Kilka słów o algebraicznej teorii grafów

Michał Pilipczuk

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski

28 stycznia 2011

Idea

- **Idea:** badać własności kombinatoryczne grafów za pomocą obiektów algebraicznych z nimi związanych

Idea

- **Idea:** badać własności kombinatoryczne grafów za pomocą obiektów algebraicznych z nimi związanych
  - macierz sąsiedztwa,

Idea

- **Idea:** badać własności kombinatoryczne grafów za pomocą obiektów algebraicznych z nimi związanych
  - macierz sąsiedztwa,
  - laplasjan,

Idea

- **Idea:** badać własności kombinatoryczne grafów za pomocą obiektów algebraicznych z nimi związanych
  - macierz sąsiedztwa,
  - laplasjan,
  - inne...

Idea

- **Idea:** badać własności kombinatoryczne grafów za pomocą obiektów algebraicznych z nimi związanych
  - macierz sąsiedztwa,
  - laplasjan,
  - inne...
- Co możemy badać?

Idea

- **Idea:** badać własności kombinatoryczne grafów za pomocą obiektów algebraicznych z nimi związanych
  - macierz sąsiedztwa,
  - laplasjan,
  - inne...
- Co możemy badać?
  - Możemy zliczać obiekty metodami algebraicznymi.

Idea

- **Idea:** badać własności kombinatoryczne grafów za pomocą obiektów algebraicznych z nimi związanych
  - macierz sąsiedztwa,
  - laplasjan,
  - inne...
- Co możemy badać?
  - Możemy zliczać obiekty metodami algebraicznymi.
    - **ładne**

Idea

- **Idea:** badać własności kombinatoryczne grafów za pomocą obiektów algebraicznych z nimi związanych
  - macierz sąsiedztwa,
  - laplasjan,
  - inne...
- Co możemy badać?
  - Możemy zliczać obiekty metodami algebraicznymi.
    - **ładne**
  - Możemy badać globalne własności grafu za pomocą własności spektralnych jej macierzy sąsiedztwa.

Idea

- **Idea:** badać własności kombinatoryczne grafów za pomocą obiektów algebraicznych z nimi związanych
  - macierz sąsiedztwa,
  - laplasjan,
  - inne...
- Co możemy badać?
  - Możemy zliczać obiekty metodami algebraicznymi.
    - **ładne**
  - Możemy badać globalne własności grafu za pomocą własności spektralnych jej macierzy sąsiedztwa.
    - **ważne**

Macierz sąsiedztwa

- Graf: $G = (V, E)$, gdzie E to zbiór par różnych elementów z V.

Macierz sąsiedztwa

- Graf: $G = (V, E)$, gdzie E to zbiór par różnych elementów z V.
- Czyli kropki połączone kreskami.

Macierz sąsiedztwa

- Graf: $G = (V, E)$, gdzie E to zbiór par różnych elementów z V.
- Czyli kropki połączone kreskami.
- Będziemy mówić o grafach prostych, w multigrafach mogą być pętelki i wielokrotne krawędzie.

Macierz sąsiedztwa

- Graf: $G = (V, E)$, gdzie E to zbiór par różnych elementów z V.
- Czyli kropki połączone kreskami.
- Będziemy mówić o grafach prostych, w multigrafach mogą być pętelki i wielokrotne krawędzie.
- Macierz sąsiedztwa $|V| \times |V|$:

$$(M)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{gdy pomiędzy } v_i \text{ oraz } v_j \text{ jest krawędź,} \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

Macierz sąsiedztwa

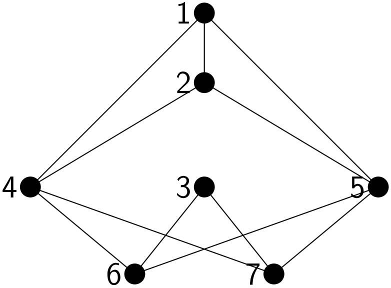
- Graf: $G = (V, E)$, gdzie E to zbiór par różnych elementów z V.
- Czyli kropki połączone kreskami.
- Będziemy mówić o grafach prostych, w multigrafach mogą być pętelki i wielokrotne krawędzie.
- Macierz sąsiedztwa $|V| \times |V|$:

$$(M)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{gdy pomiędzy } v_i \text{ oraz } v_j \text{ jest krawędź,} \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

