, p. 112-148
Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 43-76

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50
Graph minors. XV. Giant Steps, JCT, Series B, Vol. 68, Iss. 1, September 1996, p. 112-148
Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 43-76
Graph minors: XVII. Taming a Vortex, JCT, Series B, Vol. 77, Iss. 1, September 1999, p. 162-210

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50
Graph minors. XV. Giant Steps, JCT, Series B, Vol. 68, Iss. 1, September 1996, p. 112-148
Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 43-76
Graph minors: XVII. Taming a Vortex, JCT, Series B, Vol. 77, Iss. 1, September 1999, p. 162-210
Graph minors. XVIII. Tree-decompositions and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 77-108

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50
Graph minors. XV. Giant Steps, JCT, Series B, Vol. 68, Iss. 1, September 1996, p. 112-148
Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 43-76
Graph minors: XVII. Taming a Vortex, JCT, Series B, Vol. 77, Iss. 1, September 1999, p. 162-210
Graph minors. XVIII. Tree-decompositions and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 77-108
Graph minors. XIX. Well-quasi-ordering on a surface, JCT, Series B, Vol. 90, Iss. 2, March 2004, p. 325-385

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50
Graph minors. XV. Giant Steps, JCT, Series B, Vol. 68, Iss. 1, September 1996, p. 112-148
Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 43-76
Graph minors: XVII. Taming a Vortex, JCT, Series B, Vol. 77, Iss. 1, September 1999, p. 162-210
Graph minors. XVIII. Tree-decompositions and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 77-108
Graph minors. XIX. Well-quasi-ordering on a surface, JCT, Series B, Vol. 90, Iss. 2, March 2004, p. 325-385
Graph minors. XX. Wagner's conjecture, JCT, Series B, Vol. 92, Iss. 2, November 2004, p. 325-357

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50
Graph minors. XV. Giant Steps, JCT, Series B, Vol. 68, Iss. 1, September 1996, p. 112-148
Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 43-76
Graph minors: XVII. Taming a Vortex, JCT, Series B, Vol. 77, Iss. 1, September 1999, p. 162-210
Graph minors. XVIII. Tree-decompositions and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 77-108
Graph minors. XIX. Well-quasi-ordering on a surface, JCT, Series B, Vol. 90, Iss. 2, March 2004, p. 325-385
Graph minors. XX. Wagner's conjecture, JCT, Series B, Vol. 92, Iss. 2, November 2004, p. 325-357
Graph minors. XXI. Graphs with unique linkages, JCT, Series B, Vol. 99, Iss. 3, May 2009, p. 583-616

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50
Graph minors. XV. Giant Steps, JCT, Series B, Vol. 68, Iss. 1, September 1996, p. 112-148
Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 43-76
Graph minors: XVII. Taming a Vortex, JCT, Series B, Vol. 77, Iss. 1, September 1999, p. 162-210
Graph minors. XVIII. Tree-decompositions and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 77-108
Graph minors. XIX. Well-quasi-ordering on a surface, JCT, Series B, Vol. 90, Iss. 2, March 2004, p. 325-385
Graph minors. XX. Wagner's conjecture, JCT, Series B, Vol. 92, Iss. 2, November 2004, p. 325-357
Graph minors. XXI. Graphs with unique linkages, JCT, Series B, Vol. 99, Iss. 3, May 2009, p. 583-616
Graph minors. XXII. Irrelevant vertices in linkage problems, JCT, Series B, In Press, August 2011

