Analiza matematyczna dla informatyków

Wykłady dla pierwszego roku informatyki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Marcin Moszyński

10 września 2010

Skład w systemie TEX

w wersji 2007/8:

- Tomasz Idziaszek
- Tomasz Kazana
- Piotr Stańczyk

w kolejnych wersjach (liczne poprawki, udoskonalenia, dodatki):

- Tomasz Kazana

Szanowny Czytelniku!

Będę wdzięczny za wszelkie uwagi dotyczące skryptu. Można je np. przesyłać na mój adres e-mailowy: `mmoszyns@mimuw.edu.pl`

Autor

O wykładzie i o skrypcie

Niniejszy skrypt obejmuje wykłady analizy matematycznej dla studentów pierwszego roku informatyki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Ta kolejna, zmodyfikowana, wersja skryptu powstawała jako podręcznik dla studentów — słuchaczy moich wykładów z lat 2007/8 — 2009/10.

Semestr zimowy wykładu (ok. 15 wykładów po 90 minut) to rozdziały I — VI. Obejmuje on kilka podstawowych działów analizy matematycznej ujętych w sposób dosyć skrótowy, choć zawierających najważniejsze pojęcia i twierdzenia. Omawiamy tu: szkic teorii aksjomatycznej liczb rzeczywistych, teorię ciągów i szeregów liczbowych, funkcje jednej zmiennej — granicę, ciągłość, rachunek różniczkowy oraz zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych.

Rozdziały VII — XI to semestr letni (ok. 21 wykładów). Poza rachunkiem całkowym jednej zmiennej (z całką Riemanna), stanowiącym uzupełnienie klasycznej tematyki „Analizy I" z semestru zimowego, jest to przegląd kilku dalszych ważnych działów analizy matematycznej lub innych działów matematyki z nią związanych. Z konieczności, w tej części wykładu bardzo wiele twierdzeń musi być formułowanych bez dowodów. Pojawiają się tu przestrzenie metryczne, funkcje wielu zmiennych — ciągłość i rachunek różniczkowy, teoria miary (z całką Lebesgue'a) użyta do całkowania funkcji wielu zmiennych oraz równania różniczkowe zwyczajne. Po każdym z rozdziałów zamieszczony jest zestaw zadań.

Wykład ten jest w zasadzie samowystarczalny, choć Czytelnik może z powodzeniem korzystać także z wielu pozycji bogatej literatury obejmującej powyższe tematy. Spośród zwięzłych ujęć tematyki o nieco zbliżonym zakresie polecam np.:

- (ad. rozdziały I — VII) Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN (Biblioteka matematyczna, tom 22);
- (ad. rozdziały VIII — XI) wybrane fragmenty książki Witolda Kołodzieja *Analiza matematyczna*, PWN (Matematyka dla politechnik).

Oznaczenia edytorskie

(spis symboli matematycznych zamieszczony jest pod koniec skryptu)

$\square$ — koniec dowodu (ewentualnie jego szkicu)

B.D. — bez dowodu (choć czasem brak dowodu jest sygnalizowany inaczej)

$\forall$ — (w zestawie zadań po każdym rozdziale) zadanie „obowiązkowe", tj. do zrobienia we wszystkich grupach ćwiczeniowych

tekst mniejszej szerokości niż zazwyczaj, złożony taką właśnie czcionką — materiał dodatkowy lub nieco dłuższa dygresja...

Spis treści

I Liczby rzeczywiste — szkic teorii aksjomatycznej, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, potęga rzeczywista

[około $2\frac{1}{2}$ wykładu]

1. Nieco oznaczeń

Punktem wyjścia do całej właściwie matematyki jest teoria mnogości (tj. zbiorów) i logika matematyczna. Potrzebujemy ich więc także w analizie matematycznej. Sporo elementów powyższych teorii poznacie Państwo na wykładzie „Podstawy matematyki”. Oczekuję, że nie jest Państwu obca podstawowa symbolika logiczna (np. sens symboli $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$) i rachunku zbiorów (np. sens $\cup$, $\cap$). Teraz wyjaśnię zatem tylko kilka potrzebnych nam symboli — liczę, że przynajmniej częściowo znajomych.

- **kwantyfikatory**:

  $\forall$ — „dla każdego” (od ang. **A**LL; wersja „szkolna” — $\bigwedge$),

  $\exists$ — „istnieje” (od **E**XISTS; wersja „szkolna” — $\bigvee$);

- **„indeksowane” działania na zbiorach** (uogólnienia $\cap$ i $\cup$):

  jeśli I to pewien zbiór („indeksów”) oraz dla każdego $i \in I$ dany jest zbiór X_i będący podzbiorem pewnego zbioru X, to

  $\bigcap_{i\in I} X_i := \{x \in X \colon \forall_{i\in I}\ x \in X_i\}$,[1)]

  $\bigcup_{i\in I} X_i := \{x \in X \colon \exists_{i\in I}\ x \in X_i\}$;

- **funkcje**: $f\colon A \to B$ — funkcja ze zbioru A w zbiór B.

2. Aksjomaty liczb rzeczywistych

Co to są liczby rzeczywiste, tj. jak się nimi posługiwać, jakie obowiązują dla nich reguły — to dość dobrze każdy z Państwa wie; przynajmniej macie już Państwo wyrobione nawyki i rozwinięte intuicje ich dotyczące. Dla matematyka (i dla informatyka...) to jednak za mało. My potrzebujemy ścisłych reguł rozumowania i narzędzi weryfikowania hipotez. Zapewni nam to *teoria aksjomatyczna*. Najpierw przyjmujemy więc kilka podstawowych pojęć (tzw. *pojęć pierwotnych*), takich, które w naszej teorii przyjmujemy bez definicji. Są to: $\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych, dwie operacje $+$ i $\cdot$, dwa wyróżnione elementy zbioru $\mathbb{R}$ — mianowicie 0 i 1 oraz relację (porządku) $\leqslant$. Wszystkie pozostałe obiekty będziemy musieli zdefiniować.

Drugi „fundament” to *aksjomaty* (inaczej *pewniki*), czyli te własności dotyczące powyższych pojęć pierwotnych, które przyjmujemy za punkt wyjścia w naszej teorii. Przyjmujemy je zatem bez żadnego dowodu, jako fakty niepodważalne. Natomiast wszystkie inne twierdzenia (dla niektórych z nich będziemy używali też innych nazw: lemat, własność, wniosek, fakt itp.) będą już wymagały dowodu, który będzie musiał być ścisłym logicznie rozumowaniem, wykorzystującym wyłącznie aksjomaty (które właściwe także są twierdzeniami, tyle że niezbyt

1) Symbol $:=$ lub $=:$ z formalnego punktu widzenia to to samo co $=$, natomiast będziemy go używać głównie tylko wtedy, gdy wprowadzamy (definiujemy) jakieś nowe oznaczenie; dwukropek „:” jest wówczas po stronie definiowanego obiektu.

„trudnymi"...) lub twierdzenia wcześniej udowodnione[2)] . Oczywiście aksjomaty będą własnościami w pełni zgodnymi z naszą intuicją. Będzie ich na tyle dużo, by „wszystko co trzeba" dało się przy ich pomocy udowodnić. Ponadto (co już znacznie mniej ważne) na tyle mało, by jedne z drugich nie wynikały (tzw. *niezależność aksjomatów*).

Oto one (jest ich kilkanaście, podajemy je „po trochu").

◇ Aksjomaty ciała uporządkowanego

Pierwsze cztery mówią, że trójka $(\mathbb{R}, 0, +)$ jest *grupą przemienną*, tzn.:

(D1.) (*łączność +*) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x+y)+z = x+(y+z)$;

(D2.) (*neutralność 0*) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x+0 = 0+x = x$;

(D3.) (*istnienie elementu przeciwnego*) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ x+y = y+x = 0$;

(D4.) (*przemienność +*) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x+y = y+x$.

Uwaga. Same aksjomaty (D1.)–(D3.) stanowią *de facto* definicję *grupy*. Jako sprawdzian zrozumienia powyższej uwagi, proponuję samodzielne dokończenie poniższej definicji.

Definicja. *Trójka $(G, e, \odot)$, gdzie G — zbiór, $e \in G$, $\odot$ — operacja w G (tzn. $\odot\colon G\times G \to G$) jest **grupą** wtedy i tylko wtedy, gdy*[3)] *... Grupa ta jest **przemienna** (inaczej **abelowa**) wtw ...*

Kolejne aksjomaty dotyczą mnożenia i liczby 1. Dla wygody oznaczymy $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(M1.) (*łączność ·*) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$;

(M2.) (*neutralność 1*) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x\cdot 1 = 1\cdot x = x$;

(M3.) (*istnienie elementu odwrotnego*) $\forall_{x\in\mathbb{R}^*}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ x\cdot y = y\cdot x = 1$;

(M4.) (*przemienność ·*) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x\cdot y = y\cdot x$.

Analogia (M1.)–(M4.) do (D1.)–(D4.) narzuca się sama, choć widać pewną różnicę w (M3.) (jaką?). Gdy dodamy następny aksjomat, a mianowicie

(01.) $0 \neq 1$,

łatwo będzie dowieść (zachęcam), że $\forall_{x,y\in\mathbb{R}^*}\ x\cdot y \neq 0$, a zatem, że mnożenie $\cdot$ można „obciąć" do mnożenia $\tilde{\cdot}$ w $\mathbb{R}^*$ (tj. $\tilde{\cdot}\colon (\mathbb{R}^*)\times(\mathbb{R}^*) \to \mathbb{R}^*$ i $x\tilde{\cdot}y := x\cdot y$ dla $x, y \in \mathbb{R}^*$) i $(\mathbb{R}^*, 1, \tilde{\cdot})$ jest grupą (także przemienną).

Kolejny aksjomat opisuje ważną własność dotyczącą jednocześnie dodawania i mnożenia:

(DM.) (*rozdzielność mnożenia względem dodawania*) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$.

Wymienione dotąd aksjomaty stanowią razem definicję *ciała* (a dokładniej — ciała przemiennego — gdyż niektórzy wyłączają przemienność mnożenia z definicji ciała). Następne dwa aksjomaty wiążą ze sobą działania i relację $\leqslant$:

(DP.) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z$,

(MP.) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x \leqslant y \wedge 0 \leqslant z) \Rightarrow xz \leqslant yz$.

Gdy dołożymy jeszcze cztery aksjomaty dotyczące samej relacji $\leqslant$:

(P1.) (*zwrotność*) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x \leqslant x$,

(P2.) (*słaba antysymetria*) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ (x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \Rightarrow x = y$,

(P3.) (*przechodniość*) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x \leqslant y \wedge y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$,

(P4.) (*spójność*) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x \leqslant y \vee y \leqslant x$,

to otrzymamy *ciało uporządkowane*.

[2)] Uwaga! Ten idealistyczny program z konieczności będziemy realizowali z licznymi odstępstwami — niektóre dowody będziemy na wykładzie pomijali lub skracali, a niektóre znane, czy oczywiste dla Państwa twierdzenia (w tym pewne analogi sformułowanych już twierdzeń) będziemy przemilczali. A to, by Państwa nie zanudzić i by zdążyć na czas z obszernym programem.

[3)] Dalej „wtedy i tylko wtedy, gdy" skracamy do wtw.

◇ Kresy i zupełność

Pytanie, czy to już wszystkie „potrzebne" aksjomaty. Nie, bo zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (ściśle zdefiniujemy go wkrótce) ze zwykłymi działaniami i nierównością wszystkie powyższe aksjomaty spełnia, a przecież $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ różnią się między sobą wieloma własnościami (np. jaką?). Na szczęście, to czego brakuje to tylko jeden aksjomat, choć już nie tak intuicyjny, jak wcześniejsze. By go zgrabnie sformułować, przyjmijmy następujące definicje:

Definicja. *Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.*

- *b jest* ***ograniczeniem górnym (dolnym)*** [4] *zbioru A wtw $\forall_{a\in A}\ a \leqslant b$ ($b \leqslant a$).*
- *Zbiór A jest* ***ograniczony z góry (z dołu)*** *wtw istnieje $b \in \mathbb{R}$, będące ograniczeniem górnym (dolnym) A.*
- *Zbiór A jest* ***ograniczony*** *wtw jest ograniczony z góry i z dołu.*
- *b jest* ***elementem największym (najmniejszym)*** *zbioru A wtw $b \in A \wedge \forall_{a\in A}\ a \leqslant b$ ($b \leqslant a$).*
- *b jest* ***kresem górnym****, czyli* ***supremum*** *(****kresem dolnym****, czyli* ***infimum****) zbioru A wtw b jest elementem najmniejszym (największym) zbioru wszystkich ograniczeń górnych (dolnych) A.*

Oczywiście, jeśli dla zbioru A istnieje kres górny (dolny), to A musi być ograniczony z góry (z dołu). Można wykazać, że implikacja odwrotna (dla $A \neq \emptyset$) nie wynika z wcześniejszych aksjomatów. Jest ona jednak treścią ostatniego aksjomatu:

(Z.) (*aksjomat zupełności* [5]) Dla każdego niepustego, ograniczonego z góry zbioru $A \subset \mathbb{R}$ istnieje $b \in \mathbb{R}$ taki, że b jest kresem górnym A.

A zatem „nasza" teoria liczb rzeczywistych opiera się na zestawie siedemnastu aksjomatów. Ale w skrócie $\mathbb{R}$ to po prostu ciało (przemienne) uporządkowane, zupełne.

Tu należy się Państwu jedna ważna uwaga. W całej matematyce, obowiązują dodatkowo pewne ogólne reguły. Obowiązują one zatem także w uprawianej przez nas teorii, niezależnie od podanych już aksjomatów. Są to przede wszystkim reguły teorii mnogości (czyli teorii zbiorów) oraz logiki. Zawierają one np. zasady posługiwania się formułami matematycznymi, kwantyfikatorami, czy relacją równości (choćby to, że jeśli $a = b$, to $b = a$; albo że jeśli $a = b$ i $b = c$, to $a = c$). Oczywiście nie jesteśmy w stanie ich wszystkich tu omówić, ale dla uspokojenia osób rozczarowanych wspomnę, że są one dość naturalne i intuicyjne oraz że więcej na ten temat dowiecie się Państwo na wykładach przedmiotu Podstawy Matematyki[6] .

Nie da się ukryć, że uprawianie teorii aksjomatycznej, szczególnie na samym początku, bywa dość żmudne. Ograniczymy się więc tylko do paru przykładów pokazujących „jak to działa", a inne znane nam dobrze elementarne własności liczb rzeczywistych przyjmiemy bez dowodu, choć zachęcam do samodzielnego uzupełniania tych luk.

◇ Element przeciwny, odwrotny, odejmowanie i dzielenie

Twierdzenie I.1. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists!_{y\in\mathbb{R}}$ [7] $x + y = 0$

---

[4] W ten sposób, używając nawiasów, będziemy często zapisywać dwie analogiczne definicje „za jednym zamachem".

[5] Bywa on często, a nawet częściej, nazywany aksjomatem *ciągłości.*

[6] Można też przejrzeć podręczniki o tytule zbliżonym do "Wstęp do matematyki", bądź inne, dotyczące teorii mnogości i logiki matematycznej.

[7] $\exists!$ — „istnieje dokładnie jeden".

Dowód.
Istnienie jakiegoś $y \in \mathbb{R}$ takiego, że $x + y = 0$ gwarantuje nam (D3.). By wykazać jednoznaczność, załóżmy, że $y, y' \in \mathbb{R}$ są takie, że $x + y = 0$ i $x + y' = 0$. Zatem dodając do drugiej równości y, dostajemy $y + (x + y') = y + 0$, zatem z (D1.) i (D2.) $(y + x) + y' = y$, skąd na mocy naszego pierwszego założenia i (D2.) $y' = y$. $\square$

Powyższe twierdzenie pozwala nam zatem zdefiniować[8] jednoznacznie *element przeciwny* do x jako taki $y \in \mathbb{R}$, że $x + y = 0$. Oznaczamy go $-x$. To z kolei pozwala zdefiniować operację *odejmowania* jako $a - b := a + (-b)$.
Analogicznie postępujemy w przypadku mnożenia i dla $x \neq 0$ uzyskujemy *element odwrotny* do x (oznaczany oczywiście $\frac{1}{x}$ lub x^{-1}), a następnie operację *dzielenia* („——" lub „:") przez liczby $\neq 0$.

◇ Istnienie kresu dolnego

Inny prosty przykład elementarnego twierdzenia to dualna wersja aksjomatu zupełności (Z). Proszę ją sformułować samodzielnie zastępując ograniczoność z góry przez ograniczoność z dołu, a kres górny — dolnym, a następnie proszę pomyśleć nad ścisłym dowodem. Uzyskamy więc:

Twierdzenie I.2. ...