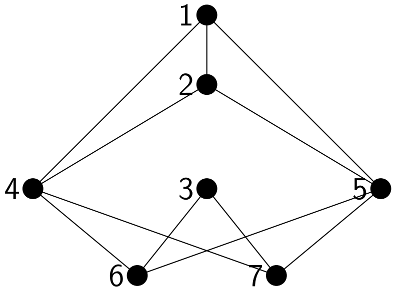
- Dla multigrafów:

$$(M)_{i,j} = \text{liczba krawędzi pomiędzy } v_i \text{ oraz } v_j.$$

Macierz sąsiedztwa — przykład



Macierz sąsiedztwa — przykład



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zliczanie marszrut

- Chcielibyśmy powiedzieć, na ile sposobów możemy przejść pomiędzy wierzchołkami v_i oraz v_j używając dokładnie k kroków.

Zliczanie marszrut

- Chcielibyśmy powiedzieć, na ile sposobów możemy przejść pomiędzy wierzchołkami v_i oraz v_j używając dokładnie k kroków.
- Wpierw dla $k = 2$. Ta liczba to liczba możliwych wierzchołków pośrednich, czyli $\sum_l (M)_{i,l}(M)_{l,j}$.

Zliczanie marszrut

- Chcielibyśmy powiedzieć, na ile sposobów możemy przejść pomiędzy wierzchołkami v_i oraz v_j używając dokładnie k kroków.
- Wpierw dla $k = 2$. Ta liczba to liczba możliwych wierzchołków pośrednich, czyli $\sum_l (M)_{i,l}(M)_{l,j}$.
- Czyli $(M^2)_{i,j}$.

Zliczanie marszrut

- Chcielibyśmy powiedzieć, na ile sposobów możemy przejść pomiędzy wierzchołkami v_i oraz v_j używając dokładnie k kroków.
- Wpierw dla $k = 2$. Ta liczba to liczba możliwych wierzchołków pośrednich, czyli $\sum_l (M)_{i,l}(M)_{l,j}$.
- Czyli $(M^2)_{i,j}$.
- Ogólnie: liczba sposobów przejścia w k krokach to

$$\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{k-1}} (M)_{i,l_1}(M)_{l_1,l_2}\ldots(M)_{l_{k-1},j}.$$

Zliczanie marszrut

- Chcielibyśmy powiedzieć, na ile sposobów możemy przejść pomiędzy wierzchołkami v_i oraz v_j używając dokładnie k kroków.
- Wpierw dla $k = 2$. Ta liczba to liczba możliwych wierzchołków pośrednich, czyli $\sum_l (M)_{i,l}(M)_{l,j}$.
- Czyli $(M^2)_{i,j}$.
- Ogólnie: liczba sposobów przejścia w k krokach to

$$\sum_{l_1,l_2,\ldots,l_{k-1}} (M)_{i,l_1}(M)_{l_1,l_2}\ldots(M)_{l_{k-1},j}.$$

- Co jest dokładnie równe $(M^k)_{i,j}$ (prosty argument: indukcja).

Zastosowanie

LVI OM, II etap, zadanie 3

W przestrzeni danych jest n ($n \geqslant 2$) punktów, z których żadne 4 nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre z tych punktów zostały połączone odcinkami. Niech K będzie liczbą poprowadzonych odcinków ($K \geqslant 1$), a T liczbą powstałych trójkątów. Udowodnić, że

$$9T^2 < 2K^3.$$

Problem

LVI OM, II etap, zadanie 3, wersja po ludzku

Wykazać, że dla grafu prostego $G = (V, E)$ zachodzi nierówność

$$9|T|^2 \leqslant 2|E|^3,$$

gdzie T jest zbiorem cykli długości 3 w G.