Graph minors

Graph minors. I. Excluding a forest, JCT, Series B, Vol. 35, Iss. 1, August 1983, p. 39-61
Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width, JA, Vol. 7, Iss. 3, September 1986, p. 309-322
Graph minors. III. Planar tree-width, JCT, Series B, Vol. 36, Iss. 1, February 1984, p. 49-64
Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 227-254
Graph minors. V. Excluding a planar graph, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 92-114
Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc, JCT, Series B, Vol. 41, Iss. 1, August 1986, p. 115-138
Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface, JCT, Series B, Vol. 45, Iss. 2, October 1988, p. 212-254
Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces, JCT, Series B, Vol. 48, Iss. 2, April 1990, p. 255-288
Graph minors. IX. Disjoint crossed paths, JCT, Series B, Vol. 49, Iss. 1, June 1990, p. 40-77
Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition, JCT, Series B, Vol. 52, Iss. 2, July 1991, p. 153-190
Graph minors. XI. Circuits on a Surface, JCT, Series B, Vol. 60, Iss. 1, January 1994, p. 72-106
Graph minors. XII. Distance on a Surface, JCT, Series B, Vol. 64, Iss. 2, July 1995, p. 240-272
Graph minors. XIII. The Disjoint Paths Problem, JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 1, January 1995, p. 65-110
Graph minors. XIV. Extending an embedding., JCT, Series B, Vol. 63, Iss. 3, September 1995, p. 23-50
Graph minors. XV. Giant Steps, JCT, Series B, Vol. 68, Iss. 1, September 1996, p. 112-148
Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 43-76
Graph minors: XVII. Taming a Vortex, JCT, Series B, Vol. 77, Iss. 1, September 1999, p. 162-210
Graph minors. XVIII. Tree-decompositions and well-quasi-ordering, JCT, Series B, Vol. 89, Iss. 1, September 2003, p. 77-108
Graph minors. XIX. Well-quasi-ordering on a surface, JCT, Series B, Vol. 90, Iss. 2, March 2004, p. 325-385
Graph minors. XX. Wagner's conjecture, JCT, Series B, Vol. 92, Iss. 2, November 2004, p. 325-357
Graph minors. XXI. Graphs with unique linkages, JCT, Series B, Vol. 99, Iss. 3, May 2009, p. 583-616
Graph minors. XXII. Irrelevant vertices in linkage problems, JCT, Series B, In Press, August 2011
Graph minors. XXIII. Nash-Williams' immersion conjecture, JCT, Series B, Vol. 100, Iss. 2, March 2010, p. 181-205

O dowodzie

- Dowód ma w tym momencie ponad 700 stron ciężkiej kombinatoryki.

O dowodzie

- Dowód ma w tym momencie ponad 700 stron ciężkiej kombinatoryki.
- Mało kto go rozumie...

O dowodzie

- Dowód ma w tym momencie ponad 700 stron ciężkiej kombinatoryki.
- Mało kto go rozumie...
- Razem z dowodem powstała duża teoria, która znajduje szerokie zastosowania.

O dowodzie

- Dowód ma w tym momencie ponad 700 stron ciężkiej kombinatoryki.
- Mało kto go rozumie...
- Razem z dowodem powstała duża teoria, która znajduje szerokie zastosowania.
- **Plan na teraz**: Szkic dowodu.

Krok 1: przejście do H-minor-free

- Załóżmy, że istnieje kontrprzykład $G_1, G_2, G_3, \ldots$.

Krok 1: przejście do H-minor-free

- Załóżmy, że istnieje kontrprzykład $G_1, G_2, G_3, \ldots$.
- Oznaczmy $H := G_1$, wtedy wszystkie G_i dla $i > 1$ nie mają H jako minoru.

Krok 1: przejście do H-minor-free

- Załóżmy, że istnieje kontrprzykład $G_1, G_2, G_3, \ldots$.
- Oznaczmy $H := G_1$, wtedy wszystkie G_i dla $i > 1$ nie mają H jako minoru.
- Więc tak naprawdę należy dowieść twierdzenie dla klasy grafów z wykluczonym ustalonym minorem.

Krok 1: przejście do H-minor-free

- Załóżmy, że istnieje kontrprzykład $G_1, G_2, G_3, \ldots$.
- Oznaczmy $H := G_1$, wtedy wszystkie G_i dla $i > 1$ nie mają H jako minoru.
- Więc tak naprawdę należy dowieść twierdzenie dla klasy grafów z wykluczonym ustalonym minorem.
- Czy umiemy scharakteryzować grafy, które nie mają danego H jako minoru?

Krok 2: twierdzenie o dekompozycji

Twierdzenie o dekompozycji

Dla każdego grafu H istnieje taka $\alpha = \alpha(H)$, że każdy graf nie zawierający H jako minor można przedstawić jako α-sklejenie grafów α-prawie zanurzalnych w powierzchni genusu α.

- α-sklejenie: identyfikacja na małym fragmencie.