Dowód.
... $\square$

◇ Inne relacje nierówności, moduł

Dla wygody powinniśmy jeszcze przyjąć między innymi następujące definicje:

- $a \geqslant b \Leftrightarrow b \leqslant a$
- $a < b \Leftrightarrow (a \leqslant b \wedge a \neq b)$
- $a > b \Leftrightarrow b < a$

Definiujemy także *moduł* (inaczej *wartość bezwzględną*) liczby $x \in \mathbb{R}$ wzorem:

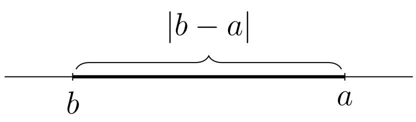
$$|x| := \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Nietrudny dowód poniższego faktu pozostawiam Państwu.

Fakt (nierówność trójkąta).

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

B.D.



Rysunek 1. Długość odcinka

[8] Nie zawsze definicję poprzedzam tytułem „Definicja" — robię to jedynie przy „bardziej uroczystych" okazjach.

Moduł będzie nam służył między innymi do mierzenia „odległości” pomiędzy liczbami. Tę odległość pomiędzy a oraz b wyrażamy wzorem $|b-a|$ — geometrycznie interpretujemy ją jako długość odcinka łączącego a z b na osi liczbowej będącej z kolei geometryczną interpretacją zbioru $\mathbb{R}$ (patrz rys. 1).

◇ Nieco uwag o kresach

Element największy zbioru $A \subset \mathbb{R}$, o ile takowy istnieje, jest na mocy aksjomatu (P2.) wyznaczony jednoznacznie. Oznaczamy go $\max A$. Podobnie jest z elementem najmniejszym; oznaczamy go $\min A$. Oczywiście $\max A$ jest jednocześnie kresem górnym A (a $\min A$ — kresem dolnym), ale np. przedział $(0;1)$ [9] ma kres górny równy 1, a elementu największego nie posiada. Zatem kresy zbioru to coś w rodzaju prawego i lewego „końca” zbioru, które do tego zbioru mogą należeć lub nie. Także kresy, gdy istnieją, są oczywiście wyznaczone jednoznacznie (dlaczego?). Kres górny zbioru A oznaczamy symbolem $\sup A$, a kres dolny $\inf A$. Gdy A nie jest ograniczony z góry, to fakt ten oznaczamy $\sup A = +\infty$. Analogicznie dla A nieograniczonego z dołu umownie piszemy $\inf A = -\infty$. Są to jednak na razie tylko oznaczenia, tzn. samo $\pm\infty$ na razie nie jest jeszcze[10] żadnym „matematycznym” obiektem!

Odwołując się do przykładu z liczbami wymiernymi, który motywował nieco wcześniej dołączenie aksjomatu zupełności, warto tę motywację uzupełnić o uwagę, że w zbiorze liczb wymiernych nie ma zupełności. Znów wyprzedzając ścisłą definicję zbioru liczb wymiernych, można tu podać przykład zbioru $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \cdot x \leqslant 2\}$, który jest niepusty i ograniczony w $\mathbb{Q}$ z góry, ale kresu górnego w $\mathbb{Q}$ nie posiada.

3. Liczby naturalne, całkowite, wymierne

◇ Zbiór $\mathbb{N}$, indukcja matematyczna i inne własności $\mathbb{N}$

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ to podzbiór zbioru $\mathbb{R}$, który często jest określany jako

$$\{1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ \ldots\}.$$

Matematycy do tego zbioru dorzucają jeszcze chętnie 0. Na tym wykładzie tego nie zrobimy (tj. $0 \notin \mathbb{N}$), jednak to jedynie kwestia umowy. Tymczasem dużo ważniejszy problem to sprawa ścisłości powyższej „definicji”, a właściwie — braku ścisłości. Jak bowiem rozumieć ów trzykropek „. . . ”? Aby to uściślić postąpimy następująco.

Definicja. *Niech $B \subset \mathbb{R}$. Zbiór B* ***jest induktywny*** *wtw $1 \in B$ oraz $\forall_{x\in B}\ x+1 \in B$.*

Jak widać z tej definicji, zbiorów induktywnych jest wiele — np. $\mathbb{R}$, $(-1;+\infty)$, $[1;+\infty)$[11], ale zgodnie z naszą intuicją induktywne powinny być także inne, niezdefiniowane dotąd zbiory — przede wszystkim $\mathbb{N}$. Ta sama intuicja podpowiada nam, że $\mathbb{N}$ powinien być najmniejszym w sensie zawierania zbiorem induktywnym, czyli że jest zawarty w każdym zbiorze induktywnym. Stąd poniższa definicja.

Definicja.

$$\mathbb{N} := \bigcap_{B\in\mathbb{I}} B,$$

gdzie $\mathbb{I}$ oznacza zbiór wszystkich induktywnych podzbiorów $\mathbb{R}$.

---

[9] Zakładam, że definicje przedziałów otwartych, domkniętych, otwarto-domkniętych są znane ze szkoły. Używamy notacji $(a;b)$, $[a;b]$, $(a;b]$ i $[a;b)$.

[10] Ale wkrótce również samym symbolom $+\infty$ i $-\infty$ nadamy matematyczny sens.

[11] Znów użyliśmy niezdefiniowanego symbolu $+\infty$, ale to nie szkodzi, bo nawet nie używając tego symbolu możemy zdefiniować od razu cały „napis” oznaczający przedział nieskończony — mianowicie, dla $a \in \mathbb{R}$, oznaczamy (jak było chyba Państwu wiadomo...) $(a;+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$; $(-\infty;a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ i analogicznie dla $[a;+\infty)$ i $(-\infty;a)$.

Wśród wielu własności zbioru $\mathbb{N}$ znaczenie zasadnicze ma dla nas twierdzenie znane Państwu chyba przynajmniej z nazwy, zwane *zasadą indukcji zupełnej* (w skrócie ZIZ). Sformułujemy je tak:

Twierdzenie I.3 (ZIZ). *Jeżeli $A \subset \mathbb{N}$ spełnia warunki*

1. („warunek początkowy") $1 \in A$

2. („krok indukcyjny") $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$,

to $A = \mathbb{N}$.

Dowód.
Zauważmy, że A jest induktywny, bowiem gdy $n \in A$, to na mocy faktu, że $A \subset \mathbb{N}$ oraz zał. 2. otrzymujemy $n+1 \in A$. Czyli $A \in \mathbb{I}$, a stąd $A \supset \bigcap\limits_{B\in\mathbb{I}} B = \mathbb{N}$. Zatem $A = \mathbb{N}$. □

ZIZ bywa bardzo przydatna przy dowodzeniu wielu matematycznych faktów, w których pojawia się kwantyfikator $\forall_{n\in\mathbb{N}}$. Dowody używające ZIZ noszą nazwę *dowodów indukcyjnych*. Przykład takiego dowodu pojawi się jeszcze w tym rozdziale (patrz nierówność Bernoulli'ego).

Oto przykłady innych elementarnych własności $\mathbb{N}$. Podajemy je bez dowodów.

Twierdzenie I.4 (zamkniętość $\mathbb{N}$ względem + i $\cdot$).

$$\forall_{m,n\in\mathbb{N}}\ m+n, m\cdot n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie I.5 (zasada Archimedesa). *Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz $a > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \cdot a > x$. W szczególności $\mathbb{N}$ jest nieograniczony* [12] *z góry.*

◇ Zapis dziesiętny liczb naturalnych

Oznaczmy przez C_{10} zbiór *cyfr* przy zapisie dziesiętnym, tzn. $C_{10} := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \subset \mathbb{N}_0$, gdzie $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, ..., $9 := 8+1$.

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $c_1, \ldots, c_n \in C_{10}$, gdzie $c_1 \neq 0$. Zdefiniujemy *rekurencyjnie*[13] liczbę, którą zapisywać będziemy $c_1c_2\ldots c_n$. Gdy $n = 1$, to liczba ta jest po prostu równa liczbie c_1. Ponadto dla dowolnego $n \in N$, $c_1c_2\ldots c_nc_{n+1} := c_{n+1} + (9+1)\cdot c_1c_2\ldots c_n$. ZIZ dowodzi, że tym sposobem liczba n–cyfrowa została zdefiniowana dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. W szczególności $9+1 = 10\ldots$ Zachodzi także:

Twierdzenie I.6. *Każda liczba naturalna ma jednoznaczny zapis w powyższej postaci.*

Dowód pomijamy, ograniczając się do wskazówki, że część dotycząca samego istnienia zapisu może być łatwo wykazana przez indukcję. Dlaczego przyjął się akurat zapis dziesiętny? To pytanie raczej z historii matematyki. Jednak czasem przydają się też inne typy zapisu — np. informatykowi bliski powinien być *zapis dwójkowy*, a także *zapis szesnastkowy*. Jak ogólnie, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_2$, zdefiniować zapis „k–tkowy" proszę wymyślić samodzielnie! Proszę przy tym zauważyć, że **pojawi się tu pewien problem** dla $k > 10$, jeżeli jako elementów zbioru cyfr C_k zdecydujemy się użyć liczb zapisanych przy użyciu zapisu dziesiętnego (jaki to problem?).

---

[12] „jest nieograniczony = nie jest ograniczony", choć — uwaga! — nie zawsze w matematyce doklejenie do pojęcia słówka „nie" daje pojęcie będące zaprzeczeniem wyjściowego – np. niemalejący ...

[13] Tzn. opisując co należy zrobić dla n początkowego (tu np. dla $n = 1$) oraz sposób przejścia od dowolnego n do $n+1$. Jak widać idea definicji rekurencyjnej przypomina ideę zawartą w ZIZ i stąd niektórzy nazywają ten rodzaj definicji definicją *indukcyjną*.

◇ Zbiór liczb całkowitych

Zbiór liczb *całkowitych* oznaczamy przez $\mathbb{Z}$ i definiujemy następująco

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{N}\}.$$

Oto pewna ważna własność $\mathbb{Z}$.

Twierdzenie I.7 (zasada maksimum). *Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór zbioru $\mathbb{Z}$ posiada element największy.*

Dowód znów pomijamy. Oczywiście można także wykazać analogiczną „zasadę minimum”.

Powyższe twierdzenie pozwala (dlaczego?...) na sformułowanie następującej definicji:

Definicja. ***Część całkowita*** *liczby $x \in \mathbb{R}$ to* $\max\{m \in \mathbb{Z} : m \leqslant x\}$. *Oznaczamy ją $[x]$.* [14)]

Przy użyciu tego pojęcia łatwo będzie wykazać lemat, który ułatwi nam wkrótce dowód pewnej własności liczb wymiernych.

Lemat.

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \, \Big(y - x \geqslant 1 \Rightarrow \exists_{m\in\mathbb{Z}} \; x \leqslant m \leqslant y\Big).$$

Dowód.
Wystarczy wziąć $m := [y]$. Mamy wtedy $m \in \mathbb{Z}$ i $m \leqslant y$ z definicji części całkowitej. Przypuśćmy, że $m < x$. Wówczas $m + 1 < x + 1 \leqslant y$ oraz $m + 1 \in \mathbb{Z}$ (dlaczego? — uzasadnienie pozostawiam Państwu). Ale $m + 1 > m$, a zatem $m \neq [y]$ — sprzeczność, więc $m \geqslant x$. □

Można wykazać, że zbiór $\mathbb{Z}$ zamknięty jest względem dodawania, odejmowania i mnożenia.

Przyjmijmy jeszcze następujące wygodne oznaczenia zbiorów „podobnych ” do $\mathbb{N}$:
$\mathbb{N}_k := \{m \in \mathbb{Z} : m \geqslant k\}$ dla $k \in \mathbb{Z}$ (np. $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$).

◇ Liczby wymierne

Zbiór liczb *wymiernych* oznaczamy symbolem $\mathbb{Q}$ i definiujemy następująco

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zbiór ten zamknięty jest względem wszystkich czterech działań (dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia). Natomiast traktowany jako podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma on jeszcze inną bardzo ważną własność.

Twierdzenie I.8 (o gęstości $\mathbb{Q}$).

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \, \Big(y > x \Rightarrow \exists_{q\in\mathbb{Q}} \; x \leqslant q \leqslant y\Big).$$

Dowód.
Korzystając z zasady Archimedesa wybierzmy $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n > \frac{1}{y-x}$. Niech $x' := n \cdot x$, $y' := n \cdot y$. Mamy $y' - x' > 1$, zatem z lematu wykazanego powyżej istnieje $m \in \mathbb{Z}$ takie, że $x' \leqslant m \leqslant y'$, skąd $x \leqslant \frac{m}{n} \leqslant y$. □

4. Potęga rzeczywista

W tej ostatniej części rozdziału I naszkicujemy definicję potęgi x^y dla dowolnych $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$. Definicja ta jest dość złożona, a na jej wszystkie szczegóły trzeba by poświęcić bardzo wiele czasu. Przedstawimy tu więc konstrukcję potegi w kilku etapach, znów z pominięciem wielu dowodów.

[14)] Bywają też w użyciu inne oznaczenia, ponadto niestety „[ ]” używamy też czasem jako nawiasu... — liczę na Państwa domyślność...

◇ **Etap 1: x^n dla $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$**

Definiujemy rekurencyjnie: $x^1 := x$, $x^{n+1} := x \cdot x^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Dla tak zdefiniowanej potęgi ma miejsce ważna nierówność.

Fakt (nierówność Bernoulli'ego). *Jeżeli $a \geqslant -1$, $n \in \mathbb{N}$, to*

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na. \tag{I.1}$$

Dowód.
Przeprowadzimy tu dowód przez indukcję. W tym celu ustalmy najpierw dowolnie $a \geqslant -1$. Zauważmy, że (I.1) zachodzi przy $n = 1$ (jest nawet równość). Teraz załóżmy, że (I.1) zachodzi dla pewnego n. Mnożąc obie strony nierówności przez $(1 + a)$ (a ściślej — korzystając z aksjomatu (MP.)) otrzymujemy

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geqslant (1+na)(1+a) = 1 + na + a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a.$$

W efekcie uzyskujemy więc odpowiednik nierówności (I.1) dla $n+1$ zamiast dla n (oczywiście powyżej użyliśmy w rzeczywistości także wielu innych aksjomatów, nie jedynie (MP.) — jakich?). W takim momencie na ogół zwyczajowo kończy się dowód indukcyjny. Jednak pytanie: gdzie tu ZIZ?? Aby więc było całkiem ściśle, tym razem dokładnie to wyjaśnimy. Mianowicie niech $A := \{n \in \mathbb{N} : \text{ zachodzi (I.1)}\}$. To co dotychczas wykazaliśmy oznacza „w języku zbioru A", że $1 \in A$ oraz, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jeśli $n \in A$, to $n + 1 \in A$. A zatem na mocy ZIZ otrzymujemy $A = \mathbb{N}$, a to oznacza właśnie, że (I.1) zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$. □

◇ **Etap 2: x^n dla $n \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$**

Dla $n \in \mathbb{N}$ definicja była już w poprzednim etapie. Pozostają przypadki z $n \leqslant 0$. Definiujemy więc $x^0 := 1$ oraz gdy $n = -m$ i $m \in \mathbb{N}$, to $x^n := \frac{1}{x^m}$.

Uwaga. Nie zdefiniowaliśmy 0^n dla $n \leqslant 0$. Dla $n < 0$ nie zrobimy tego, jednak **niekiedy**, dla wygody przyjmuje się, że $0^0 = 1$. Np. przyjmuje się tak we wzorze Newtona sformułowanym niżej. Ogólnie należy jednak z tą umową uważać (o istotnych tego powodach przekonacie się Państwo w przyszłości).

Fakt 1. *Dla dowolnych $x, y \neq 0$ oraz $m, n \in \mathbb{Z}$ zachodzi:*

1. $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$,
2. $x^{m \cdot n} = (x^m)^n$,
3. $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$.

B.D.

Fakt 2 (wzór Newtona). *Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ zachodzi*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n-k)}.$$ [15]

B.D.

[15] Zakładam, że symbol Newtona $\binom{n}{k}$ jest znany ze szkoły. Symbol „skróconego sumowania" $\sum_{k=m}^{n} a_k$ „definiuje" się nieformalnie jako $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$, a ścisłą, rekurencyjną definicję pozostawiam do wymyślenia Państwu.