Zliczanie trójkątów

- Jak policzyć zgrabnie liczbę trójkątów w G?

Zliczanie trójkątów

- Jak policzyć zgrabnie liczbę trójkątów w G?
- Każda marszruta w G długości 3 o tym samym początku i końcu to trójkąt...

Zliczanie trójkątów

- Jak policzyć zgrabnie liczbę trójkątów w G?
- Każda marszruta w G długości 3 o tym samym początku i końcu to trójkąt...
- Wystarczy podnieść M do trzeciej potęgi, wziąć ślad i podzielić przez 6.

Zliczanie trójkątów

- Jak policzyć zgrabnie liczbę trójkątów w G?
- Każda marszruta w G długości 3 o tym samym początku i końcu to trójkąt...
- Wystarczy podnieść M do trzeciej potęgi, wziąć ślad i podzielić przez 6.
- A jak podobnie w terminach śladu wyrazić liczbę krawędzi?

Zliczanie trójkątów

- Jak policzyć zgrabnie liczbę trójkątów w G?
- Każda marszruta w G długości 3 o tym samym początku i końcu to trójkąt...
- Wystarczy podnieść M do trzeciej potęgi, wziąć ślad i podzielić przez 6.
- A jak podobnie w terminach śladu wyrazić liczbę krawędzi?
- Wystarczy podnieść M do drugiej potęgi, wziąć ślad i podzielić przez 2.

Zliczanie trójkątów

- Jak policzyć zgrabnie liczbę trójkątów w G?
- Każda marszruta w G długości 3 o tym samym początku i końcu to trójkąt...
- Wystarczy podnieść M do trzeciej potęgi, wziąć ślad i podzielić przez 6.
- A jak podobnie w terminach śladu wyrazić liczbę krawędzi?
- Wystarczy podnieść M do drugiej potęgi, wziąć ślad i podzielić przez 2.
- Nasza nierówność: $9\left(\frac{\mathrm{tr}(M^3)}{6}\right)^2 \leqslant 2\left(\frac{\mathrm{tr}(M^2)}{2}\right)^3$, czyli

$$\left(\mathrm{tr}(M^3)\right)^2 \leqslant \left(\mathrm{tr}(M^2)\right)^3.$$

Jak się robi nierówności na śladach?

- O macierzy M wiemy, że ma komplet rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Jak się robi nierówności na śladach?

- O macierzy M wiemy, że ma komplet rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
- Wartościami własnymi M^2 i M^3 są odpowiednio drugie i trzecie potęgi liczb λ_i.

Jak się robi nierówności na śladach?

- O macierzy M wiemy, że ma komplet rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
- Wartościami własnymi M^2 i M^3 są odpowiednio drugie i trzecie potęgi liczb λ_i.
- Nasza nierówność przyjmuje postać:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^3 .$$

Jak się robi nierówności na śladach?

- O macierzy M wiemy, że ma komplet rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
- Wartościami własnymi M^2 i M^3 są odpowiednio drugie i trzecie potęgi liczb λ_i.
- Nasza nierówność przyjmuje postać:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^3.$$

- Czyli wystarczy wykazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^3\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Jak się robi nierówności na śladach?

- O macierzy M wiemy, że ma komplet rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
- Wartościami własnymi M^2 i M^3 są odpowiednio drugie i trzecie potęgi liczb λ_i.
- Nasza nierówność przyjmuje postać:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^3.$$

- Czyli wystarczy wykazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^3\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Ale to jest szacowanie normy l_3 przez normę l_2!

A co możemy zrobić z wyznacznikiem?

- Mamy bardzo ciekawy obiekt algebraiczny: wyznacznik. Może liczy on coś ciekawego?

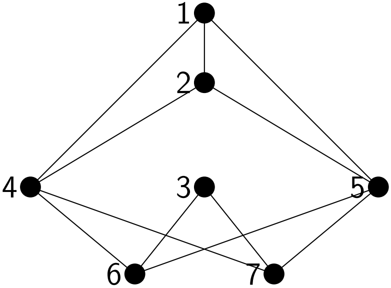
A co możemy zrobić z wyznacznikiem?