Krok 2: twierdzenie o dekompozycji

Twierdzenie o dekompozycji

Dla każdego grafu H istnieje taka $\alpha = \alpha(H)$, że każdy graf nie zawierający H jako minor można przedstawić jako α-sklejenie grafów α-prawie zanurzalnych w powierzchni genusu α.

- α-sklejenie: identyfikacja na małym fragmencie.
- α-prawie zanurzalny: zanurzalny modulo co najwyżej α wierzchołków i α vortex'ów.

O twierdzeniu o dekompozycji

- Dowód dekompozycji to ponad 350 stron.

O twierdzeniu o dekompozycji

- Dowód dekompozycji to ponad 350 stron.
- α nie jest wyliczona explicite, oszacowania z oryginalnego dowodu dają coś w stylu:

$$\underbrace{10^{10^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}}\Big\}10^{10^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}}\Big\}10^{10^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}}\ldots\Big\}10^{10^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}}}_{poly(|H|)}$$

O twierdzeniu o dekompozycji

- Dowód dekompozycji to ponad 350 stron.
- α nie jest wyliczona explicite, oszacowania z oryginalnego dowodu dają coś w stylu:

$$\underbrace{10^{10^{\cdots^{10}}}\Big\}10^{10^{\cdots^{10}}}\Big\}10^{10^{\cdots^{10}}}\ldots\Big\}10^{10^{\cdots^{10}}}}_{poly(|H|)}$$

- Ostatnio Ken-ichi Kawarabayashi, Robin Thomas i Paul Wollan uprościli dowód: poniżej 100 stron, α tylko potrójnie wykładnicza.

O twierdzeniu o dekompozycji

- Dowód dekompozycji to ponad 350 stron.
- α nie jest wyliczona explicite, oszacowania z oryginalnego dowodu dają coś w stylu:

$$\underbrace{10^{10^{\cdots^{10}}}\Big\}10^{10^{\cdots^{10}}}\Big\}10^{10^{\cdots^{10}}}\ldots\Big\}10^{10^{\cdots^{10}}}}_{poly(|H|)}$$

- Ostatnio Ken-ichi Kawarabayashi, Robin Thomas i Paul Wollan uprościli dowód: poniżej 100 stron, α tylko potrójnie wykładnicza.
- Robertson i Seymour sądzą, że tak naprawdę powinna być wielomianowa.

Krok 3: przejście do ograniczonego genusu

- Dowodzimy, że wystarczy pokazać twierdzenie dla grafów zanurzalnych w powierzchnie o ustalonym genusie: potem przepychamy przez twierdzenie o dekompozycji.

Krok 3: przejście do ograniczonego genusu

- Dowodzimy, że wystarczy pokazać twierdzenie dla grafów zanurzalnych w powierzchnie o ustalonym genusie: potem przepychamy przez twierdzenie o dekompozycji.
- To jest ogólna prawidłowość, algorytmy dla grafów planarnych uogólnia się do ustalonego genusu, a potem do H-minor-free.

Krok 4: ograniczony genus

- Dowodzimy twierdzenie dla grafów planarnych: to jest wbrew pozorom nie bardzo trudne.

Krok 4: ograniczony genus

- Dowodzimy twierdzenie dla grafów planarnych: to jest wbrew pozorom nie bardzo trudne.
- Dalej indukcja po genusie:

Krok 4: ograniczony genus

- Dowodzimy twierdzenie dla grafów planarnych: to jest wbrew pozorom nie bardzo trudne.
- Dalej indukcja po genusie:
  - Dowodzimy, że w ciągu grafów zanurzalnych w powierzchnię Σ wykluczających jako minor ustalony H_0, który jest również zanurzalny w Σ, można tak dobrać podciąg, żeby w nim można było wszystkie zanurzenia tak samo rozciąć małym kosztem.

Krok 4: ograniczony genus

- Dowodzimy twierdzenie dla grafów planarnych: to jest wbrew pozorom nie bardzo trudne.
- Dalej indukcja po genusie:
  - Dowodzimy, że w ciągu grafów zanurzalnych w powierzchnię Σ wykluczających jako minor ustalony H_0, który jest również zanurzalny w Σ, można tak dobrać podciąg, żeby w nim można było wszystkie zanurzenia tak samo rozciąć małym kosztem.
  - Odpalamy założenie indukcyjne dla powierzchni po rozcięciu i umiemy je podnieść.