◇ Etap 3: Definicja $\sqrt[n]{a}$ dla $a \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$

Chcielibyśmy zdefiniować $\sqrt[n]{a}$ (tj. pierwiastek n–tego stopnia z a) jako liczbę nieujemną, która daje a po podniesieniu do potęgi n–tej. Ale tu pojawia się problem — skąd bowiem gwarancja, że taka liczba w ogóle istnieje? Aby się o tym przekonać, postąpimy nieco ostrożniej — i tu znów przyda się aksjomat zupełności.

Definicja. $\sqrt[n]{a} := \sup A$, *gdzie* $A = \{x \geqslant 0 : x^n \leqslant a\}$.

Zauważmy, że to poprawna definicja — ten kres istnieje, bo powyższy zbiór A jest niepusty (0 do niego należy) oraz ograniczony z góry — gdy $a \leqslant 1$, to np. przez 1, a gdy $a > 1$, to np. przez a. Zgodnie z naszą intencją zachodzi:

Twierdzenie I.9. $\forall_{a\geqslant 0,\ n\in\mathbb{N}}\ (\sqrt[n]{a})^n = a$. *Ponadto* $\sqrt[n]{a}$ *dla* $a \geqslant 0$ *jest* ***jedyną*** *taką liczbą nieujemną, której* n*–ta potęga to* a.

B.D.

Uwaga. Dodatkowo przyjmujemy, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz n jest nieparzyste i $c < 0$, to $\sqrt[n]{c} := -\sqrt[n]{-c}$. Oczywiście wówczas także $(\sqrt[n]{c})^n = c$.

Zgodnie ze znanym zwyczajem często piszemy $\sqrt{a}$ zamiast $\sqrt[2]{a}$.

A oto ważny wynik dotyczący niewymierności pierwiastków.

Twierdzenie I.10. *Niech* $m, n \in \mathbb{N}$. *Jeżeli* $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$, *to* $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{Q}$. **B.D.**

Wniosek. $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, *bo* $\sqrt[2]{2} \notin \mathbb{Q}$ *na mocy twierdzenia I.10.*

Wspomnijmy jeszcze, że pominięty przez nas dowód tw. I.9 nie jest bardzo trudny, ale wymaga więcej czasu. Zachęcam do samodzielnego udowodnienia. Przyda się m. in. wykazana już nierówność Bernoulli'ego. Twierdzenie I.10 można z kolei wykazać w oparciu o teorię podzielności, na którą jednak niestety czasu nam brak.

◇ Etap 4: x^q dla $x > 0$, $q \in \mathbb{Q}$

Potrzebny nam będzie

Lemat. *Jeżeli* $x > 0$ *oraz* $n, n' \in \mathbb{N}, m, m' \in \mathbb{Z}$ *spełniają* $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, *to* $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n']{x^{m'}}$.

Dowód.

W tym dowodzie przyda się

Lemacik. *Jeżeli* $a, b > 0$ *oraz* $N \in \mathbb{N}$, *to* $a^N = b^N \Leftrightarrow a = b$.

Prosty dowód lemaciku zostawiam Państwu. By zaś wykazać tezę lematu, wystarczy sprawdzić „równość po podniesieniu do potęgi $N = n \cdot n'$", która na mocy twierdzenia I.9 i faktu 1 pkt. 2. równoważna jest $x^{m\cdot n'} = x^{m'\cdot n}$ — co zachodzi z założenia. □

Przyjmujemy następującą definicję:

Definicja. *Dla* $x > 0$ *oraz* $q \in \mathbb{Q}$

$$x^q := \sqrt[n]{x^m},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ *są takie, że* $q = \frac{m}{n}$.

Ta definicja jest poprawna dzięki powyższemu lematowi, gdyż gwarantuje on, że wartość $\sqrt[n]{x^m}$ nie zależy od wyboru n i m spełniających $\frac{m}{n} = q$. Zauważmy też, że dla $q \in \mathbb{Z}$ ta definicja pokrywa się z def. z etapu 2.

◇ Etap 5: x^y dla $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

Definicja.

1. *Dla* $x \geqslant 1$, $y \in \mathbb{R}$ $\quad x^y := \sup\{x^q : q \in \mathbb{Q}, q \leqslant y\}$;

2. dla $0 < x < 1$ *i* $y \in \mathbb{R}$*, korzystając z 1. mamy zdefiniowane* $(\frac{1}{x})^y$ *i definiujemy* $x^y := \frac{1}{(\frac{1}{x})^y}$*.*

Nietrudno wykazać, że powyższa definicja jest poprawna, tj. że zbiór, którego kres pojawia się w 1. jest ograniczony z góry. Łatwo też wykazać, że dla $y \in \mathbb{Q}$ tak zdefiniowana potęga pokrywa się z tą z poprzedniego etapu. Jednak tak naprawdę żmudna i nietrywialna praca, to wykazanie, że tak zdefiniowana potęga rzeczywista posiada wszelkie „potrzebne" własności. Z braku czasu poniższy fakt podajemy znów bez dowodu.

Fakt („algebraiczne" własności potęgowania). *Dla* $a, b > 0$ *oraz* $x, y \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
2. $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$,
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

◇ Funkcja wykładnicza i potęgowa

Przyjmujemy następującą terminologię dotyczącą funkcji określonych na podzbiorach $\mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$.

Definicja. *Funkcja f jest*

- ***dodatnia*** *wtw* $\forall_{x \in X}\ f(x) > 0$;
- ***nieujemna*** *wtw* $\forall_{x \in X}\ f(x) \geqslant 0$;
- ***rosnąca*** *wtw* $\forall_{x,y \in X}\ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$;
- ***ściśle rosnąca*** *wtw* $\forall_{x,y \in X}\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$

W analogiczny sposób (proszę samodzielnie wypisać...) określa się, że f jest ***ujemna****,* ***niedodatnia****,* ***malejąca****,* ***ściśle malejąca*** [16] *. Ponadto f jest*

- ***monotoniczna*** *wtw f jest rosnąca lub malejąca;*
- ***ściśle monotoniczna*** *wtw f jest ściśle rosnąca lub ściśle malejąca.*

Wnioski.

(i) (o funkcji wykładniczej) *Niech* $a > 0$*. Funkcja wykładnicza o podstawie a, tj. funkcja* $W_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadana dla* $x \in \mathbb{R}$ *wzorem* $W_a(x) = a^x$ *jest dodatnia. Dla* $a > 1$ W_a *jest ściśle rosnąca, a dla* $a < 1$ *ściśle malejąca.*

(ii) (o funkcji potęgowej) *Niech* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Funkcja potęgowa o wykładniku* α*, tj. funkcja* $P_\alpha : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *zadana wzorem* $P_\alpha(x) = x^\alpha$ *dla* $x > 0$ *jest dodatnia. Dla* $\alpha > 0$ *funkcja* P_α *jest ściśle rosnąca, a dla* $\alpha < 0$ *ściśle malejąca.*

Dowód.
Dla $x \geqslant 1$, $q \in \mathbb{Q}$ zachodzi $x^q > 0$ (patrz etapy 1 — 4), stąd kres górny z punktu 1. definicji w etapie 5 jest dodatni, czyli $x^y > 0$. Zatem dla $x \in (0; 1)$ także $x^y > 0$ na mocy 2. definicji. Stąd dodatniość obu funkcji W_a i P_α.

[16] Ale proszę o ostrożność! Niektórzy stosują inną terminologię, w której „nasza" rosnąca nazywa się *niemalejąca*, a „nasza" ściśle rosnąca nazywa się rosnąca (i analogicznie dla malejącej i ściśle malejącej)... Proszę jednak trzymać się terminologii tu przyjętej.

Teraz zajmiemy się ścisłą monotonicznością dla W_a. Niech $a > 1$ oraz $x < y$. Na mocy dodatniości oraz powyższego faktu (pkt. 1.) zachodzi

$$\frac{a^y}{a^x} = a^{y-x} = \sup A,$$

gdzie $A = \{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leqslant y - x\}$. Ponieważ $y - x > 0$, więc korzystając z tw. I.8 (o gęstości $\mathbb{Q}$) wybierzemy $q_0 \in \mathbb{Q}$ takie, że $\frac{y-x}{2} \leqslant q_0 \leqslant y - x$. A zatem $q_0 > 0$ oraz $a^{q_0} \in A$, więc $\sup A \geqslant a^{q_0}$. Jednak z definicji potęgi dla wykładników wymiernych (etapy 1 — 4) z faktu, że $q_0 > 0$ i $a > 1$ dostajemy łatwo[17]) , że $a^{q_0} > 1$, czyli w efekcie $\sup A > 1$, skąd $a^y > a^x$. Dla $a < 1$ — dowód łatwy z punktu 2. definicji i z powyższego już wykazanego. Dowód ścisłej monotoniczności dla P_α — analogiczny, ale zamiast punktu 1. pow. faktu należy użyć punkt 3. $\square$

[17]) Zachęcam do ścisłego wykazania tego przy użyciu podanych definicji.

Zadania do Rozdziału I

1. Wykaż następujące tożsamości i nierówności:

$\forall$ (a) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$;

(b) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$ (wzór Newtona, fakt str. 19);

$\forall$ (c) $|a| + |b| \geqslant |a-b| \geqslant ||a| - |b||$ dla $a, b \in \mathbb{R}$;

$\forall$ (d) $|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ dla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;

(e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ dla $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$;

$\forall$ (f) $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$ dla $n \in \mathbb{N}$;

Uwaga: w a), b) przyjmujemy $0^0 = 1$.

2. Wykaż, że

(a) $\forall_{q>1} \forall_{k\in\mathbb{N}} \exists_{c>0} \forall_{n\in\mathbb{N}}\ q^n \geqslant cn^k$;

(b) $\forall_{q>1} \forall_{\alpha>0} \exists_{c>0} \forall_{x\geqslant 1}\ q^x \geqslant cx^\alpha$.

3. Niech p_n oznacza n-tą z kolei liczbę pierwszą. Wykaż, że $\forall_{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 12}\ p_n \geqslant 3n$.

Uwaga: tu można użyć wiedzy „szkolnej”, a nie tylko tej z wykładu. Np. zakładam, że każdy student orientuje się co to jest liczba pierwsza (a zatem $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ itd).

$\forall$ 4. Wykaż w sposób całkowicie ścisły (wskazując na każdym kroku rozumowania z jakiego aksjomatu lub uprzednio wykazanego twierdzenia należy skorzystać) **kilka** elementarnych własności liczb rzeczywistych — **np.**: te poniższe:

(a) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ a \cdot 0 = 0$;

(b) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ (-1) \cdot a = -a$;

(c) $\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ -(a+b) = -a-b$;

(d) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ a^2 \geqslant 0$;

5. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą niepuste i ograniczone. Czy istnieje wzór wyrażający:

(a) $\sup(A \cup B)$,

(b) $\inf(A \cup B)$,

(c) $\sup(A \cap B)$,

(d) $\inf(A \cap B)$

przy pomocy kresów zbiorów A i B? Jeśli tak, to znajdź taki wzór (i udowodnij), a jeśli nie, to wykaż, że nie istnieje.

$\forall$ [18] 6. Niech I będzie pewnym niepustym zbiorem („indeksów”) oraz dla każdego $i \in I$ niech $A_i \subset \mathbb{R}$ będzie niepusty i ograniczony z góry. Udowodnij, że $\sup(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sup\{\sup A_i : i \in I\}$.

[18] proszę to zrobić przynajmniej przy dodatkowym założeniu, że zbiór z prawej strony jest ograniczony z góry; bez tego założenia istotna staje się umowa o „$+\infty$” z wykładu.

Dla $A, B \subset \mathbb{R}$ określamy działania algebraiczne (na zbiorach) $+$ i $\cdot$ następująco:

$A + B := \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}$, $A \cdot B := \{a \cdot b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}$.

Oznaczmy też:

- $-A := \{-1\} \cdot A$,
- $A \leqslant B$ wtw $\forall_{a\in A,\ b\in B}\ a \leqslant b$

i gdy $c \in \mathbb{R}$

- $c \leqslant A$ wtw $\forall_{a\in A}\ c \leqslant a$ i analogicznie $c < A$, $c > A$, $c \geqslant A$,
- $c + A := \{c\} + A$.

7. Wykaż, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste i ograniczone z góry, to:

   (a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;

   (b) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup(B)$ przy dodatkowym założeniu, że $A, B > 0$;

   (c) $\inf(-A) = -\sup(A)$.

   Uwaga: w dowodzie pkt. a) można np. wykorzystać wynik z zadania 6 oraz szczególną wersję pkt. a) dla $A = \{a\}$. Dla b) — analogicznie.

8. Wykaż, że jeśli $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ oraz $\inf A = \sup A$, to A jest zbiorem jednoelementowym.

$\forall$ 9. Wykaż, że jeśli A, B są niepustymi podzbiorami $\mathbb{R}$, to $A \leqslant B \Rightarrow \sup A \leqslant \inf B$.

10. Znajdź oba kresy zbiorów:

    (a) $\{a^2 - ab : a, b \in (0; 1)\}$;

    (b) $\{|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$;

    $\forall$ (c) $\{\frac{n-k}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\}$.

11. Znajdź dowód (pominięty na wykładzie) dla szczególnego przypadku $n = 2$ w twierdzeniu I.9., tj. wykaż, że $(\sqrt[2]{a})^2 = a$ dla $a \geqslant 0$.

II Ciągi liczbowe, granica

[około 3 wykłady]

1. Podstawowe pojęcia i oznaczenia

⋄ Ciąg

Niech $n_0 \in \mathbb{Z}$. *Ciągiem (indeksowanym od n_0)* nazywamy funkcję określoną na $\mathbb{N}_{n_0}$. Jej wartości nazywamy *wyrazami ciągu*. Gdy wyrazy są liczbami rzeczywistymi, mówimy o *ciągu liczbowym* (ew. *rzeczywistym*)[19)].

Najczęściej będziemy mieli do czynienia z sytuacją, gdy *indeks początkowy* n_0 równy jest 0 lub 1. Ciąg będziemy oznaczali jedną literą, np. a lub tak: $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ — ta druga możliwość pozwala na wyraźne zaznaczenie początkowego indeksu. Choć czasem (np. przy większym pośpiechu...) może skrócimy to nieco do $\{a_n\}$. Aby jednak nie przypominać przy każdej okazji jaki jest indeks początkowy rozważanych ciągów przyjmijmy, że na ogół będzie to właśnie n_0 (przynajmniej w tym rozdziale, choć nie tylko). Indeks „ogólny" dla ciągu będziemy najczęściej oznaczali przez n, ale nie zawsze — oczywiście zamiast $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ możemy równie dobrze pisać np. $\{a_k\}_{k\geqslant n_0}$. Niektórzy zamiast „$\{a_n\}$" używają „(a_n)".

Aby wyraźnie podkreślić zasadniczą różnicę pomiędzy n–tym wyrazem a_n ciągu $a = \{a_k\}_{k\geqslant n_0}$ a „całym" ciągiem a, będziemy na wykładzie unikali często stosowanego żargonowego sformułowania „ciąg a_n", pisząc zamiast tego „ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$" lub „ciąg a".

Reasumując, ciąg liczbowy a to funkcja $a\colon \mathbb{N}_{n_0} \to \mathbb{R}$ (dla pewnego $n_0 \in \mathbb{Z}$). Inaczej tylko niż przy typowym zapisie dla funkcji oznaczamy wartość tej funkcji w punkcie $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, czyli n–ty wyraz ciągu a. Piszemy bowiem a_n zamiast $a(n)$, choć ten drugi zapis też jest czasem stosowany.

⋄ Działania, nierówności, monotoniczność

Dla ciągów, podobnie jak ogólnie dla funkcji, określa się działania dodawania, mnożenia, odejmowania i dzielenia przez liczbę. Oznacza się je tymi samymi symbolami, co odpowiednie działania dla liczb, choć formalnie są to oczywiście zupełnie inne działania. Np. gdy $r \in \mathbb{R}$ oraz a, b są ciągami liczbowymi o tym samym indeksie początkowym n_0, to $(r \cdot a)_n := r \cdot a_n$, $(a + b)_n := a_n + b_n$ dla $n \geqslant n_0$. Analogicznie („punktowo") określamy pozostałe działania, przy czym dzielić „wolno" oczywiście tylko przez ciąg o wszystkich wyrazach $\neq 0$.

Będziemy też używali symboli nierówności $\leqslant, \geqslant, <, >$ dla ciągów (znów, to małe nadużycie...) np. $a \leqslant b$ wtw $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n \leqslant b_n$ [20)] oraz $r \leqslant a$ wtw $\forall_{n\geqslant n_0}\ r \leqslant a_n$ i analogicznie przy pozostałych typach nierówności.