- Mamy bardzo ciekawy obiekt algebraiczny: wyznacznik. Może liczy on coś ciekawego?
- Użyjemy modyfikacji macierzy sąsiedztwa, czyli laplasjanu grafu:

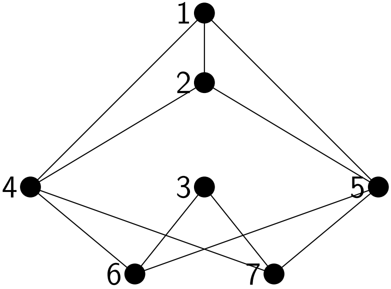
A co możemy zrobić z wyznacznikiem?

- Mamy bardzo ciekawy obiekt algebraiczny: wyznacznik. Może liczy on coś ciekawego?
- Użyjemy modyfikacji macierzy sąsiedztwa, czyli laplasjanu grafu:
- $$(L)_{i,j} = \begin{cases} \deg v_i & \text{jeśli } i = j, \\ -1 & \text{gdy pomiędzy } v_i \text{ oraz } v_j \text{ jest krawędź}, \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

Laplasjan — przykład



Laplasjan — przykład



$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Drzewa rozpinające

- A teraz coś z zupełnie innej beczki: drzewo rozpinające grafu.

Drzewa rozpinające

- A teraz coś z zupełnie innej beczki: drzewo rozpinające grafu.
- Drzewo rozpinające to podgraf o tym samym zbiorze wierzchołków,

Drzewa rozpinające

- A teraz coś z zupełnie innej beczki: drzewo rozpinające grafu.
- Drzewo rozpinające to podgraf o tym samym zbiorze wierzchołków,
  - (czyli graf na tym samym zbiorze wierzchołków, ale mający podzbiór krawędzi)

Drzewa rozpinające

- A teraz coś z zupełnie innej beczki: drzewo rozpinające grafu.
- Drzewo rozpinające to podgraf o tym samym zbiorze wierzchołków,
  - (czyli graf na tym samym zbiorze wierzchołków, ale mający podzbiór krawędzi)
- który jest drzewem,

Drzewa rozpinające

- A teraz coś z zupełnie innej beczki: drzewo rozpinające grafu.
- Drzewo rozpinające to podgraf o tym samym zbiorze wierzchołków,
  - (czyli graf na tym samym zbiorze wierzchołków, ale mający podzbiór krawędzi)
- który jest drzewem,
  - (czyli spójnym grafem bez cykli)

Drzewa rozpinające

- A teraz coś z zupełnie innej beczki: drzewo rozpinające grafu.
- Drzewo rozpinające to podgraf o tym samym zbiorze wierzchołków,
  - (czyli graf na tym samym zbiorze wierzchołków, ale mający podzbiór krawędzi)
- który jest drzewem,
  - (czyli spójnym grafem bez cykli)
- w szczególności uspójniającym wszystkie wierzchołki.

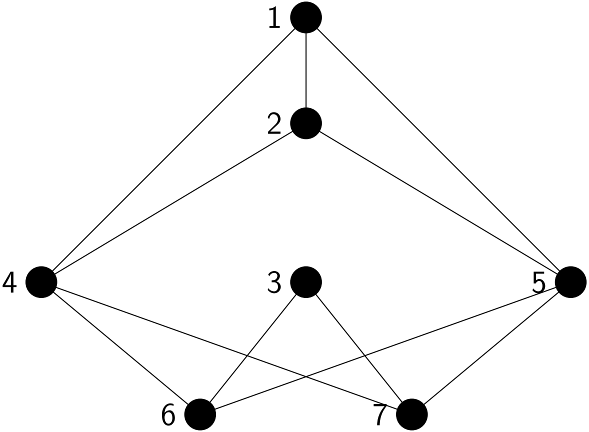
Drzewa rozpinające

- A teraz coś z zupełnie innej beczki: drzewo rozpinające grafu.
- Drzewo rozpinające to podgraf o tym samym zbiorze wierzchołków,
  - (czyli graf na tym samym zbiorze wierzchołków, ale mający podzbiór krawędzi)
- który jest drzewem,
  - (czyli spójnym grafem bez cykli)
- w szczególności uspójniającym wszystkie wierzchołki.
- Proste ćwiczenie 1: drzewo o n wierzchołkach ma $n-1$ krawędzi.