Konsekwencje

- Dowód twierdzenia o dekompozycji jest w dużej mierze konstruktywny.

Konsekwencje

- Dowód twierdzenia o dekompozycji jest w dużej mierze konstruktywny.
- Na tyle, że można wyekstrahować algorytm działający w czasie $f(H)|G|^3$ sprawdzający, czy ustalony H jest minorem G.

Konsekwencje

- Dowód twierdzenia o dekompozycji jest w dużej mierze konstruktywny.
- Na tyle, że można wyekstrahować algorytm działający w czasie $f(H)|G|^3$ sprawdzający, czy ustalony H jest minorem G.
- Oznacza to, że dla **każdej** powierzchni Σ w czasie sześciennym umiemy sprawdzać, czy graf jest w nią zanurzalny.

Konsekwencje

- Dowód twierdzenia o dekompozycji jest w dużej mierze konstruktywny.
- Na tyle, że można wyekstrahować algorytm działający w czasie $f(H)|G|^3$ sprawdzający, czy ustalony H jest minorem G.
- Oznacza to, że dla **każdej** powierzchni Σ w czasie sześciennym umiemy sprawdzać, czy graf jest w nią zanurzalny.
- Różne powierzchnie:

Konsekwencje

- Dowód twierdzenia o dekompozycji jest w dużej mierze konstruktywny.
- Na tyle, że można wyekstrahować algorytm działający w czasie $f(H)|G|^3$ sprawdzający, czy ustalony H jest minorem G.
- Oznacza to, że dla **każdej** powierzchni Σ w czasie sześciennym umiemy sprawdzać, czy graf jest w nią zanurzalny.
- Różne powierzchnie:
  - **Sfera**: 2 zabronione minory.

Konsekwencje

- Dowód twierdzenia o dekompozycji jest w dużej mierze konstruktywny.
- Na tyle, że można wyekstrahować algorytm działający w czasie $f(H)|G|^3$ sprawdzający, czy ustalony H jest minorem G.
- Oznacza to, że dla **każdej** powierzchni Σ w czasie sześciennym umiemy sprawdzać, czy graf jest w nią zanurzalny.
- Różne powierzchnie:
  - **Sfera**: 2 zabronione minory.
  - **Płaszczyzna rzutowa**: 35 zabronionych minorów.

Konsekwencje

- Dowód twierdzenia o dekompozycji jest w dużej mierze konstruktywny.
- Na tyle, że można wyekstrahować algorytm działający w czasie $f(H)|G|^3$ sprawdzający, czy ustalony H jest minorem G.
- Oznacza to, że dla **każdej** powierzchni Σ w czasie sześciennym umiemy sprawdzać, czy graf jest w nią zanurzalny.
- Różne powierzchnie:
  - **Sfera**: 2 zabronione minory.
  - **Płaszczyzna rzutowa**: 35 zabronionych minorów.
  - **Torus**: nie znamy kompletnej listy, ale co najmniej 16000.

Konsekwencje

- Dowód twierdzenia o dekompozycji jest w dużej mierze konstruktywny.
- Na tyle, że można wyekstrahować algorytm działający w czasie $f(H)|G|^3$ sprawdzający, czy ustalony H jest minorem G.
- Oznacza to, że dla **każdej** powierzchni Σ w czasie sześciennym umiemy sprawdzać, czy graf jest w nią zanurzalny.
- Różne powierzchnie:
  - **Sfera**: 2 zabronione minory.
  - **Płaszczyzna rzutowa**: 35 zabronionych minorów.
  - **Torus**: nie znamy kompletnej listy, ale co najmniej 16000.
- Istnieje algorytm wielomianowy, który sprawdza, czy graf jest zanurzalny w powierzchnię genusu 10, ale nie umiemy go napisać.

Szerokość drzewiasta (treewidth)

- Tak naprawdę kluczowe pojęcie w dowodzie tw. o minorach.

Szerokość drzewiasta (treewidth)

- Tak naprawdę kluczowe pojęcie w dowodzie tw. o minorach.
- Wprowadzony w latach 80. przez kilku naukowców niezależnie.

Szerokość drzewiasta (treewidth)

- Tak naprawdę kluczowe pojęcie w dowodzie tw. o minorach.
- Wprowadzony w latach 80. przez kilku naukowców niezależnie.
- Ostała się wersja używana przez Robertsona i Seymoura.