Ciąg a jest *ograniczony z góry (z dołu)* wtw $a \leqslant r$ ($r \leqslant a$) dla pewnego $r \in \mathbb{R}$; a jest *ograniczony* tzn., że jest ograniczony z góry i z dołu.

Ważna klasa ciągów to *ciągi monotoniczne*, tj. *rosnące* i *malejące* (nie jednocześnie...). Obowiązuje tu terminologia wprowadzona już w rozdziale I ogólnie dla wszystkich funkcji. Dla takich szczególnych funkcji, jakimi są ciągi, warunki z odpowiednich definicji można zapisać prościej. A więc np. $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest rosnący wtw $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_{n+1} \geqslant a_n$. Przypominam, że u nas nierówność jest „$\geqslant$", nie „$>$", a ta ostra pojawia się w definicji ciągu ściśle rosnącego.

---

19) Na tym wykładzie liczby są w zasadzie tylko rzeczywiste, ale ogólniej ciągi liczbowe mogą mieć wyrazy będące dowolnymi liczbami zespolonymi.

20) Formalnie powinniśmy napisać tu „$\forall_{n\in\mathbb{N}_{n_0}}$" lub „$\forall_{n\in\mathbb{Z}, n\geqslant n_0}$", ale taki skrótowy zapis „$\forall_{n\geqslant n_0}$" z domyślnym wyborem $n \in \mathbb{Z}$, a nie wszystkich $n \in \mathbb{R}$, stosować będziemy często.

◇ „Dostatecznie duże" i „od pewnego miejsca"

Przy okazji teorii zbieżności ciągów przydatna bywa poniższa terminologia:

- gdy φ jest pewną formułą zdaniową ze zmienną ze zbioru $\mathbb{Z}$ lub z pewnego $\mathbb{N}_k$, to zdanie: $\varphi(n)$ *dla dostatecznie dużych* n oznacza to samo co

$$\exists_{N\in\mathbb{Z}}\ \forall_{n\geqslant N}\ \varphi(n).$$

  Dla skrócenia będziemy pisać: d.d.d. zamiast „dla dostatecznie dużych". Np. zamiast $\exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N}\ n^2-7\geqslant n$ możemy napisać: $n^2-7\geqslant n$ d.d.d. n.

- gdy W jest pewną własnością ciągu lub ciągów, to mówimy, że W zachodzi *od pewnego miejsca*, gdy istnieje $N\in\mathbb{Z}$ takie, że W zachodzi dla tych ciągów „obciętych" do $\mathbb{N}_N$ (tzn. w miejsce ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ bierzemy $\{a_n\}_{n\geqslant N}$).

Np. Ciąg a jest rosnący od pewnego miejsca wtw $\exists_{N\in\mathbb{Z}}\ \{a_n\}_{n\geqslant N}$ jest rosnący wtw

$$\exists_{N\in\mathbb{Z}}\ \forall_{n\geqslant N}\ a_{n+1}\geqslant a_n$$

wtw $a_{n+1}\geqslant a_n$ d.d.d. n. Jednak **nie** powinniśmy używać sformułowań „a jest rosnący d.d.d. n" **ani** „a_n jest rosnący d.d.d. n" (dlaczego?).

◇ Granica

Zajmijmy się wreszcie najważniejszym tu dla nas pojęciem granicy ciągu liczbowego $a=\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$.

Definicja.

- *Niech $g\in\mathbb{R}$. Ciąg a jest* ***zbieżny do*** *g wtw*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{n\geqslant N}\ |a_n-g|<\epsilon$$

  (tj. $\forall_{\epsilon>0}\ (|a_n-g|<\epsilon$ d.d.d. n)).

- *Ciąg a jest* ***zbieżny*** *wtw a jest zbieżny do g dla pewnego $g\in\mathbb{R}$.*

- *Ciąg a jest* ***rozbieżny*** *wtw a nie jest zbieżny.*

- *Ciąg a jest* ***rozbieżny do*** *$+\infty$ $(-\infty)$ wtw $\forall_{C\in\mathbb{R}}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{n\geqslant N}\ a_n>C$ $(a_n<C)$.*

- *Niech $g\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}=:\overline{\mathbb{R}}$. Ciąg a* ***ma granicę*** *g lub inaczej: g* ***jest granicą*** *a wtw [$g\in\mathbb{R}$ i a jest zbieżny do g] lub [$g=\pm\infty$ i a jest rozbieżny do g]. Zapisujemy to symbolem $a_n\to g$, ewentualnie $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} g$, a samą granicę ciągu a oznaczamy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.*

Uwaga 1. Nie możemy więc powiedzieć: „a jest zbieżny do $+\infty$", ale możemy: „a ma granicę $+\infty$", co znaczy tyle co „a jest rozbieżny do $+\infty$".

Uwaga 2. Wbrew tej tradycyjnej notacji, jak widać z definicji, granica i zbieżność są związane z „całym" ciągiem, a nie z „jakimś jego n–tym wyrazem". Może lepsza byłaby więc notacja „$\lim a$", „$a\to g$", ale to wbrew tradycji...

Fakt 1. *Jeśli a posiada granicę, to jest ona wyznaczona jednoznacznie.* **B.D.**

Zachęcam do samodzielnego dowodu „nie wprost" (tj. przez dojście do sprzeczności, przy założeniu, że teza jest fałszywa).

A zatem symbol $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ jest poprawnie określony w przypadku ciągu posiadającego granicę.

Fakt 2 (dość oczywisty). *Jeżeli $a_n = b_n$ d.d.d. n, to $a_n \to g \Leftrightarrow b_n \to g$.* **B.D.**

Przykłady (najbardziej elementarne).

1. Ciąg stały. Niech $r \in \mathbb{R}$. Oznaczmy: $a \equiv r$ wtw $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n = r$. Oczywiście gdy $a \equiv r$, to $a_n \to r$.
2. $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ — to natychmiastowy wniosek z zasady Archimedesa (tw. I.5).
3. $\frac{1}{n} \to 0$ — to dowodzimy jak wyżej (to klasyczny przykład „szkolny" — przynajmniej do niedawna...).
4. $(-1)^n$ — ciąg o wyrazach zadanych takim wzorem jest rozbieżny i (co gorsza...) w ogóle nie ma żadnej granicy.

Dalsze „elementarne" przykłady wygodniej będzie badać po rozwinięciu choć trochę teorii zbieżności.

2. Własności arytmetyczne granicy

Omawianie najważniejszych twierdzeń teorii zbieżności zaczniemy od twierdzenia o zachowaniu się granicy przy dokonywaniu podstawowych operacji algebraicznych na ciągach.

◇ Działania z udziałem $\pm\infty$

Najpierw jednak częściowo[21] rozszerzymy działania określone w $\mathbb{R}$ na tzw. *rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych* $\overline{\mathbb{R}}$, który zdefiniowaliśmy niedawno jako $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Rozszerzenia te zdefiniowane są w następujących tabelach (argument z wiersza odpowiada lewemu argumentowi działania, a z kolumny — prawemu). Znak „$\times$" oznacza, że dane działanie nie jest *określone*. O a i b zakładamy, że należą do $\mathbb{R}$.

„+"	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$
$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$-\infty$

„−"	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a-b$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\times$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$

„·"	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a\cdot b$	$+\infty$ $a>0$ $\times$ $a=0$ $-\infty$ $a<0$	$-\infty$ $a>0$ $\times$ $a=0$ $+\infty$ $a<0$
$+\infty$	$+\infty$ $b>0$ $\times$ $b=0$ $-\infty$ $b<0$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$ $b>0$ $\times$ $b=0$ $+\infty$ $b<0$	$-\infty$	$+\infty$

„:"	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a:b$ $b\neq 0$ $\times$ $b=0$	0	0
$+\infty$	$+\infty$ $b>0$ $\times$ $b=0$ $-\infty$ $b<0$	$\times$	$\times$
$-\infty$	$-\infty$ $b>0$ $\times$ $b=0$ $+\infty$ $b<0$	$\times$	$\times$

[21] Tylko częściowo, bo można wykazać, że całkiem się nie da, jeśli chcielibyśmy przy tym rozszerzeniu zachować np. aksjomaty ciała.

Możemy też rozszerzyć działania jednoargumentowe (elementy przeciwny i odwrotny):

z	$-z$
a	$-a$
$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$

z	z^{-1}	
a	a^{-1}	$a \neq 0$
	$\times$	$a = 0$
$+\infty$	0	
$-\infty$	0	

choć w poniższym twierdzeniu nie będzie nam to potrzebne.

$\diamond$ Rachunkowe własności granicy

Twierdzenie II.1 (o rachunkowych własnościach granicy). *Niech $\circledast$ oznacza jedno z działań $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Załóżmy, że $a_n \to g$, $b_n \to h$, gdzie $g, h \in \overline{\mathbb{R}}$ są takie, że działanie $g \circledast h$ jest określone*[22] *oraz, w przypadku gdy $\circledast$ jest dzieleniem, że wszystkie wyrazy ciągu $\{b_n\}$ są różne od 0. Wówczas $(a \circledast b)_n \to g \circledast h$.*

Ponadto, jeśli $\{a_n\} > 0$ oraz $a_n \to 0$, to $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

W dowodzie przydatny będzie poniższy rezultat.

Lemat. *Ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód.
Niech $a_n \to g \in \mathbb{R}$. Z warunku z definicji „dla $\epsilon = 1$” dostajemy: istnieje $N \geqslant n_0$ takie, że $\forall_{n \geqslant N}\ |a_n - g| < 1$ czyli $\forall_{n \geqslant N}\ g - 1 < a_n < g + 1$. Stąd, jeśli oznaczymy $A := \{a_k : k \in \mathbb{Z}, n_0 \leqslant k \leqslant N\}$, to

$$\forall_{n \geqslant n_0}\ \min(\{g-1\} \cup A) \leqslant a_n \leqslant \max(\{g+1\} \cup A).$$

$\square$

Dowód (części twierdzenia II.1).
Udowodnimy tylko jeden z przypadków: gdy $\circledast$ jest mnożeniem oraz $g, h \in \mathbb{R}$. Niech $g, h \in \mathbb{R}$. Na mocy lematu ciąg a jest ograniczony, czyli[23] dla pewnego $C > 0$ zachodzi $\forall_{n \geqslant n_0}\ |a_n| \leqslant C$. A zatem na mocy własności modułu (w tym nierówności trójkąta, ale jakich jeszcze?) mamy dla $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - gh| &= |a_n b_n - a_n h + a_n h - gh| \leqslant |a_n| \cdot |b_n - h| + |a_n - g| \cdot |h| \leqslant \\ &\leqslant C \cdot |b_n - h| + |a_n - g| \cdot |h|. \end{aligned} \tag{II.1}$$

Teraz, aby posługując się definicją wykazać, że $a_n b_n \to gh$, rozważmy dowolne $\epsilon > 0$. Na mocy definicji istnieją takie $N_a, N_b \in \mathbb{Z}$, że

$$|a_n - g| < \frac{\epsilon}{C + |h|} \text{ dla } n \geqslant N_a,$$

$$|b_n - h| < \frac{\epsilon}{C + |h|} \text{ dla } n \geqslant N_b.$$

Biorąc więc $N := \max\{N_a, N_b\}$ mamy

$$\forall_{n \geqslant N}\ |a_n b_n - gh| < (C + |h|) \frac{\epsilon}{C + |h|} = \epsilon.$$

$\square$

---

[22] Tzn. w tabeli dla działania $\circledast$ dla pary (g, h) **nie** występuje „$\times$”.
[23] Zachęcam do samodzielnego wykazania, że „ograniczoność to to samo, co ograniczoność modułu z góry”.

Warto zwrócić baczną uwagę na powyższy dowód. Zawiera on dwa elementy dość typowe dla wielu dowodów. Pierwszy to chwyt użyty w formule (II.1) polegający na odjęciu i dodaniu tej samej liczby (tu $a_n h$) przed użyciem nierówności trójkąta. Drugi to dobór N jako większego spośród N_a i N_b.

Użyteczność twierdzenia II.1 dla znajdowania granic rozmaitych ciągów zadanych zawiłymi wzorami wydaje się oczywista. Czasem jest ono nawet skuteczniejsze niż mogłoby się to wydawać na pierwszy rzut oka.

Przykład (szkolny).

$$a_n = \frac{n^2 - 7n + 3}{2n^2 + 3n + 1}.$$

Z twierdzenia II.1 widać, że „mianownik" ma granicę $+\infty$, ale nie daje ono nic dla licznika... („$+\infty - (+\infty)$", choć użyte mniej bezpośrednio coś jednak daje... co?). Nie możemy też więc użyć bezpośrednio tw. II.1 dla ilorazu... Stosując jednak standardowy chwyt z dzieleniem licznika i mianownika przez n^2 przekształcamy a_n do postaci:

$$a_n = \frac{1 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}},$$

skąd już $a_n \to \frac{1}{2}$ na mocy tw. II.1.

⋄ Granice jeszcze kilku elementarnych ciągów

Jednak aby naprawdę móc skutecznie wykorzystać tw. II.1 potrzeba nam więcej zbadanych granic dla elementarnych przykładów ciągów — te kilka z przykładu ze str. 27 to z pewnością zbyt mało. Poniżej podamy więcej przykładów. Część z nich zostanie zbadana wkrótce na wykładzie, część na ćwiczeniach, a część zostanie bez dowodu (do ewentualnego samodzielnego sprawdzenia).

Przykłady (też elementarne).

a. $n^\alpha \to +\infty$ dla $\alpha > 0$;

b. $a^n \to \begin{cases} 0 & \text{dla } |a| < 1 \\ 1 & \text{dla } a = 1 \\ +\infty & \text{dla } a > 1, \end{cases}$ ponadto $\{a^n\}$ nie posiada granicy gdy $a \leqslant -1$;

c. $\frac{n^\alpha}{C^n} \to 0$ przy dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $C > 1$;

d. $\frac{a^n}{n!} \to 0$ przy dowolnym $a \in \mathbb{R}$;

e. $\sqrt[n]{a} \to 1$ dla $a > 0$;

f. $\sqrt[n]{n} \to 1$;

g. $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$ dla pewnego $e \in (2; 3]$. Uwaga: tak właśnie definiujemy liczbę e (tj. „**Definicja:** e — to granica ciągu...").

Wykazanie, że zachodzą zbieżności/rozbieżności z powyższego przykładu przy użyciu samej tylko definicji granicy byłoby zadaniem dość trudnym. Nieco prościej można sobie z nimi poradzić przy użyciu kilku użytecznych twierdzeń, które wkrótce Państwo poznacie. Wcześniej jednak ostrzeżenie związane z ostatnim przykładem. Poniższe „rozumowanie" „oparte" na twierdzeniu II.1 jest dość częste i typowe dla wielu **nieostrożnych** studentów:

$$\text{„}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ razy}} \to \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n \text{ razy}} = 1.\text{"}$$

Jednak $1 \neq e$ ... — gdzie tkwi błąd?

3. Granica a nierówności

Poznamy tu kilka twierdzeń dotyczących konsekwencji pewnych nierówności, dotyczących wyrazów ciągów, dla ich granic.

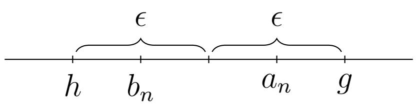
◇ Zachowanie nierówności przy przejściu granicznym

Zacznijmy od następującego ważnego, choć prostego twierdzenia:

Twierdzenie II.2 (o zachowaniu nierówności przy przejściu granicznym). *Jeżeli* $a_n \leqslant b_n$ *d.d.d.* n*, oraz* $a_n \to g$*,* $b_n \to h$*, to* $g \leqslant h$*.*

Oczywiście przyjmujemy umowę, że $s \leqslant +\infty$ oraz $-\infty \leqslant s$ dla dowolnego $s \in \overline{\mathbb{R}}$. Przyjmujemy także: $-\infty < +\infty$ oraz $-\infty < s < +\infty$ dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$.

Dowód (twierdzenia II.2).
Twierdzenie wykażemy tylko dla przypadku $g, h \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $h < g$ i niech $\epsilon := \frac{g-h}{2}$.



Rysunek 2. Tak np. mogłoby być, gdyby $h < g$

Wówczas, ponieważ $\epsilon > 0$, zatem d.d.d. n zachodzi (odpowiednie „N" dobieramy najpierw dla ciągu a, potem dla b, a następnie bierzemy większe z nich — jak w dowodzie tw. II.1):

$$b_n < g - \epsilon = h + \epsilon < a_n,$$

co jest z kolei sprzeczne z założeniem, że $a_n \leqslant b_n$ d.d.d. n. (patrz rys. 2) □

Zauważmy, że nie można w powyższym twierdzeniu zmienić w obu miejscach „$\leqslant$" na „$<$". Wystarczy rozważyć przykład: $a_n = 1$ oraz $b_n = 1 + \frac{1}{n}$.