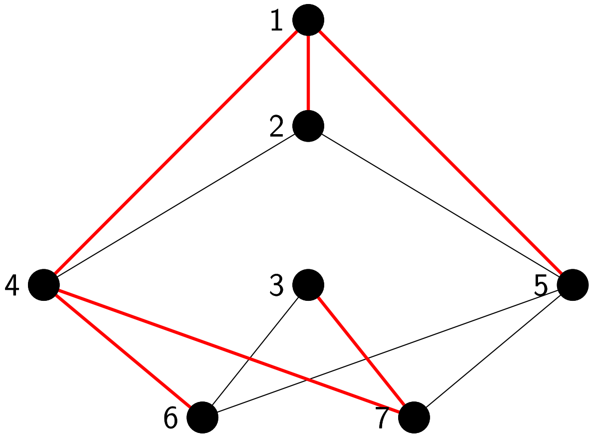
Drzewa rozpinające

- A teraz coś z zupełnie innej beczki: drzewo rozpinające grafu.
- Drzewo rozpinające to podgraf o tym samym zbiorze wierzchołków,
  - (czyli graf na tym samym zbiorze wierzchołków, ale mający podzbiór krawędzi)
- który jest drzewem,
  - (czyli spójnym grafem bez cykli)
- w szczególności uspójniającym wszystkie wierzchołki.
- Proste ćwiczenie 1: drzewo o n wierzchołkach ma $n-1$ krawędzi.
- Proste ćwiczenie 2: każdy graf spójny ma drzewo rozpinające.

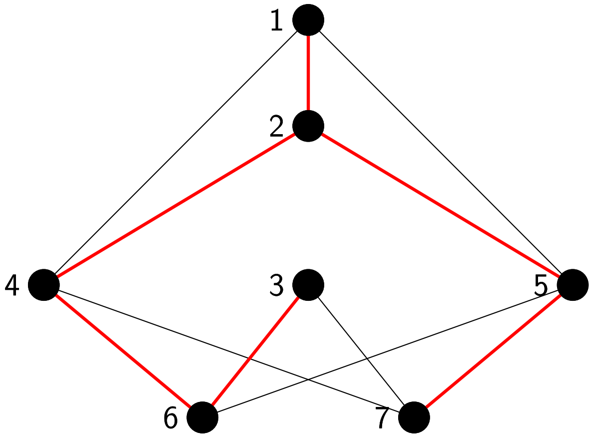
Drzewo rozpinające — przykład



Drzewo rozpinające — przykład



Drzewo rozpinające — przykład



Twierdzenie Kirchoffa

- Wykonaj magiczny przepis:

Twierdzenie Kirchoffa

- Wykonaj magiczny przepis:
  - napisz laplasjan grafu;

Twierdzenie Kirchoffa

- Wykonaj magiczny przepis:
  - napisz laplasjan grafu;
  - wykreśl dowolny wiersz i kolumnę o tym samym numerze;

Twierdzenie Kirchoffa

- Wykonaj magiczny przepis:
  - napisz laplasjan grafu;
  - wykreśl dowolny wiersz i kolumnę o tym samym numerze;
  - oblicz wyznacznik otrzymanej macierzy;

Twierdzenie Kirchoffa

- Wykonaj magiczny przepis:
  - napisz laplasjan grafu;
  - wykreśl dowolny wiersz i kolumnę o tym samym numerze;
  - oblicz wyznacznik otrzymanej macierzy;
- a wyjdzie Ci liczba drzew rozpinających grafu G.

Twierdzenie Kirchoffa

- Wykonaj magiczny przepis:
  - napisz laplasjan grafu;
  - wykreśl dowolny wiersz i kolumnę o tym samym numerze;
  - oblicz wyznacznik otrzymanej macierzy;
- a wyjdzie Ci liczba drzew rozpinających grafu G.
- **Uwaga:** To pokazuje, że liczenie liczby drzew rozpinających jest w P, mimo, że może ich być wykładniczo wiele!