Szerokość drzewiasta (treewidth)

- Tak naprawdę kluczowe pojęcie w dowodzie tw. o minorach.
- Wprowadzony w latach 80. przez kilku naukowców niezależnie.
- Ostała się wersja używana przez Robertsona i Seymoura.
- **Intuicja**: graf ma treewidth k, jeśli wygląda jak „drzewo grubości k”.

Dekompozycja drzewiasta

- Dekompozycja drzewiasta grafu G to drzewo T, w którym z każdym wierzchołkiem w stowarzyszamy podzbiór B_w wierzchołków G (zwany *workiem*).

Dekompozycja drzewiasta

- Dekompozycja drzewiasta grafu G to drzewo T, w którym z każdym wierzchołkiem w stowarzyszamy podzbiór B_w wierzchołków G (zwany *workiem*).
- Dekompozycja musi spełniać następujące warunki:

Dekompozycja drzewiasta

- Dekompozycja drzewiasta grafu G to drzewo T, w którym z każdym wierzchołkiem w stowarzyszamy podzbiór B_w wierzchołków G (zwany *workiem*).
- Dekompozycja musi spełniać następujące warunki:
  - każdy wierzchołek v musi być w jakimś worku;

Dekompozycja drzewiasta

- Dekompozycja drzewiasta grafu G to drzewo T, w którym z każdym wierzchołkiem w stowarzyszamy podzbiór B_w wierzchołków G (zwany *workiem*).
- Dekompozycja musi spełniać następujące warunki:
  - każdy wierzchołek v musi być w jakimś worku;
  - dla każdej krawędzi vw musi istnieć worek zawierający oba wierzchołki v, w;

Dekompozycja drzewiasta

- Dekompozycja drzewiasta grafu G to drzewo T, w którym z każdym wierzchołkiem w stowarzyszamy podzbiór B_w wierzchołków G (zwany *workiem*).
- Dekompozycja musi spełniać następujące warunki:
  - każdy wierzchołek v musi być w jakimś worku;
  - dla każdej krawędzi vw musi istnieć worek zawierający oba wierzchołki v, w;
  - dla każdego wierzchołka v zbiór worków zawierających v musi tworzyć spójne poddrzewo T.

Dekompozycja drzewiasta

- Dekompozycja drzewiasta grafu G to drzewo T, w którym z każdym wierzchołkiem w stowarzyszamy podzbiór B_w wierzchołków G (zwany *workiem*).
- Dekompozycja musi spełniać następujące warunki:
  - każdy wierzchołek v musi być w jakimś worku;
  - dla każdej krawędzi vw musi istnieć worek zawierający oba wierzchołki v, w;
  - dla każdego wierzchołka v zbiór worków zawierających v musi tworzyć spójne poddrzewo T.
- Szerokość dekompozcji to wielkość największego worka minus 1.

Dekompozycja drzewiasta

- Dekompozycja drzewiasta grafu G to drzewo T, w którym z każdym wierzchołkiem w stowarzyszamy podzbiór B_w wierzchołków G (zwany *workiem*).
- Dekompozycja musi spełniać następujące warunki:
  - każdy wierzchołek v musi być w jakimś worku;
  - dla każdej krawędzi vw musi istnieć worek zawierający oba wierzchołki v, w;
  - dla każdego wierzchołka v zbiór worków zawierających v musi tworzyć spójne poddrzewo T.
- Szerokość dekompozcji to wielkość największego worka minus 1.
- Treewidth grafu to minimalna szerokość jego dekompozycji drzewiastej.

Treewidth: przykłady

- Drzewa mają treewidth 1.

Treewidth: przykłady

- Drzewa mają treewidth 1.
- Cykle mają treewidth 2.

Treewidth: przykłady

- Drzewa mają treewidth 1.
- Cykle mają treewidth 2.
- Krata $k \times k$ ma treewidth k.

Treewidth: definicja alternatywna

- Alternatywnie definiujemy treewidth przez **grę w policjantów i złodziei**.

Treewidth: definicja alternatywna

- Alternatywnie definiujemy treewidth przez **grę w policjantów i złodziei**.
- W grafie jest k policjantów, dysponujących helikopterami, oraz jeden złodziej. Policjanci wiedzą, gdzie jest złodziej.