◇ Twierdzenie o trzech ciągach

Kolejne twierdzenie bywa bardzo użyteczne przy badaniu granic wielu ciągów, dla których użycie twierdzenia o rachunkowych własnościach granicy wydaje się niemożliwe.

Twierdzenie II.3 (o trzech ciągach). *Jeżeli*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

d.d.d. n*, oraz* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = g$*, to* $\lim_{n\to+\infty} b_n = g$*.*

Zanim przystąpimy do dowodu zauważmy, że gdybyśmy już wiedzieli, że ciąg środkowy $\{b_n\}$ posiada granicę, to dowód mielibyśmy natychmiast dzięki tw. II.2. Jednak tego nie wiemy...

Dowód.
Znów rozważamy tu tylko przypadek $g \in \mathbb{R}$. Biorąc $\epsilon > 0$, z definicji zbieżności oraz z nierówności z założenia twierdzenia d.d.d. n mamy:

$$g - \epsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < g + \epsilon,$$

a zatem w szczególności $|b_n - g| < \epsilon$. □

Uwaga. W przypadku, gdy $g = +\infty$ lub $-\infty$ założenia można osłabić — wystarczy jedna nierówność d.d.d. n. Lewa dla $+\infty$, a prawa dla $-\infty$. Tak uproszczone twierdzenie nazywane bywa „twierdzeniem o dwóch ciągach".

Wniosek. *Jeżeli ciąg c jest ograniczony oraz ciąg a zbieżny do 0, to ich iloczyn $c \cdot a$ jest zbieżny do 0.*

Dowód.
Z ograniczoności c mamy dla pewnego $M \in \mathbb{R}$

$$\forall_{n \geqslant n_0} \ |c_n| \leqslant M,$$

skąd

$$\forall_{n \geqslant n_0} \ 0 \leqslant |c_n a_n| \leqslant M \cdot |a_n|.$$

Jednak skoro $a_n \to 0$, zatem $|a_n| \to 0$, więc (z tw. II.1 dla ciągu stałego i $\{|a_n|\}$) $M \cdot |a_n| \to M \cdot 0 = 0$. To pozwala użyć tw. II.3 z „lewym" ciągiem stale równym 0. Tak więc $|c_n a_n| \to 0$, a stąd także $c_n a_n \to 0$. □

W powyższym dowodzie został użyty (dwukrotnie) następujący oczywisty i użyteczny

Fakcik. $a_n \to 0$ *wtw* $|a_n| \to 0$.

Dowód.
Patrz definicja zbieżności... □

⋄ Granica ciągu monotonicznego

Kolejne twierdzenie także związane z nierównością, ale już w całkiem inny sposób, to twierdzenie dotyczące ciągów monotonicznych.

Twierdzenie II.4 (o granicy ciągu monotonicznego). *Jeżeli ciąg $a = \{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ jest monotoniczny, to posiada granicę. Jest ona równa* $\sup\{a_n : n \geqslant n_0\}$ *gdy a jest rosnący, natomiast gdy a jest malejący, to równa jest* $\inf\{a_n : n \geqslant n_0\}$ [24)] *. W szczególności ciąg rosnący ograniczony z góry, a także ciąg malejący ograniczony z dołu jest zbieżny.*

Dowód.
Zajmiemy się tu tylko przypadkiem ciągu rosnącego ograniczonego z góry. Dowód dla pozostałych przypadków jest podobny. Niech $g := \sup\{a_n : n \geqslant n_0\}$. Wykażemy, że $a_n \to g$. Niech $\epsilon > 0$. Ponieważ a jest ograniczony z góry, zatem $g \in \mathbb{R}$ (aksjomat ciągłości!), a stąd $g - \epsilon < g$. Z definicji sup liczba $g - \epsilon$ nie jest zatem ograniczeniem górnym zbioru $\{a_n : n \geqslant n_0\}$, czyli istnieje $N \geqslant n_0$ takie, że $a_N > g - \epsilon$. Jednak ponieważ a jest rosnący, zatem dla dowolnego $n \geqslant N$ mamy

$$a_n \geqslant a_N > g - \epsilon,$$

a jednocześnie $g + \epsilon > g \geqslant a_n$, skąd $|a_n - g| < \epsilon$. □

⋄ Użycie twierdzeń do elementarnych przykładów

Poznanych w tym podrozdziale twierdzeń użyjemy teraz do zbadania paru spośród przykładów a) — g) ze strony 29.

a) $n^\alpha \to +\infty$ dla $\alpha > 0$. Z zasady Archimedesa znajdziemy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \geqslant \frac{1}{\alpha}$. Stąd $\frac{1}{k} \leqslant \alpha$ i z własności potęgi $\forall_{n \in \mathbb{N}} \ b_n := \sqrt[k]{n} = n^{\frac{1}{k}} \leqslant n^\alpha$. Na mocy twierdzenia o 2 ciągach wystarczy wykazać, że $b_n \to +\infty$. Ale znów z własności potęgi $\{b_n\}$ jest ciągiem rosnącym, zatem ma pewną granicę g i na dodatek, z tw. II.2, $g \geqslant 0$. Ponadto, z tw. II.1 dla mnożenia (plus indukcja „po k") mamy $b_n^k \to g^k$, ale $b_n^k = n \to +\infty$, stąd $g^k = +\infty$. Więc skoro $g \geqslant 0$, to $g = +\infty$.

[24)] Przypominam o umowie z podrozdziału 2., dotyczącej kresów zbiorów nieograniczonych.

c) $\frac{n^\alpha}{c^n} \to 0$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$, $c > 1$. Wybierzmy jakieś $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k > \alpha + 1$. Zauważmy, że $\sqrt[k]{c} > 1$ zatem $r := \sqrt[k]{c} - 1 > 0$. Wyraz ogólny naszego ciągu zapiszemy w następujący sposób:

$$a_n = \frac{n^\alpha}{c^n} = \frac{n^\alpha}{((\sqrt[k]{c})^n)^k} = \frac{n^\alpha}{((1+r)^n)^k}.$$

Teraz z nierówności Bernoulli'ego mamy

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{n^\alpha}{(1+nr)^k} \leqslant \frac{n^{k-1}}{(nr)^k} = \frac{r^{-k}}{n},$$

skąd $a_n \to 0$ z tw. o trzech ciągach.

f) $\sqrt[n]{n} \to 1$. Wykażemy najpierw, że $c_n := \sqrt[n]{\sqrt[2]{n}} \to 1$. Z nierówności Bernoulli'ego otrzymujemy łatwo, że $\sqrt[n]{1+a} \leqslant 1 + \frac{a}{n}$ dla $a > -1$. Stąd mamy

$$1 \leqslant \sqrt[n]{\sqrt[2]{n}} = \sqrt[n]{1 + (\sqrt[2]{n} - 1)} \leqslant 1 + \frac{\sqrt[2]{n} - 1}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt[2]{n}} - \frac{1}{n},$$

więc $c_n \to 1$ na mocy tw. o 3 ciągach. Ale $\sqrt[n]{n} = c_n \cdot c_n \to 1 \cdot 1 = 1$.

e) $\sqrt[n]{a} \to 1$ dla $a > 0$. Gdy $a \geqslant 1$, to d.d.d. n mamy $1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n}$, więc wystarczy użyć f) i tw. o 3 ciągach. Teraz dla $0 < a < 1$ mamy $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$, więc wystarczy skorzystać z poprzedniego przypadku i z tw. II.1.

g) Wykażemy najpierw, że $a = \{a_n\}_{n \geqslant 1}$ o wyrazach zadanych wzorem $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący (a nawet ściśle rosnący). Nierówność $a_{n+1} > a_n$ równoważna jest nierówności

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} < \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n,$$

czyli $1 - \frac{1}{n+2} < (1 - \frac{1}{n^2+2n+1})^n$, a tę ostatnią nierówność łatwo dowieść z nierówności Bernoulli'ego. Następnie dowodzimy, że $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry przez 3, zapisując a_n przy użyciu wzoru Newtona:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leqslant 1 + 2,$$

przy czym wyjaśnienie powyzszych dwóch nierówności pozostawiam Państwu. Zbieżność $\{a_n\}$ wynika zatem z tw. II.4, a z tw. II.2 mamy $e \leqslant 3$. Także z tw. II.2, z tego, że $a_2 > 2$ i że a jest rosnący, dostajemy $e > 2$.

4. Podciągi

◇ Podciąg i podciąg uogólniony

Definicja. $\{a'_n\}_{n \geqslant n_0}$ ***jest podciągiem*** *ciągu* $\{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ *wtw istnieje ściśle rosnący ciąg* $\{k_n\}_{n \geqslant n_0}$ *o wyrazach ze zbioru* $\mathbb{N}_{n_0}$ *taki, że* $\forall_{n \geqslant n_0}\ a'_n = a_{k_n}$.

Przykład. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n \geqslant 1}$ jest podciągiem ciągu $a = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geqslant 1}$ (wystarczy wziąć $k_n := n^2$) ale $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n \geqslant 1}$ nie jest podciągiem ciągu a. Także ciąg $b = \left\{\frac{1}{[\sqrt{n}]}\right\}_{n \geqslant 1}$ nie jest podciągiem ciągu a, choć każdy jego wyraz jest pewnym wyrazem ciągu a.

Trochę w związku z ostatnim przykładem, a trochę z powodów, które wyjaśnią się za moment, przyjmiemy jeszcze drugą definicję.

Definicja. $\{a'_n\}_{n\geqslant n'_0}$ ***jest uogólnionym podciągiem*** *ciągu* $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ *wtw istnieje ciąg* $\{k_n\}_{n\geqslant n'_0}$ *o wyrazach ze zbioru* $\mathbb{N}_{n_0}$ *taki, że* $k_n \to +\infty$ *oraz* $\forall_{n\geqslant n'_0}\ a'_n = a_{k_n}$.

Uwaga. Podciąg jest uogólnionym podciągiem, bo skoro $\{k_n\}$ jest ściśle rosnący i $\forall_{n\in\mathbb{N}_{n_0}}\ k_n \in \mathbb{N}_{n_0}$, to $k_n \to +\infty$ (dlaczego?). Przykład powyższy z ciągiem b pokazuje, że uogólniony podciąg nie musi być podciągiem.

◇ Granica podciągu

Okazuje się, że jeśli ciąg ma granicę, to tę samą granicę ma każdy jego podciąg. Prawdziwy jest nawet rezultat mocniejszy.

Twierdzenie II.5 (o granicy uogólnionego podciągu). *Jeżeli a' jest uogólnionym podciągiem ciągu a oraz $a_n \to g \in \overline{\mathbb{R}}$, to $a'_n \to g$.*

Dowód.
Rozważymy tylko przypadek gdy $g \in \mathbb{R}$ (dowody w pozostałych przypadkach są analogiczne). Niech $a'_n = a_{k_n}$, $k_n \to +\infty$. Niech $\epsilon > 0$ i niech M takie, że $|a_n - g| < \epsilon$ dla $n \geqslant M$. Ponieważ $k_n \to +\infty$ zatem dobierzemy N takie, że $k_n \geqslant M$ dla $n \geqslant N$. A zatem $|a_{k_n} - g| < \epsilon$ dla $n \geqslant N$. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ dobraliśmy N takie jakie było wymagane definicją i stąd $a'_n = a_{k_n} \to g$. □

Przykład. Rozważmy jeden z przypadków przykładu b) ze strony 29, mianowicie ciąg geometryczny $\{q^n\}_{n\geqslant 1}$ dla $1 > q \geqslant 0$. Oczywiście jest on malejący i ograniczony z dołu przez 0, zatem zbieżny na mocy twierdzenia II.4 do pewnego $g \in \mathbb{R}$. Pytanie tylko czym jest to g? Rozważmy ciąg $\left\{q^{(n+1)}\right\}_{n\geqslant 1}$ — oczywiście to podciąg pierwszego ciągu, zatem z tw. II.5 (i uwagi) mamy $q^{(n+1)} \to g$. Z drugiej strony, z tw. II.1,

$$q^{(n+1)} = q \cdot q^n \to q \cdot g,$$

zatem szukana granica g spełnia równanie

$$g = q \cdot g.$$

Łatwo je rozwiązać: ponieważ $q \neq 1$, zachodzi $g = 0$. W efekcie $q^n \to 0$.

◇ Granica górna i dolna

Twierdzenia II.5 nie daje się oczywiście odwrócić. Przykładem jest tu np. ciąg o wyrazach $(-1)^n$, który ma podciąg zbieżny do 1, ale sam nie jest zbieżny do 1 (w ogóle nie ma granicy). Inaczej mówiąc jeden ciąg a może mieć wiele rozmaitych granic swoich podciągów.

Niech

$$GP(a) = \left\{g \in \overline{\mathbb{R}} : \text{istnieje podciąg } a' \text{ ciągu } a \text{ taki, że } a'_n \to g\right\}.$$

Już wkrótce wykażemy, że zawsze $GP(a)$ jest niepusty. Gdy $a_n \to g$, to $GP(a)$ jest oczywiście (na mocy tw. II.5) zbiorem jednopunktowym — równym $\{g\}$. Można też dowieść, że $GP(a)$ posiada element największy i najmniejszy[25).]

Warto wiedzieć o istnieniu następujących dwóch uogólnień na **wszystkie** ciągi pojęcia granicy ciągu („zwykła” granica **nie dla każdego** ciągu istnieje). Mianowicie określamy *granicę górną*:

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \max GP(a)$$

[25)] Uwaga: ale w nieco szerszym rozumieniu — przez rozszerzenie (w oczywisty sposób) pojęcia max i min na podzbiory zbioru $\overline{\mathbb{R}}$, gdyż $GP(a)$ może nie być już bowiem podzbiorem $\mathbb{R}$. Np. jeżeli $+\infty \in GP(a)$, to przyjmujemy zatem $+\infty = \max GP(a)$, a gdy $GP(a) = \{-\infty\}$ to $\max GP(a) = -\infty$. I analogicznie z min.

i analogicznie *granicę dolną*

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := \min GP(a).$$

Można wykazać, że zachodzi

Fakt. $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = g$ *wtw* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g.$ **B.D.**

⋄ Lemat o podciągu monotonicznym

Zajmiemy się teraz ważnymi rezultatami dotyczącymi istnienia dla danego ciągu pewnych jego szczególnych podciągów. Zacznijmy od monotoniczności.

Lemat. *Każdy ciąg rzeczywisty posiada podciąg monotoniczny.*

Dowód.
Dla „ustalenia uwagi" przyjmujemy, że $n_0 = 1$. Dla ciągu a określamy

$$A := \left\{k \in \mathbb{N} : \forall_{l>k}\ a_l \geqslant a_k\right\}.$$

Zachodzi jeden z dwóch poniższych przypadków. Dla obu zdefiniujemy rekurencyjnie taki ciąg indeksów $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ (ściśle rosnący), że $\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest monotoniczny.

1°. A **jest nieograniczony z góry.** Wówczas niech $k_1 := \min A$, $k_{n+1} := \min\{k \in A : k > k_n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ (inaczej mówiąc, k_n to „n-ty z kolei (co do wielkości) element A") — to poprawna definicja, bo zbiór powyższy jest niepusty skoro A — nieograniczony z góry i dzięki zasadzie minimum to min istnieje. Jednocześnie z definicji mamy $k_{n+1} > k_n$, $k_n \in A \subset \mathbb{N}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, a ponadto z definicji A

$$\forall_{l>k_n}\ a_l \geqslant a_{k_n},$$

w szczególności zatem $a_{k_{n+1}} \geqslant a_{k_n}$. Czyli $\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest podciągiem ciągu a i to podciągiem rosnącym.

2°. A **jest ograniczony z góry.** Wybierzmy zatem $M \in \mathbb{N}$ (przy okazji stosujemy tu zasadę Archimedesa) takie, że $\forall_{k\in A}\ k < M$. Dla $l \in \mathbb{N}_M$ oznaczmy

$$B(l) := \{k \in \mathbb{N} : k > l, a_k < a_l\}.$$

Zauważmy, że $B(l) \neq \emptyset$. Gdyby bowiem $B(l) = \emptyset$, to $\forall_{k>l}\ a_k \geqslant a_l$, czyli $l \in A$, co jest niemożliwe, bo $l \geqslant M$. Znów więc dzięki zasadzie minimum $B(l)$ posiada min i co więcej zachodzi $\min B(l) > l \geqslant M$. Zatem możemy określić $f : \mathbb{N}_M \to \mathbb{N}_M$ wzorem

$$f(l) = \min B(l)$$

i mamy z definicji $f(l) \in B(l)$, skąd dla $l \in \mathbb{N}_M$ zachodzi

a) $f(l) > l$,

b) $a_{f(l)} < a_l$.