Dowód twierdzenia Kirchoffa [wersja prof. Ryttera]

- Dla ustalenia uwagi z macierzy wykreślamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę.

Dowód twierdzenia Kirchoffa [wersja prof. Ryttera]

- Dla ustalenia uwagi z macierzy wykreślamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę.
- Wyznacznik jest rozdzielny ze względu na sumę pojedynczego wiersza.

Dowód twierdzenia Kirchoffa [wersja prof. Ryttera]

- Dla ustalenia uwagi z macierzy wykreślamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę.
- Wyznacznik jest rozdzielny ze względu na sumę pojedynczego wiersza.
- Po kolei i-ty wiersz dzielimy na sumę $\deg v_i$ wierszy z jedną jedynką (pochodzącą z diagonali) i jedną minus jedynką (pochodzącą z krawędzi)

Dowód twierdzenia Kirchoffa [wersja prof. Ryttera]

- Dla ustalenia uwagi z macierzy wykreślamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę.
- Wyznacznik jest rozdzielny ze względu na sumę pojedynczego wiersza.
- Po kolei i-ty wiersz dzielimy na sumę $\deg v_i$ wierszy z jedną jedynką (pochodzącą z diagonali) i jedną minus jedynką (pochodzącą z krawędzi)
  - **Uwaga:** Minus jedynki może nie być, jeśli krawędź prowadziła do wierzchołka v_1.

Dowód twierdzenia Kirchoffa [wersja prof. Ryttera]

- Dla ustalenia uwagi z macierzy wykreślamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę.
- Wyznacznik jest rozdzielny ze względu na sumę pojedynczego wiersza.
- Po kolei i-ty wiersz dzielimy na sumę $\deg v_i$ wierszy z jedną jedynką (pochodzącą z diagonali) i jedną minus jedynką (pochodzącą z krawędzi)
  - **Uwaga:** Minus jedynki może nie być, jeśli krawędź prowadziła do wierzchołka v_1.
- Stosując rozdzielność dostajemy, że $\det L = \sum_S \det L_S$, gdzie L_S odpowiada macierzy powstałej w wyniku wyboru dla każdego wierzchołka $v_2, v_3, \ldots, v_n$ jakiejś incydentnej krawędzi.

Dowód twierdzenia Kirchoffa [wersja prof. Ryttera]

- Dla ustalenia uwagi z macierzy wykreślamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę.
- Wyznacznik jest rozdzielny ze względu na sumę pojedynczego wiersza.
- Po kolei i-ty wiersz dzielimy na sumę $\deg v_i$ wierszy z jedną jedynką (pochodzącą z diagonali) i jedną minus jedynką (pochodzącą z krawędzi)
  - **Uwaga:** Minus jedynki może nie być, jeśli krawędź prowadziła do wierzchołka v_1.
- Stosując rozdzielność dostajemy, że $\det L = \sum_S \det L_S$, gdzie L_S odpowiada macierzy powstałej w wyniku wyboru dla każdego wierzchołka $v_2, v_3, \ldots, v_n$ jakiejś incydentnej krawędzi.
- Pokażemy, że $\det L_S$ wynosi 1 gdy S odpowiada wyborowi drzewa rozpinającego oraz 0 w przeciwnym przypadku.

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- S to przyporządkowanie wierzchołkom $v_2, \ldots, v_n$ krawędzi z nimi incydentnych.

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- S to przyporządkowanie wierzchołkom $v_2, \ldots, v_n$ krawędzi z nimi incydentnych.
- Są dwie możliwości:

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- S to przyporządkowanie wierzchołkom $v_2, \ldots, v_n$ krawędzi z nimi incydentnych.
- Są dwie możliwości:
  - krawędzie wybrane w S tworzą drzewo rozpinające;

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- S to przyporządkowanie wierzchołkom $v_2, \ldots, v_n$ krawędzi z nimi incydentnych.
- Są dwie możliwości:
  - krawędzie wybrane w S tworzą drzewo rozpinające;
  - krawędzie wybrane w S zawierają cykl (być może długości 2, gdy pewna krawędź wybrana przez oba jej końce).