Treewidth: definicja alternatywna

- Alternatywnie definiujemy treewidth przez **grę w policjantów i złodziei**.
- W grafie jest k policjantów, dysponujących helikopterami, oraz jeden złodziej. Policjanci wiedzą, gdzie jest złodziej.
- **Rozstawienie**: policjanci się rozstawiają w wierzchołkach grafu, potem złodziej się ustawia.

Treewidth: definicja alternatywna

- Alternatywnie definiujemy treewidth przez **grę w policjantów i złodziei**.
- W grafie jest k policjantów, dysponujących helikopterami, oraz jeden złodziej. Policjanci wiedzą, gdzie jest złodziej.
- **Rozstawienie**: policjanci się rozstawiają w wierzchołkach grafu, potem złodziej się ustawia.
- **Tura**:

Treewidth: definicja alternatywna

- Alternatywnie definiujemy treewidth przez **grę w policjantów i złodziei**.
- W grafie jest k policjantów, dysponujących helikopterami, oraz jeden złodziej. Policjanci wiedzą, gdzie jest złodziej.
- **Rozstawienie**: policjanci się rozstawiają w wierzchołkach grafu, potem złodziej się ustawia.
- **Tura**:
  - podzbiór policjantów unosi się w górę deklarując, gdzie wyląduje;

Treewidth: definicja alternatywna

- Alternatywnie definiujemy treewidth przez **grę w policjantów i złodziei**.
- W grafie jest k policjantów, dysponujących helikopterami, oraz jeden złodziej. Policjanci wiedzą, gdzie jest złodziej.
- **Rozstawienie**: policjanci się rozstawiają w wierzchołkach grafu, potem złodziej się ustawia.
- **Tura**:
  - podzbiór policjantów unosi się w górę deklarując, gdzie wyląduje;
  - złodziej przemieszcza się gdziekolwiek, ale nie przechodząc przez policjantów na ziemi;

Treewidth: definicja alternatywna

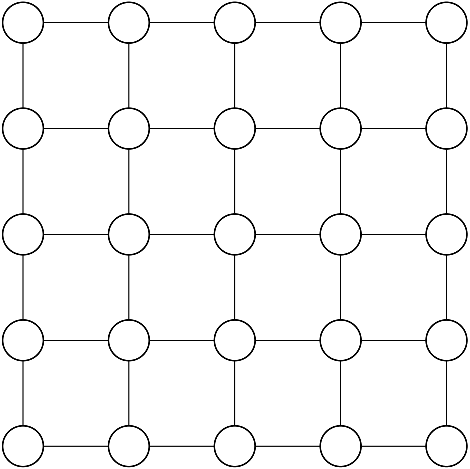
- Alternatywnie definiujemy treewidth przez **grę w policjantów i złodziei**.
- W grafie jest k policjantów, dysponujących helikopterami, oraz jeden złodziej. Policjanci wiedzą, gdzie jest złodziej.
- **Rozstawienie**: policjanci się rozstawiają w wierzchołkach grafu, potem złodziej się ustawia.
- **Tura**:
  - podzbiór policjantów unosi się w górę deklarując, gdzie wyląduje;
  - złodziej przemieszcza się gdziekolwiek, ale nie przechodząc przez policjantów na ziemi;
  - policjanci lądują na wskazanych miejscach.

Treewidth: definicja alternatywna

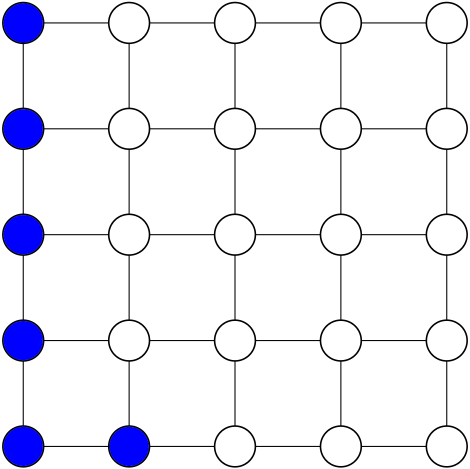
- Alternatywnie definiujemy treewidth przez **grę w policjantów i złodziei**.
- W grafie jest k policjantów, dysponujących helikopterami, oraz jeden złodziej. Policjanci wiedzą, gdzie jest złodziej.
- **Rozstawienie**: policjanci się rozstawiają w wierzchołkach grafu, potem złodziej się ustawia.
- **Tura**:
  - podzbiór policjantów unosi się w górę deklarując, gdzie wyląduje;
  - złodziej przemieszcza się gdziekolwiek, ale nie przechodząc przez policjantów na ziemi;
  - policjanci lądują na wskazanych miejscach.
- Treewidth grafu to minimalna liczba policjantów potrzebnych do złapania złodzieja minus 1.