Teraz definiując $k_1 := M$, $k_{n+1} := f(k_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ uzyskujemy z a) $k_{n+1} > k_n$. W szczególności więc dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $k_n \in \mathbb{N}_M$ oraz z b) $a_{k_{n+1}} = a_{f(k_n)} < a_{k_n}$. Czyli $\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest podciągiem malejącym ciągu a (i to nawet ściśle).

□

⋄ Podciągi zbieżne — twierdzenie Bolzano–Weierstrassa

Powyższy lemat i twierdzenie II.4 dają natychmiast

Wniosek. *Każdy ciąg posiada podciąg, który ma granicę w* $\overline{\mathbb{R}}$.

A przy mocniejszych założeniach otrzymujemy znane i bardzo ważne

Twierdzenie II.6 (Bolzano–Weierstrassa). *Każdy ciąg ograniczony posiada podciąg zbieżny.*

Dowód.
Na mocy lematu ograniczony ciąg a posiada podciąg monotoniczny a' — ale ten podciąg jest ciągiem ograniczonym, skoro a jest ograniczony. Zatem z tw. II.4 ciąg a' — zbieżny. □

Jak widać, przy naszym podejściu cały ciężar dowodu spadł na dowód lematu.

5. Zupełność (trochę inna)

O zupełności była już mowa przy okazji aksjomatu zupełności. Teraz ta nazwa pojawi się w kontekście ciągów w innym znaczeniu, choć powiązanym ściśle z tym poprzednim.

Definicja. *Ciąg a jest* ***ciągiem Cauchy'ego*** *wtw*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{m,n\geqslant N}\ |a_m - a_n| < \epsilon \tag{II.2}$$

Jak widać, nieco to przypomina definicję granicy ciągu, ale w ogóle w tej definicji granica się nie pojawia. Mowa jest jedynie o tym, że „dla dużych indeksów wyrazy są sobie bliskie". Jednak to pierwsze podobieństwo okazuje się nie być przypadkowe! Zachodzi bowiem:

Twierdzenie II.7 (o zupełności $\mathbb{R}$). *Ciąg liczbowy jest ciągiem Cauchy'ego wtw jest ciągiem zbieżnym.*

Dowód.
„$\Leftarrow$"
Niech $a_n \to g \in \mathbb{R}$ i niech $\epsilon > 0$. Z definicji zbieżności dobierzmy N takie, że $|a_n - g| < \frac{\epsilon}{2}$ dla każdego $n \geqslant N$. W szczególności zatem, gdy $m, n \geqslant N$, to $|a_n - g| + |a_m - g| < \epsilon$, skąd z nierówności trójkąta

$$|a_n - a_m| = |a_n - g + g - a_m| \leqslant |a_n - g| + |a_m - g| < \epsilon.$$

„$\Rightarrow$"
Teraz załóżmy, że a jest ciągiem Cauchy'ego.

Wykażemy najpierw, że a jest ograniczony. Korzystając z (II.2) („z $\epsilon = 1$") wybierzmy $N' \geqslant n_0$ takie, że

$$\forall_{m,n\geqslant N'}\ |a_m - a_n| < 1.$$

A zatem jeżeli $n \geqslant N'$, to („bierzemy $m = N'$") $|a_{N'} - a_n| < 1$ skąd $|a_n| \leqslant |a_{N'}| + 1$. A jeżeli $n \leqslant N'$, to $|a_n| \leqslant \max\{|a_k| : n_0 \leqslant k \leqslant N',\ k \in \mathbb{Z}\}$. Stąd a — ciąg ograniczony.

Na mocy twierdzenia Bolzano–Weierstrassa istnieje podciąg uogólniony a' ciągu a, który jest zbieżny. Niech więc $a'_n = a_{k_n} \to g \in \mathbb{R}$, gdzie $k_n \to +\infty$.

Wykażemy, że również $a_n \to g$. Niech $\epsilon > 0$. Korzystając znów z (II.2) wybierzmy $N \geqslant n_0$ takie, że $\forall_{m,n\geqslant N}\ |a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Ponieważ $k_n \to +\infty$ oraz $a_{k_n} \to g$, zatem możemy wybrać takie s, że $|a_{k_s} - g| < \frac{\epsilon}{2}$ i jednocześnie $k_s \geqslant N$. W szczególności („bierzemy $m = k_s$")

$$\forall_{n\geqslant N}\ |a_{k_s} - a_n| < \frac{\epsilon}{2},$$

skąd dla dowolnego $n \geqslant N$

$$|a_n - g| = |a_n - a_{k_s} + a_{k_s} - g| \leqslant |a_n - a_{k_s}| + |a_{k_s} - g| < \epsilon.$$

To dowodzi, że $a_n \to g$. □

Warto wspomnieć, że powyższe twierdzenie, podobnie jak twierdzenie II.4 (o granicy ciągu monotonicznego) może służyć do dowodu istnienia granicy ciągu w takich sytuacjach, gdy nawet nie mamy pomysłu jaka ta granica mogłaby ewentualnie być.

6. Informacja o dalszych twierdzeniach dotyczących granicy ciągu

Na koniec tego rozdziału podaję bez dowodu kilka dalszych twierdzeń, niekiedy użytecznych w praktycznych zadaniach dotyczących granicy.

Twierdzenie II.8 (o granicy średniej arytmetycznej i geometrycznej). *Niech* $n_0 = 1$. *Jeżeli* $a_n \to g \in \overline{\mathbb{R}}$, *to*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \to g.$$

Jeżeli ponadto $\forall_{n\geqslant 1}\ a_n > 0$, *to*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \to g.$$

Twierdzenie II.9 (Stolza). *Niech* $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ *i* $\{b_n\}_{n\geqslant n_0}$ *będą takie, że*

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to g \in \overline{\mathbb{R}},$$

przy czym $\{b_n\}_{n\geqslant n_0}$ *jest ciągiem ściśle monotonicznym o wyrazach niezerowych oraz zachodzi jeden z warunków:*

- $a_n \to 0,\ b_n \to 0$
- $b_n \to +\infty$
- $b_n \to -\infty$

Wówczas $\dfrac{a_n}{b_n} \to g$.

Zadania do Rozdziału II

$\forall$ [26] 1. Znajdź granicę lub wykaż jej brak dla ciągów o wyrazach zadanych wzorami podanymi niżej (o ile „się da” — **bez** użycia twierdzenia o granicy średniej arytmetycznej i geometrycznej i twierdzenia Stolza).

(a) $\dfrac{n^{\left(9^{(9^9)}\right)}}{1,0000001^n}$

(b) $\dfrac{(n-7)^{100}}{(n+7)^{101}}$

(c) $\dfrac{7^n+6^n-n^{1000}}{(7,1)^n-7^n+n^{1001}}$

(d) $\dfrac{100^n+n!-\sqrt{n!}}{n!-200^n}$

(e) $(1,00001-\frac{1}{n})^n$

(f) $(1+\frac{1}{n^2})^n$

(g) $(0,9999+\frac{1}{n})^n$

(h) $(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

(i) $\sqrt[n]{n^{100}}$

(j) $\sqrt[n]{7^n+3^n}$

(k) $\sqrt[n]{7^n-3^n}$

(l) $\sqrt[n]{n!}$

(m) $\sqrt[n]{n!-100^n}$

(n) $\sqrt{n^2+n}-n$

(o) $\frac{n^n}{n!}$

(p) $\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$ $(=\prod_{k=1}^n\frac{k+9}{2k-1})$

(q) $\prod_{k=2}^n(1-\frac{1}{k^2})$.

$\forall$ [27] 2. Znajdź granicę lub wykaż jej brak dla następujących ciągów zadanych rekurencyjnie wzorami

(a) $a_1=\alpha,\ \ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{5}{a_n})$ dla $n\geqslant 1$, dla $\alpha=2$ oraz dla $\alpha=3$;

(b) $a_1=x,\quad a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\cdot(2-a_n)$ dla $n\geqslant 1$, w zależności od $x\in[0;2]$.

3. Zbadaj, czy ciągi zadane wzorami poniżej są zbieżne

(a) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$ $(=\sum_{k=0}^n\frac{1}{n+k})$;

(b) $\sum_{k=0}^n\frac{c_k}{10^k}$, gdzie $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ jest pewnym ciągiem cyfr.

4. Wykaż, że jeśli $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n>0$ oraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to g$, to $\sqrt[n]{a_n}\to g$.

5. Wykaż, że dla dowolnego $p\in\mathbb{N}_0$ zachodzi

$$\frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}}\to\frac{1}{p+1}.$$

6. Przeprowadź samodzielnie pominięty na wykładzie dowód twierdzenia II.1 (o rachunkowych własnościach granicy) dla przypadku ilorazu.

7. Wykaż, że jeżeli $k\in\mathbb{N}$ oraz $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n\geqslant 0$, to $a_n\to g\Rightarrow\sqrt[k]{a_n}\to\sqrt[k]{g}$ (rozważ kolejno przypadki: $g=1$, $g>0$, $g=0$)

$\forall$ 8. Znajdź przykłady do kilku „nieoznaczoności”, tj. sytuacji gdy operacja nie jest określona w rozumieniu ze strony 27, wykazując, że nie dałoby się danej operacji dla tej sytuacji określić w żaden sposób z zachowaniem tezy twierdzenia II.1 (np. dla „$+\infty-(+\infty)$”, „$0\cdot(+\infty)$”, ...)

[26] Do zrobienia w każdej grupie przynajmniej: 2 przykłady spośród (a) - (d), 3 przykłady spośród (e) - (h) oraz przykład (k) lub (m).

[27] Należy rozwiązać co najmniej jeden z podpunktów.

9. Wykaż, że $a_n \to 0$ wtw $|a_n| \to 0$ oraz, że niezależnie od wartości g, $a_n \to g \Rightarrow |a_n| \to |g|$ (z umową, że $|\pm\infty| = +\infty$).

$\forall$ 10. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ i niech c będzie ograniczeniem górnym A. Wykaż, że $c = \sup A$ wtw istnieje ciąg $\{a_n\}$ złożony z elementów zbioru A taki, że $a_n \to c$.

11. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$ dla $A =$

  (a) $\{\frac{n}{m} + \frac{m}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}$;

  (b) $\{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} : a, b, c > 0\}$.

12. Wykaż, że jeśli $a_{2n} \to g$ oraz $a_{2n+1} \to g$, to $a_n \to g$

13. Podaj ogólniejsze niż powyżej (jak najogólniejsze ...) warunki na ciągi indeksów $\{k_n\}$, $\{l_n\}$ gwarantujące, że jeśli $a_{k_n} \to g$ i $a_{l_n} \to g$, to zachodzi $a_n \to g$ (oczywiście także wykaż tak utworzone twierdzenie).

14. Wykaż, że jeżeli $a_{2n} \to g$, $a_{2n+1} \to h$, $a_{3n} \to f$ dla pewnych $f, g, h \in \overline{\mathbb{R}}$, to $\{a_n\}$ ma granicę ($= f = g = h$).

15. Wykaż **Twierdzenie**: *Jeżeli ciąg liczbowy nie posiada granicy, to istnieją dwa jego podciągi posiadające różne granice.*

$\forall$ 16. Wykorzystując twierdzenie o 3 ciągach (twierdzenie II.3) oraz twierdzenie o granicy uogólnionego podciągu (twierdzenie II.5) wykaż, że

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$$

jeżeli $x_n \to +\infty$

17. Korzystając z zadań 16 i 7 wykaż, że jeżeli $a \in \mathbb{Q}$ oraz $x_n \to +\infty$, to $(1 + \frac{a}{x_n})^{x_n} \to e^a$.

18. Wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\frac{[nx]}{n} \to x$. Mamy w ten sposób przykład „jednolicie zadanego" ciągu liczb wymiernych zbieżnego do dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Posługując się powyższym ciągiem znajdź analogiczny ciąg złożony z liczb niewymiernych.

19. Udowodnij twierdzenie Stolza (tw. II.9).

20. Udowodnij wybraną część twierdzenia o granicy średniej arytmetycznej i geometrycznej (tw. II.8).

21. Wykaż, że jeśli $(a_{n+1} - a_n) \to g$, to $\frac{a_n}{n} \to g$

22. Wykaż, że jeśli $(a_{n+1} + a_n) \to 0$, to $\frac{a_n}{n} \to 0$. Czy można tu 0 zastąpić przez dowolne g?

III Szeregi liczbowe

[około 2 wykładów]

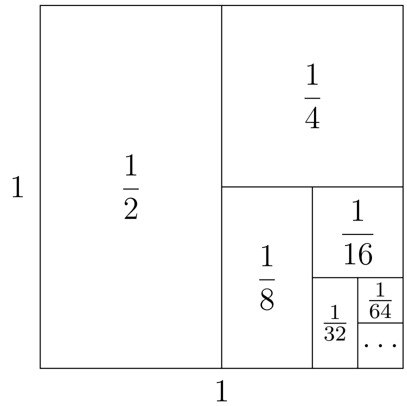
1. Definicja „sumy nieskończonej”

◇ Intuicje

Zapewne wielu spośród Państwa posługiwało się nieskończonym sumowaniem jeszcze na długo przed poznaniem pojęcia sumy szeregu — czyli matematycznego uściślenia pojęcia takiej właśnie „nieskończonej sumy”. Typowy przykład to równość

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1,$$

którą można „udowadniać” na wiele sposobów — „algebraicznie” i „geometrycznie” (np. „krojenie” kwadratu 1×1 — patrz rys. 3).



Rysunek 3. Takimi prostokątami „wypełniamy” cały kwadrat o boku 1.

◇ Uściślenie

Pojęcie ciągu i jego granicy (z poprzedniego rozdziału) pozwala zrealizować następujący pomysł prowadzący do wspomnianego uściślenia:

> *Zamiast mówić o dodawaniu nieskończenie wielu składników, mówimy o ciągu złożonym z „coraz dłuższych” zwykłych skończonych sum.*

Stąd poniższa definicja. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ — ciąg liczbowy.

Definicja. ***Szeregiem*** *o wyrazach* a_n *dla* $n\geqslant n_0$ *nazywamy ciąg* $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ *zadany wzorem*

$$S_n:=\sum_{k=n_0}^{n}a_k,\quad n\geqslant n_0.$$

Oznaczamy go symbolem

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_n.$$

Ciąg $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ nazywamy także ***ciągiem sum częściowych*** *szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$* [28]*. Tym samym symbolem*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

oznaczamy również granicę ciągu $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$, o ile granica ta istnieje — nazywamy ją wówczas ***sumą szeregu***

◇ Podwójny sens „$\sum_{n=n_0}^{+\infty}$" i terminologia „szeregowa"

W związku z tym symbol $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ przestaje niestety mieć swój jednoznaczny sens — oprócz znaczenia szeregu (czyli pewnego ciągu) symbol ten może też oznaczać jego granicę, tj. sumę (czyli pewien element $\overline{\mathbb{R}}$), o ile ta istnieje. A zatem np. „napis" $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ to ciąg o kolejnych wyrazach $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ... lub granica tego ciągu — wybór znaczenia zależy od kontekstu.

W związku z powyższą definicją, dla szeregów obowiązuje wprowadzona w rozdziale II cała terminologia związana z granicą ciągu. Mówimy więc np., że szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ ma granicę $g \in \overline{\mathbb{R}}$ wtw $S_n \to g$. Są jednak pewne (uświęcone tradycją) wyjątki: nie używa się symbolu „$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \to g$" — zamiast tego pisze się

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = g.$$

Ponadto, dla szeregów, częściej zamiast „granica" mówimy „suma". Jednak cały czas, tak jak było ogólnie dla wszystkich ciągów, *szereg jest zbieżny* wtw ma **skończoną** granicę (sumę) (tzn. istnieje granica g ciągu sum częściowych i $g \in \mathbb{R}$).

◇ Ciąg a szereg

Podsumujmy zatem: owa nieściśle określona dotąd „suma nieskończona" to zwyczajnie granica (o ile istnieje) ciągu sum częściowych, czyli suma szeregu. Natomiast sam szereg (tj. ciąg sum częściowych), to po prostu szczególny rodzaj ciągu. A właściwie może lepiej byłoby powiedzieć: ciąg utworzony w pewien szczególny sposób z ciągu swoich wyrazów $\{a_n\}$. To wcześniejsze stwierdzenie było nienajlepsze, gdyż ma miejsce następujący fakt:

Fakt. *Każdy ciąg jest szeregiem.*

Dowód pozostawiam Państwu (jest nietrudny ...).