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- S to przyporządkowanie wierzchołkom $v_2, \ldots, v_n$ krawędzi z nimi incydentnych.
- Są dwie możliwości:
  - krawędzie wybrane w S tworzą drzewo rozpinające;
  - krawędzie wybrane w S zawierają cykl (być może długości 2, gdy pewna krawędź wybrana przez oba jej końce).
- Jeśli S zawiera cykl to dodając wiersze odpowiadające krawędziom tego cyklu dostajemy wektor zerowy!

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- S to przyporządkowanie wierzchołkom $v_2, \ldots, v_n$ krawędzi z nimi incydentnych.
- Są dwie możliwości:
    - krawędzie wybrane w S tworzą drzewo rozpinające;
    - krawędzie wybrane w S zawierają cykl (być może długości 2, gdy pewna krawędź wybrana przez oba jej końce).
- Jeśli S zawiera cykl to dodając wiersze odpowiadające krawędziom tego cyklu dostajemy wektor zerowy!
- Czyli wtedy macierz jest osobliwa, czyli $\det L_S = 0$.

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- A co jak S jest drzewem rozpinającym?

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- A co jak S jest drzewem rozpinającym?
- Będziemy redukować macierz L_S do macierzy identycznościowej, tak jak dzieci w przedszkolach.

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- A co jak S jest drzewem rozpinającym?
- Będziemy redukować macierz L_S do macierzy identycznościowej, tak jak dzieci w przedszkolach.
- Spójrzmy na wierzchołek v_l sąsiadujący w drzewie z v_1 — dla niego mamy l-ty wiersz z samotną jedynką na diagonali.

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- A co jak S jest drzewem rozpinającym?
- Będziemy redukować macierz L_S do macierzy identycznościowej, tak jak dzieci w przedszkolach.
- Spójrzmy na wierzchołek v_l sąsiadujący w drzewie z v_1 — dla niego mamy l-ty wiersz z samotną jedynką na diagonali.
- Tym wierszem redukujemy wszystkie wiersze pozostałych sąsiadów v_l.

Dowód twierdzenia Kirchoffa

- A co jak S jest drzewem rozpinającym?
- Będziemy redukować macierz L_S do macierzy identycznościowej, tak jak dzieci w przedszkolach.
- Spójrzmy na wierzchołek v_l sąsiadujący w drzewie z v_1 — dla niego mamy l-ty wiersz z samotną jedynką na diagonali.
- Tym wierszem redukujemy wszystkie wiersze pozostałych sąsiadów v_l.
- Redukujemy tak w dół drzewa aż do macierzy identycznościowej, o wyznaczniku 1.

Co jeszcze można zrobić z wyznacznikiem?

- Mamy ciekawą formułę permutacyjną na wyznacznik, może ona umie coś ciekawego liczyć w grafie?

Co jeszcze można zrobić z wyznacznikiem?

- Mamy ciekawą formułę permutacyjną na wyznacznik, może ona umie coś ciekawego liczyć w grafie?
- Graf dwudzielny, to taki, którego wierzchołki dzielą się na dwie grupy: lewe i prawe, zaś krawędzie łączą tylko lewe z prawymi.

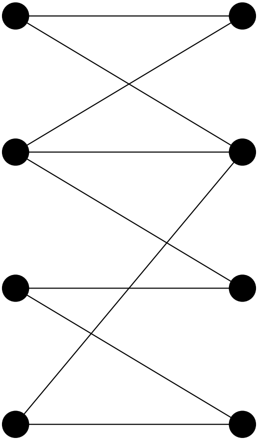
Co jeszcze można zrobić z wyznacznikiem?