Gra w policjantów i złodziei: przykład

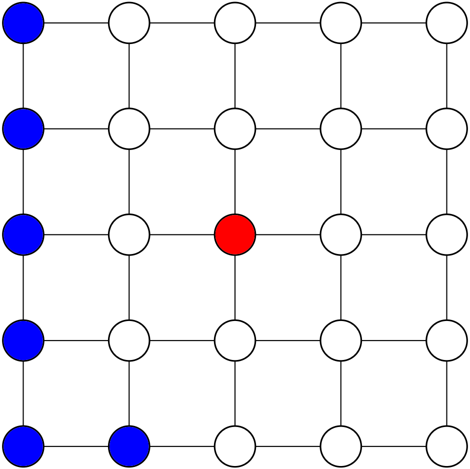
Gra w policjantów i złodziei: przykład



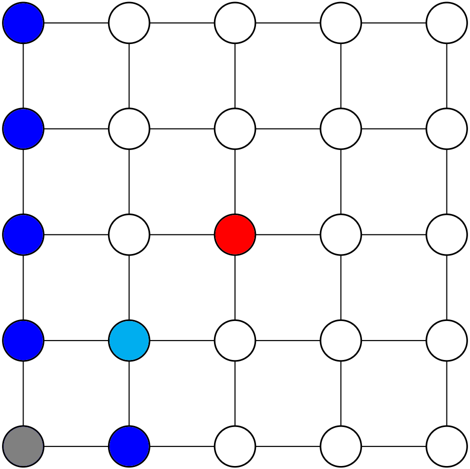
Gra w policjantów i złodziei: przykład



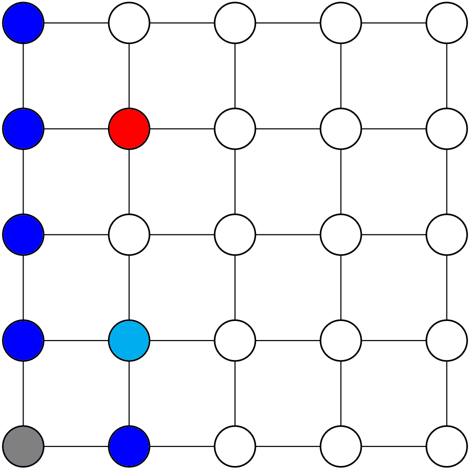
Gra w policjantów i złodziei: przykład



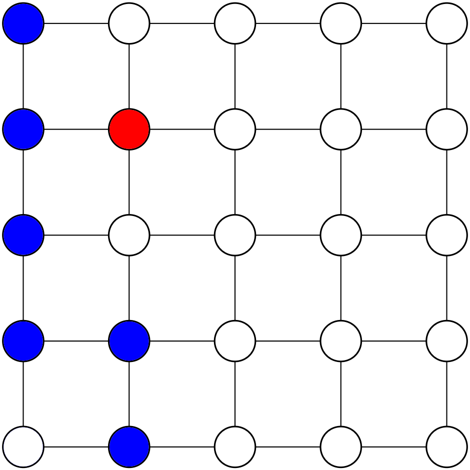
Gra w policjantów i złodziei: przykład



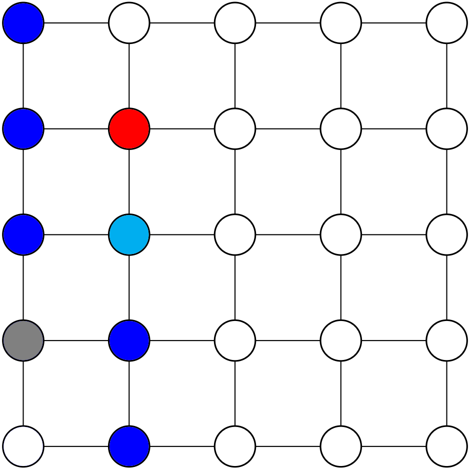
Gra w policjantów i złodziei: przykład



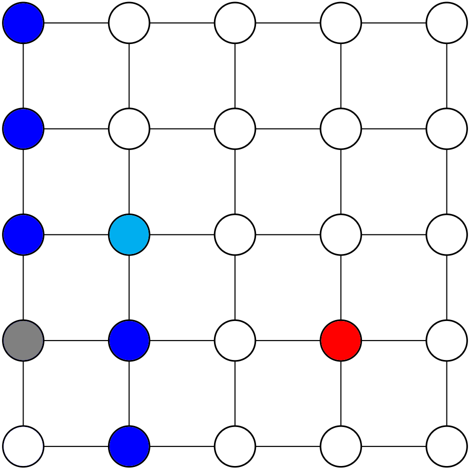
Gra w policjantów i złodziei: przykład



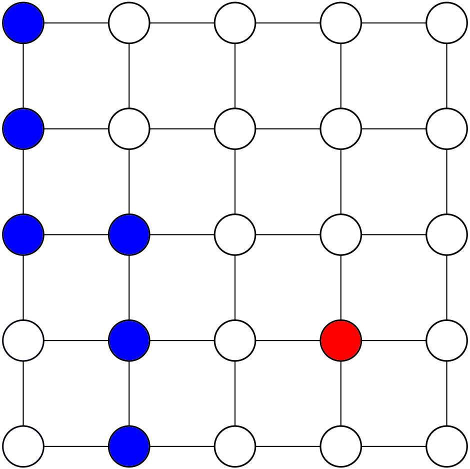
Gra w policjantów i złodziei: przykład



Gra w policjantów i złodziei: przykład



Gra w policjantów i złodziei: przykład



Czemu treewidth jest fajny?

- Minor grafu ma niewiększy treewidth: dobre własności topologiczne.

Czemu treewidth jest fajny?

- Minor grafu ma niewiększy treewidth: dobre własności topologiczne.
- Jest bardzo dobry algorytmicznie: na grafach o ograniczonym treewidthie wiele problemów jest prostych.

Czemu treewidth jest fajny?

- Minor grafu ma niewiększy treewidth: dobre własności topologiczne.
- Jest bardzo dobry algorytmicznie: na grafach o ograniczonym treewidthie wiele problemów jest prostych.
- Okazuje się być świetną miarą „skomplikowania” grafu.