2. Ogólne twierdzenia i podstawowe przykłady

Główne twierdzenia, które będą nas interesowały w omawianej tu teorii szeregów to tzw. „kryteria zbieżności", czyli twierdzenia gwarantujące, że przy pewnych założeniach o ciągu wyrazów $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny (na ogół nie będziemy wnikali w to, jaka jest suma szeregu). Wcześniej jednak sformułujemy kilka twierdzeń o bardziej ogólnym charakterze. Warto zwrócić uwagę na to, że większość z nich to proste konsekwencje, czy wręcz przeformułowania twierdzeń uzyskanych uprzednio w rozdziale dotyczącym ciągów.

[28] Prowadzi to do dość dziwnej sytuacji, że $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ (czyli $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$) jest sam swoim ciągiem sum częściowych — ale cóż — taka jest tradycja ...

◇ **Warunek Cauchy'ego dla szeregów**

Twierdzenie III.1 (o warunku Cauchy'ego dla szeregów). $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny wtw*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{m\geqslant n\geqslant N}\ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon. \tag{III.1}$$

Dowód.
Jeżeli $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k$, to $\sum_{k=n}^{m} a_k = S_m - S_{n-1}$ zatem (III.1) można zapisać

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{m\geqslant n\geqslant N}\ |S_m - S_{n-1}| < \epsilon,$$

co nie tylko wygląda „podobnie" do warunku Cauchy'ego dla ciągu $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$, ale, jak bardzo łatwo się przekonać, [29] jest mu równoważne. Teza wynika zatem z twierdzenia o zupełności $\mathbb{R}$ (tw. II.7). □

◇ **Podstawowy warunek konieczny zbieżności**

Twierdzenie III.2 (o warunku koniecznym zbieżności szeregu). *Jeżeli* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *— zbieżny, to* $a_n \to 0$.

Dowód.
Można np. użyć twierdzenia III.1, ale można inaczej. Załóżmy, że $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = g \in \mathbb{R}$. Dla $n \geqslant n_0 + 1$ zachodzi $a_n = S_n - S_{n-1} \to g - g = 0$ (korzystamy z twierdzeń o granicy podciągu uogólnionego oraz o granicy różnicy). □

◇ **Istnienie sumy dla wyrazów nieujemnych**

Twierdzenie III.3. *Szereg o wyrazach nieujemnych posiada sumę rzeczywistą lub równą* $+\infty$*. Jest on zbieżny wtw jego ciąg sum częściowych jest ograniczony z góry.*

Dowód.
To jasne, bo $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest rosnący, zatem wystarczy użyć twierdzenia II.4. □

Uwaga dotycząca oznaczeń. Dla szeregów o wyrazach nieujemnych (i tylko dla takich raczej) piszemy często „$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n < +\infty$" zamiast „$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny".

◇ **Dodawanie szeregów i mnożenie przez liczbę**

Ostatnie z twierdzeń „ogólnych" to prosty wniosek z twierdzenia o własnościach rachunkowych granicy ciągu.

Twierdzenie III.4. *Załóżmy, że* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n = B$*, gdzie* $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ *oraz że* $r \in \mathbb{R}$*. Wówczas:*

- *jeżeli* $A \pm B$ *jest określone, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- *jeżeli* $r \cdot A$ *jest określone, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} r \cdot a_n = r \cdot A$

Dowód.
To oczywiste z tw. II.1. □

[29] Choć rzeczywiście łatwo, zachęcam by oba warunki wypisać i by szczegółowo samodzielnie prześledzić dlaczego zachodzą implikacje w obydwie strony.

Szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_n+b_n)$ to suma szeregów $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ [30]. Z tw. III.4 wynika więc w szczególności, że suma szeregów zbieżnych jest szeregiem zbieżnym i analogicznie dla różnicy, czy mnożenia szeregu przez liczbę.

Uwaga. $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_n \cdot b_n)$ **nie** jest (na ogół ...) iloczynem szeregów $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ (rozumianych wciąż jako odpowiednie ciągi sum częściowych) — dlaczego?

⋄ Szereg geometryczny

Na ogół szeregi zbieżne o nawet dość „prosto wyglądających" wyrazach mają granice nie będące żadnymi „znanymi" liczbami (w tym — wymiernymi). Jednak dla *szeregu geometrycznego* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ sprawa jest prosta:

- dla $q \in (-1;1)$ ma sumę $\frac{1}{1-q}$;
- dla $q \geqslant 1$ ma sumę $+\infty$;
- dla $q \leqslant -1$ nie posiada granicy (suma nie istnieje).

Wynika to natychmiast ze znanego (indukcja ...) wzoru na S_n:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ dla } q \neq 1.$$

⋄ Zagęszczanie

Aby powiększyć nieco nasz zasób (dotąd bardzo ubogi...) przykładów szeregów zbieżnych i rozbieżnych sformułujemy jeszcze następujący fakt.

Lemat (o zagęszczaniu). *Jeżeli* $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ *jest malejący i nieujemny, to*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \quad \textit{wtw} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} < +\infty.$$

Dowód pozostawiamy jako zadanie.

Przykład. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1.$$

Mamy bowiem $2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \frac{1}{2^{n\cdot(\alpha-1)}} = q^n$, dla $q = \frac{1}{2^{(\alpha-1)}}$. Ponieważ $q \in (-1;1)$ wtw $\alpha > 1$, zatem wystarczy użyć lematu o zagęszczaniu oraz przykładu z szeregiem geometrycznym. „Zagęszczanie" dokonało tu „cudownej" przemiany badanego szeregu na prosty już dla nas szereg geometryczny.

Warto zapamiętać, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (tzw. szereg *harmoniczny*) jest „jeszcze" rozbieżny. Tu $\alpha = 1$, czyli to przypadek „graniczny" pomiędzy zbieżnością (dla $\alpha > 1$) i rozbieżnością (dla $\alpha \leqslant 1$).

---

[30] Tzn. ciąg sum częściowych dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_n+b_n)$ jest sumą ciągów sum częściowych dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ i dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

$\diamond$ Bezwzględna zbieżność

Przed kolejnym twierdzeniem wprowadźmy następującą definicję.

Definicja. $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ ***jest bezwzględnie zbieżny*** *wtw* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.

Twierdzenie III.5 (o zbieżności bezwzględnej). *Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

Dowód.
Skoro $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$ jest zbieżny zatem na mocy tw. III.1 zachodzi

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{m\geqslant n\geqslant N}\ \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon.$$

Ponieważ jednak (nierówność trójkąta uogólniona na $(m-n+1)$ składników)

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |a_k|,$$

zatem w efekcie otrzymujemy warunek Cauchy'ego także dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, więc z tw. III.1 wynika jego zbieżność. □

Jak się już wkrótce przekonamy, twierdzenie odwrotne do twierdzenia III.5 nie zachodzi. Może się więc zdarzyć szereg zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny. O takim szeregu mówimy, że jest *zbieżny warunkowo*.

3. Kryteria zbieżności bezwzględnej

$\diamond$ Kryterium porównawcze

Zaczniemy od bardzo prostego, ale w pewnym sensie także najważniejszego (i w praktyce bardzo użytecznego) twierdzenia pomagającego badać zbieżność konkretnych szeregów o wyrazach nieujemnych.

Kryterium III.1 (porównawcze). *Jeżeli* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *d.d.d.* n *oraz* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ *jest zbieżny, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *— zbieżny.* [31)]

Dowód poprzedzimy następującym oczywistym faktem (którego dowód zostawiam Państwu).

Lemacik. *Dla dowolnego* $n'_0 \geqslant n_0$ $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny wtw* $\sum_{n=n'_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

Dowód (kryterium III.1).
Załóżmy, że $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla $n \geqslant n'_0$. Na mocy lemaciku oraz tw. III.3 wystarczy wykazać, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=n'_0}^{+\infty} a_n$ jest ograniczony z góry. Ale z założenia oraz z tw. III.3 istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\sum_{k=n'_0}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=n'_0}^{n} b_k \leqslant M$$

dla dowolnego $n \geqslant n'_0$. □

Wnioski.

1) *Jeżeli* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *d.d.d.* n *oraz* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *— rozbieżny, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ *— rozbieżny.*
A zatem mamy też proste w użyciu kryterium rozbieżności.

[31)] Na ogół bez przypominania przyjmujemy, że n_0 jest początkowym indeksem dla rozważanych ciągów i szeregów.

2) *Jeżeli* $|a_n| \leqslant b_n$ *d.d.d.* n *oraz* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ *— zbieżny, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *— zbieżny bezwzględnie, a stąd również — zbieżny.*

Kryterium porównawcze można więc *de facto* traktować jako kryterium dotyczące zbieżności bezwzględnej szeregów.

◇ Kryterium asymptotyczne

Przed sformułowaniem kolejnego kryterium przyjmijmy następującą definicję i oznaczenie.

Definicja. *Załóżmy, że* $a_n, b_n \neq 0$ *d.d.d.* n*. Ciągi* a *i* b *są* ***asymptotycznie podobne*** *wtw* $\frac{a_n}{b_n} \to g$ *dla pewnego* $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Oznaczmy to w skrócie* $a \sim b$ *bądź* $a_n \sim b_n$ [32] .

Kryterium III.2 (asymptotyczne). *Jeżeli* $a_n \sim b_n$ *oraz* $\{b_n\}_{n \geqslant n_0}$ *ma wyrazy stałego znaku od pewnego miejsca, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny wtw* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ *jest zbieżny.*

Dowód.

Zauważmy najpierw, że gdy $a_n \sim b_n$ oraz $\{b_n\}_{n \geqslant n}$ ma wyrazy stałego znaku od pewnego miejsca, to także $\{a_n\}_{n \geqslant n}$ ma wyrazy stałego znaku od pewnego miejsca (patrz np. rozumowanie poniżej). Ponadto $a_n \sim b_n$ wtw $b_n \sim a_n$. A zatem z tej „symetrii" wynika, że wystarczy wykazać implikację w jedną stronę. Ponieważ przemnożenie szeregów przez (-1) nie wpływa na ich zbieżność, możemy założyć, że $b_n > 0$ d.d.d. n oraz że $g = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$. Z definicji granicy („$\epsilon = \frac{g}{2}$") mamy $\frac{a_n}{b_n} > g - \frac{g}{2} = \frac{g}{2}$ d.d.d. n, więc $\frac{2}{g} \cdot a_n > b_n > 0$ d.d.d. n (w szczególności $\{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ ma stały znak od pewnego miejsca). Zatem jeżeli $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{2}{g} a_n$ też (tw. III.4), więc z kryterium porównawczego uzyskujemy zbieżność $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$. □

Uwaga. Zbieżność szeregów z kryterium III.2 jest oczywiście równoważna (przy założeniach tego kryterium) ich bezwzględnej zbieżności. Zatem nie warto „próbować" tego kryterium, gdy spodziewamy się zbieżności warunkowej.

Jak widać z dowodu, kryterium asymptotyczne jest formalnie słabsze od kryterium porównawczego, które stanowiło istotę jego dowodu. Jednak w praktyce, kryterium asymptotyczne bywa często dużo wygodniejsze w użyciu. Idea jego użycia jest taka: jeżeli wyraz szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zadany dość skomplikowanym wzorem, to znajdujemy „prostszy" ciąg $\{b_n\}$ o stałym znaku i asymptotycznie podobny do $\{a_n\}$ (a jak taki znaleźć? — często wystarczy w formule na a_n zostawić tylko „to co najistotniejsze"). Tym sposobem problem badania zbieżności sprowadza nam się do badania tylko „prostszego" szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

Przykład. Niech

$$a_n = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{70}{n^3}}{\frac{1}{n} + \frac{17}{n^2}}.$$

Czy $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny? Łatwo odgadnąć „wygodny" $\{b_n\}$. Niech mianowicie

$$b_n := \frac{\frac{1}{n^2} + 0}{\frac{1}{n} + 0} = \frac{1}{n} > 0.$$

Bez trudu sprawdzamy, że $a_n \sim b_n$ (a nawet $\frac{a_n}{b_n} \to 1$) i z kryterium asymptotycznego $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ — rozbieżny, bo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ — rozbieżny. Oczywiście dało się też bezpośrednio szacować a_n z dołu (jak?) tak by użyć „zwykłego" kryterium porównawczego, ale użyte kryterium III.2 wydaje się tu szybsze i bardziej „automatyczne".

---

[32] Ta druga wersja oznaczenia (choć wygodna) jest nieco nieformalna (podobnie jak np. oznaczenie $a_n \to g$), bo chodzi tu przecież o własność **ciągów**, a nie ich n–tego wyrazu ... Ponadto — uwaga: ani nazwa „asymptotycznie podobne", ani symbol „$\sim$" nie są zbyt powszechnie używane.

◇ Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego

Czasami (choć zazwyczaj nie aż tak często, jak chcieliby tego studenci...) przydają się następujące dwa kryteria, także będące konsekwencjami kryterium porównawczego.

Kryterium III.3 (d'Alemberta) oraz III.4 (Cauchy'ego). *Niech*

$$c_n := \begin{cases} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| & \text{dla d'Alemberta}^{33)} \\ \sqrt[n]{|a_n|} & \text{dla Cauchy'ego} \end{cases}$$

i załóżmy, że $c_n \to g \in \overline{\mathbb{R}}$. Jeżeli $g < 1$, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, a jeżeli $g > 1$, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Dowód (dla d'Alemberta). (dla C. — jeszcze łatwiej...) Jeżeli $0 \leqslant g < 1$, to $g = 1 - 2\epsilon$ dla pewnego $\epsilon > 0$, zatem z definicji granicy dla ciągu $\{c_n\}$ istnieje N takie, że $c_n \leqslant g + \epsilon = 1 - \epsilon$ o ile $n \geqslant N$. Zatem dla $n \geqslant N + 1$

$$(1-\epsilon)^{(n-N)} \geqslant \prod_{k=N}^{n-1} c_k = \left|\frac{a_n \cdot \ldots \cdot a_{N+1}}{a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_N}\right| = \frac{|a_n|}{|a_N|},$$

czyli $|a_n| \leqslant \frac{|a_N|}{(1-\epsilon)^N} \cdot (1-\epsilon)^n$ d.d.d. n.

Ponieważ szereg, którego n–ty wyraz jest po prawej stronie pow. nierówności to zbieżny szereg geometryczny pomnożony przez stałą, zatem $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie na mocy wniosku 2 z kryterium porównawczego.

Jeżeli $g > 1$ to zapisując $g = 1+2\epsilon$ z $\epsilon > 0$ i biorąc N takie, że $c_n \geqslant g - \epsilon = 1+\epsilon$ dostajemy analogicznie $|a_n| \geqslant \frac{|a_N|}{(1+\epsilon)^N}(1+\epsilon)^n$ d.d.d. n. Zatem z twierdzenia „o dwóch ciągach" $|a_n| \to +\infty$, czyli $a_n \not\to 0$. Stąd $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ — rozbieżny na mocy tw. III.2 (o warunku koniecznym). □

Przykłady.

1. Dla $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ te kryteria nie działają dla żadnego $\alpha \in \mathbb{R}$, bo dostajemy $g = 1$ (choć nawet nie dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$ jest to przy naszej obecnej wiedzy takie jasne; patrz np. zadanie 7)

2. Dla $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ dostajemy przy użyciu kryterium d'Alemberta $c_n = \frac{1}{n+1} \to 0$, zatem szereg ten jest zbieżny. Co więcej można wykazać (i nie jest to bardzo trudne, choć na nasze wykłady — zbyt czasochłonne, ale zachęcam do samodzielnych prób[34)]) następujący fakt.

Fakt. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Uwaga. Z twierdzenia o granicy średniej geometrycznej (tw. II.8) nietrudno dowieść, że ciąg spełniający założenia kryterium d'Alemberta musi także spełniać założenia kryterium Cauchy'ego. A zatem z formalnego punktu widzenia kryterium Cauchy'ego jest „mocniejsze" (tzn. działa dla niemniejszej klasy przypadków niż kryt. d'Alemberta). Mimo to czasem wygodniej jest użyć kryt. d'Alemberta niż Cauchy'ego ze względów czysto rachunkowych.

4. Kryteria zbieżności „niekoniecznie bezwzględnej"

Kryteria z poprzedniego podrozdziału nie nadawały się do bezpośredniego dowodzenia zbieżności takiego szeregu, który nie byłby zbieżny bezwzględnie. Wszystkie one opierały się bowiem na kryterium porównawczym.

[33)] A zatem w kryt. III.3 zakładamy, że $a_n \neq 0$ d.d.d. n.
[34)] Patrz zadanie 18.