- Mamy ciekawą formułę permutacyjną na wyznacznik, może ona umie coś ciekawego liczyć w grafie?
- Graf dwudzielny, to taki, którego wierzchołki dzielą się na dwie grupy: lewe i prawe, zaś krawędzie łączą tylko lewe z prawymi.
- Doskonałe skojarzenie w grafie dwudzielnym to bijektywne przyporządkowanie wierzchołkom z lewej wierzchołków z prawej tak, by każdy wierzchołek miał przyporządkowanego swojego sąsiada.

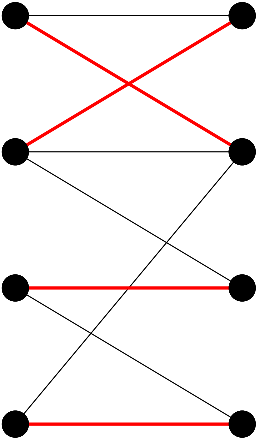
Co jeszcze można zrobić z wyznacznikiem?

- Mamy ciekawą formułę permutacyjną na wyznacznik, może ona umie coś ciekawego liczyć w grafie?
- Graf dwudzielny, to taki, którego wierzchołki dzielą się na dwie grupy: lewe i prawe, zaś krawędzie łączą tylko lewe z prawymi.
- Doskonałe skojarzenie w grafie dwudzielnym to bijektywne przyporządkowanie wierzchołkom z lewej wierzchołków z prawej tak, by każdy wierzchołek miał przyporządkowanego swojego sąsiada.
- Chcielibyśmy policzyć liczbę doskonałych skojarzeń w grafie.

Przykład



Przykład



Macierz sąsiedztwa grafu dwudzielnego

- Z grafem dwudzielnym o n wierzchołkach z prawej i m z lewej możemy stowarzyszyć macierz A wymiaru $n \times m$:

$$(A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{gdy pomiędzy } v_i \text{ oraz } w_j \text{ jest krawędź,} \\ 0 & w.p.p. \end{cases}.$$

Macierz sąsiedztwa grafu dwudzielnego

- Z grafem dwudzielnym o n wierzchołkach z prawej i m z lewej możemy stowarzyszyć macierz A wymiaru $n \times m$:

$$(A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{gdy pomiędzy } v_i \text{ oraz } w_j \text{ jest krawędź,} \\ 0 & w.p.p. \end{cases}.$$

- Liczba doskonałych skojarzeń:

$$\text{per } A = \sum_{\pi \in S_n} (A)_{1,\pi(1)} (A)_{2,\pi(2)} \cdots (A)_{1,\pi(n)}.$$

Macierz sąsiedztwa grafu dwudzielnego

- Z grafem dwudzielnym o n wierzchołkach z prawej i m z lewej możemy stowarzyszyć macierz A wymiaru $n \times m$:

$$(A)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{gdy pomiędzy } v_i \text{ oraz } w_j \text{ jest krawędź,} \\ 0 & w.p.p. \end{cases}.$$

- Liczba doskonałych skojarzeń:

$$\mathrm{per}\ A = \sum_{\pi \in S_n} (A)_{1,\pi(1)} (A)_{2,\pi(2)} \dots (A)_{1,\pi(n)}.$$

- Wyznacznik:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\sigma(\pi)} (A)_{1,\pi(1)} (A)_{2,\pi(2)} \dots (A)_{1,\pi(n)}.$$

Permanent a wyznacznik

- Niestety, permanent to nie wyznacznik...

Permanent a wyznacznik

- Niestety, permanent to nie wyznacznik...
- Ale modulo 2 już jest!

Permanent a wyznacznik

- Niestety, permanent to nie wyznacznik...
- Ale modulo 2 już jest!
- Czyli umiemy policzyć parzystość liczby skojarzeń w grafie, nawet wielomianowo.

Permanent a wyznacznik

- Niestety, permanent to nie wyznacznik...
- Ale modulo 2 już jest!
- Czyli umiemy policzyć parzystość liczby skojarzeń w grafie, nawet wielomianowo.
- Ale samej liczby już nie: obliczenie permanentu macierzy zerojedynkowej jest *NP*-trudne.

Dziękuję za uwagę

Pytania?