Twierdzenie o kracie

Twierdzenie o kracie

Twierdzenie o kracie

Jeśli graf ma treewidth co najmniej $r^{4r^4(r+2)}$, to posiada kratę $r \times r$ jako minor.

Twierdzenie o kracie

Twierdzenie o kracie

Jeśli graf ma treewidth co najmniej $r^{4r^4(r+2)}$, to posiada kratę $r \times r$ jako minor.

Obserwacja

Jeśli graf posiada kratę $r \times r$ jako minor, to jego treewidth wynosi co najmniej r.

Twierdzenie o kracie

Twierdzenie o kracie

Jeśli graf ma treewidth co najmniej $r^{4r^4(r+2)}$, to posiada kratę $r \times r$ jako minor.

Obserwacja

Jeśli graf posiada kratę $r \times r$ jako minor, to jego treewidth wynosi co najmniej r.

Wniosek: Jedyną przeszkodą do wyglądania zgrubsza jak drzewo jest posiadanie dużej kraty w środku.

Twierdzenie o kracie

Twierdzenie o kracie

Jeśli graf ma treewidth co najmniej $r^{4r^4(r+2)}$, to posiada kratę $r \times r$ jako minor.

Obserwacja

Jeśli graf posiada kratę $r \times r$ jako minor, to jego treewidth wynosi co najmniej r.

Wniosek: Jedyną przeszkodą do wyglądania zgrubsza jak drzewo jest posiadanie dużej kraty w środku.

Uwaga: Dla grafów planarnych zależność jest liniowa ($4r$), ogólnie przypuszcza się, że powinna być wielomianowa.

Dziękuję za uwagę

Pytania?