◇ Kryterium Dirichleta i przekształcenie Abela

Do badania zbieżności szeregów, które nie muszą być jednak bezwzględnie zbieżne przydaje się dość często następujące kryterium.

Kryterium III.5 (Dirichleta). *Jeżeli $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest monotoniczny od pewnego miejsca i $a_n \to 0$ oraz $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ ma ograniczony ciąg sum częściowych, to*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$$

jest zbieżny.

W dowodzie wykorzystamy następującą formułę.

Lemat (przekształcenie Abela). *Dla dowolnych liczb $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ zachodzi*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\sum_{l=1}^{k} u_l) \cdot (v_k - v_{k+1}) + (\sum_{l=1}^{n} u_l) \cdot v_n. \text{ [35)]}$$

Dowód.
Prosta indukcja. □

Dowód (kryterium Dirichleta).
Możemy założyć, że $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest monotoniczny (patrz lemacik ze str. 43), a co więcej, że jest malejący (gdyby był rosnący, to zamiast wyrazów a_n, b_n można rozważyć $-a_n$, $-b_n$ i skorzystać z wersji „malejącej”).

Wykażemy, że szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n b_n$ spełnia war. Cauchy'ego dla szeregów, co dzięki tw. III.1 da nam jego zbieżność. Niech $T_n := \sum_{k=n_0}^{n} b_k$ dla $n \geqslant n_0$. Niech $M > 0$ będzie takie, że $\forall_{n\geqslant n_0} \ |T_n| \leqslant M$. To, że $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ — malejący i zbieżny do 0 daje nam, że $\forall_{n\geqslant n_0} \ a_n \geqslant 0$. Zatem dla $\epsilon > 0$ można dobrać $N > n_0$ takie, że

$$\forall_{n\geqslant N} \ 0 \leqslant a_n < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Korzystając teraz kolejno z lematu (o przekształceniu Abela), z nierówności trójkąta, z „malenia” $\{a_n\}$ dostajemy dla dowolnych $m \geqslant n \geqslant N$:

$$\begin{aligned} |\sum_{k=n}^{m} b_k a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} |\sum_{l=n}^{k} b_l| \cdot (a_k - a_{k+1}) + |\sum_{l=n}^{m} b_l| \cdot a_m &= \sum_{k=n}^{m-1} |T_k - T_{n-1}| \cdot (a_k - a_{k+1}) + \\ +|T_m - T_{n-1}| \cdot a_m \leqslant 2M \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) + 2M a_m &= 2M(a_n - a_m + a_m) = 2M a_n < \epsilon \end{aligned}$$

□

◇ Kryterium Leibniza i przykłady szeregów zbieżnych warunkowo

W udowodnionym właśnie nowym kryterium nieco „dziwaczne” może się wydawać założenie dotyczące ograniczoności ciągu sum częściowych dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$. Jednak ciągów b_n spełniających ten warunek jest bardzo wiele. Wybór każdego konkretnego takiego ciągu daje nam automatycznie jakieś kryterium, będące pewnym szczególnym przypadkiem kryt. Dirichleta. Np., gdy $b_n := (-1)^n$ to odpowiedni ciąg sum częściowych jest ograniczony, gdyż przyjmuje tylko dwie możliwe wartości: 0 oraz 1 względnie -1 (w zależności od parzystości n_0). Zatem uzyskujemy

[35)] Gdy $n = 1$, to z prawej strony wzoru pojawia się „$\sum_{k=1}^{0} \ldots$” Stosujemy umowę, że zawsze gdy $q < p$, to $\sum_{k=p}^{q} \ldots = 0$.

Wniosek (kryterium Leibniza). *Jeżeli* $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ *jest monotoniczny od pewnego miejsca i* $a_n \to 0$*, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *jest zbieżny.*

To kryterium pozwala nam podać zapowiadany wcześniej przykład.

Przykład. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ jest warunkowo zbieżny. Ogólniej: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^\alpha}$ dla $\alpha\in(0;1]$ jest warunkowo zbieżny.

5. Zmiana kolejności sumowania

◇ Problem przemienności sumowania nieskończonego

Można zadać sobie ogólne pytanie:

> *Jakie własności zwykłego („skończonego") sumowania przenoszą się na „sumowanie nieskończone"?*

Dość chyba naturalne oczekiwanie, że przenoszą się „wszystkie" własności okazuje się jednak być złudne. Należy zachować daleko posuniętą ostrożność przy próbach przenoszenia własności sum skończonych na przypadek nieskończony. Dość często okazuje się, że w miarę „bezboleśnie" takiego przeniesienia można dokonać przy dodatkowym założeniu o bezwzględnej zbieżności szeregu. Zilustrujemy to na przykładzie problemu przemienności dodawania. Aby to uściślić przypomnijmy najpierw, że $p:\mathbb{N}_{n_0}\to\mathbb{N}_{n_0}$ jest *permutacją* $\mathbb{N}_{n_0}$ wtw p jest „na" i „1–1"[36)] .

Problem. *Jaki jest związek* $\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_n$ *z* $\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_{p(n)}$ *(istnienia sum, ich wartości)?*

◇ Przemienność dla zbieżności bezwzględnej

Zacznijmy od twierdzenia „pozytywnego".

Twierdzenie III.6 (o przemienności szeregów bezwzględnie zbieżnych). *Jeżeli* $\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny, to przy dowolnej permutacji* p *zbioru* $\mathbb{N}_{n_0}$ *dla sum szeregów zachodzi*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_n=\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_{p(n)}.$$

B.D.

Okazuje się, że założenie o bezwzględnej zbieżności jest tu bardzo istotne — wręcz niezbędne, o ile obracamy się w kręgu szeregów zbieżnych.

◇ Zbieżność warunkowa, a brak przemienności

Prawdziwy jest poniższy, dość zaskakujący na pierwszy rzut oka wynik.

Twierdzenie III.7 (Riemanna). *Załóżmy, że* $\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_n$ *jest zbieżny warunkowo. Wówczas dla dowolnego* $G\in\overline{\mathbb{R}}$ *istnieje taka permutacja* p *zbioru* $\mathbb{N}_{n_0}$*, że*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_{p(n)}=G.$$

Istnieje także taka permutacja, że $\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_{p(n)}$ *nie posiada sumy.* **B.D.**

Podobne „kłopoty" mogą pojawiać się także dla własności innych niż przemienność. Np. dla grupowania wyrazów poprzez „dopisywanie nawiasów", co wiąże się z własnością łączności dodawania (patrz — zadania do tego rozdziału).

[36)] Podobnie definiuje się permutację w przypadku zbiorów skończonych zamiast $\mathbb{N}_{n_0}$. Oczywiście napis „1–1" nie oznacza tu liczby 0 lecz **różnowartościowość** funkcji p (patrz np. rozdział IV).

6. Mnożenie szeregów

◇ Iloczyn Cauchy'ego

Jak mnożyć szeregi? Właściwie — wiadomo: skoro szereg to po prostu ciąg sum częściowych, to można zwyczajnie brać iloczyn ciągów sum częściowych. Jednak tak określone działanie w zbiorze szeregów nie jest zbyt interesujące i nie ma zbyt istotnych zastosowań. Zamiast powyższego „zwykłego" iloczynu szeregów zdefiniujemy inne — dość popularne działanie zwane *iloczynem Cauchy'ego*. Zrobimy to tylko dla szeregów o indeksie początkowym $n_0 = 0$. Iloczyn Cauchy'ego będziemy tu oznaczać symbolem $\odot$ (raczej niespotykanym gdzie indziej...).

Definicja. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \odot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, *gdzie*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

dla $n \in \mathbb{N}_0$.

Łatwo sprawdzić, że $\odot$ posiada sporo właściwości analogicznych do własności zwykłego iloczynu dla liczb rzeczywistych, takich jak np. łączność, czy przemienność.

◇ Wyniki o zbieżności iloczynu Cauchy'ego

Nas przede wszystkim interesować będzie związek pomiędzy mnożeniem szeregów a ich sumami.

Sformułujemy bez dowodu następujące twierdzenie dotyczące tej kwestii.

Twierdzenie III.8 (tw. Mertensa + tw. Cesaro[37]). *Rozważmy dwa zbieżne szeregi takie, że* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$ *i niech* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \odot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. *Wówczas, jeżeli zachodzi* ***któryś*** *z poniższych warunków:*

1. *(Mertens) przynajmniej jeden z szeregów* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *jest bezwzględnie zbieżny,*

2. *(Cesaro)* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ *posiada granicę,*

to

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = A \cdot B.$$

◇ Funkcje exp, sin, cos

Określimy funkcję $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Nietrudno zauważyć, że powyższy szereg jest bezwzględnie zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Ponadto można też wykazać (polecam jako zadanie „rachunkowe"), że

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \odot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \text{ [38]}.$$

W takim razie, dzięki twierdzeniu Mertensa prawdziwy jest

[37] ściślej — to tylko wniosek z tw. Cesaro zwany też twierdzeniem Abela.

[38] Uwaga: tu każdy z trzech symboli „$\sum$ ..." ma oznaczać szereg, w odróżnieniu od „$\sum$ ..." w definicji exp, gdzie oznacza on sumę odpowiedniego szeregu.

Fakt 1. $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ \exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$.

W przyszłości okaże się, że $\exp(x)$ to to samo co e^x, jednak na razie brak nam jeszcze narzędzi, by to wykazać.

Teraz kolej na *funkcje trygonometryczne:* sin i cos. Definiujemy je tak:

$$\sin(x):=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos(x):=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad \text{dla } x\in\mathbb{R}.$$

I znów dzięki twierdzeniu Mertensa, rozumując jak wyżej, można wykazać

Fakt 2. *Dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi:*

1. $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$;
2. $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$;
3. $(\sin(x))^2+(\cos(x))^2=1$.

B.D.

Zadania do Rozdziału III

1. Wykaż, że każdy ciąg liczbowy jest szeregiem (fakt ze str. 40).

2. Znajdź sumy poniższych szeregów:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   (b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$

   $\forall$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n+(-1)^n)^2}{11^n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{17^n}$ (najpierw wyprowadź wzór na wyraz S_n ciągu sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$ dla $q \neq 1$, zapisując S_{n+1} przy pomocy S_n na dwa istotnie różne sposoby).

$\forall$ [39] 3. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność poniższych szeregów:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-3}{n^4+3n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-3}{n^3+3n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n+3^n}{3^n-2^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n^2+3n+1}{\sqrt{n^7-1}}$

   (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{10000}}{(1,000001)^n}$

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{5}-1)$

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$

   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)\cdot(-1)^n$

   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{3}-1)^\alpha$ w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$

   (j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

   (k) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}}{n+3}$

   (l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

4. Korzystając z wiedzy z GAL–u: postaci trygonometrycznej liczby zespolonej i jej n–tej potęgi (wzór de Moivre'a) oraz ze wzoru na $\sum_{k=0}^{n} z^k$ [40], wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ jest zbieżny przy dowolnym $x \in \mathbb{R}$.

5. Wykaż, że jeżeli $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest ściśle malejący i $a_n \to 0$, to $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n > 0$.

6. Wykaż, że $\cos(2) < 0$.

7. Wykaż, że jeżeli zachodzi któryś z warunków:

   (a) $\{na_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony

   (b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \geqslant 0$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny,

   to $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$ jest zbieżny. Czy założenie o nieujemności w b) jest istotne?

---

[39] Przynajmniej 3 szt. spośród a)–e) i 3 szt. spośród pozostałych.

[40] Patrz zadanie 1.

8. Czy suma szeregów rozbieżnych jest zawsze szeregiem rozbieżnym?

9. Wykaż, że jeżeli $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest malejący oraz $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $na_n \to 0$. Czy założenie, że ciąg jest malejący jest istotne?

10. Czy prawdziwe jest następujące „twierdzenie o trzech szeregach":
Jeżeli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla $n \geqslant n_0$ oraz szeregi $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ są zbieżne, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny?

11. Wykaż, że jeżeli $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $|\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$.

12. Wykaż „twierdzenie o reszcie szeregu zbieżnego":
Jeżeli $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ |\sum_{n=N}^{+\infty} a_n| < \epsilon$.

13. Wykaż „lemat o zagęszczaniu" (patrz str. 42).

14. Udowodnij następujące „drugie kryterium porównawcze": *Jeżeli ciągi a, b o wyrazach dodatnich spełniają $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ d.d.d. n oraz $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest też zbieżny.*

15. Wykaż, że w kryterium „asymptotycznym" (kryterium III.2) nie można zrezygnować z założenia o stałym znaku (od pewnego miejsca).

16. Znajdź przykład takiego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i $g \in \mathbb{R}$, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n > 0$, $\sqrt[n]{n} \to g$, ale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \not\to g$.

17. Wykaż, że jeżeli $\sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k$ jest bezwzględnie zbieżny, $\sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k = g$ oraz liczby $c_{k,n}$ określone dla dowolnych $k \geqslant k_0$, $n \geqslant n_0$ spełniają:

    (a) $\exists_{M>0}\ \forall_{k\geqslant k_0, n\geqslant n_0}\ |c_{k,n}| \leqslant M$,

    (b) $\forall_{k\geqslant k_0}\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_{k,n} = 1$,

    to ciąg określony wzorem $L_n := \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k c_{k,n}$ $(n \geqslant n_0)$ jest zbieżny do g („dyskretna" wersja tw. Lebesgue'a o zbieżności majoryzowalnej).

18. Korzystając z zadania 17 wykaż, że $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ (gdzie e to zdefiniowana w rozdziale II liczba równa $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$).

19. Przy użyciu kryterium Dirichleta (kryterium III.5) udowodnij poniższe kryterium Abela:
Jeżeli $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest monotoniczny od pewnego miejsca i jest ograniczony oraz $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

    Poniższe dwa zadania dotyczą dwóch sposobów grupowania wyrazów szeregu.

20. (a) Wykaż, że jeżeli $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$ są zbieżne, to zbieżny jest także $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

    (b) Czy zachodzi odwrotna implikacja?

    (c) Sformułuj i wykaż uogólnienie twierdzenia z punktu a) takie, by obejmowało ono możliwie ogólne rozkłady zbioru indeksów na dwa podzbiory.

$\forall$ [41] 21. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ będzie ciągiem liczbowym, $\{p_n\}_{n\geqslant 1}$ niech będzie ściśle rosnącym ciągiem indeksów z $\mathbb{N}_{n_0}$ takim, że $p_1 = n_0$ (p_n będziemy interpretować jako „początek n–tej grupy" przy grupowaniu[42] wyrazów szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$). Niech

$$A_n := \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $G \in \overline{\mathbb{R}}$. Wykaż, że

(a) $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = G \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} A_n = G$,

(b) może nie zachodzić „$\Leftarrow$" powyżej,

(c) „$\Leftarrow$" powyżej zachodzi, o ile zachodzi **któreś** z poniższych założeń:

i. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p_{n+1} - p_n = 2$ oraz $a_n \to 0$,

ii. $\{p_{n+1} - p_n\}_{n\geqslant 1}$ jest stały oraz $a_n \to 0$,

iii. $\{p_{n+1} - p_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony oraz $a_n \to 0$,

iv. dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wszystkie liczby w zbiorze $\{a_k\colon p_n \leqslant k \leqslant p_{n+1} - 1\}$ mają ten sam znak (tj. wszystkie są $\geqslant 0$ lub wszystkie są $\leqslant 0$; ale ten znak może zależeć od n),

v. szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ posiada granicę.

$\forall$ 22. Zbadaj zbieżność szeregów

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^{n+1}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$.

23. Udowodnij twierdzenie o przemienności szeregu bezwzględnie zbieżnego (tw. III.6, dowód pominięty na wykładzie).

24. Wykaż, że jeśli $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n \geqslant 0$ oraz p jest permutacją $\mathbb{N}_{n_0}$, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{p(n)}$ (niezależnie od tego, czy zachodzi zbieżność, czy nie).

25. Zbadaj, czy iloczyn Cauchy'ego $\odot$ jest operacją: przemienną, łączną. Jakie są szeregi neutralne dla $\odot$? Jakie szeregi posiadają elementy odwrotne względem $\odot$?

26. Znajdź wzór opisujący zwykły iloczyn $\cdot$ szeregów $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ (tzn. działanie „$\cdot$" jest takie, że $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)\cdot(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n$, gdzie $\sum_{k=0}^{n} d_n = (\sum_{k=0}^{n} a_n)(\sum_{k=0}^{n} b_n)$ przy dowolnym $n \in \mathbb{N}_0$).

27. Wykaż, że iloczyn Cauchy'ego szeregów bezwzględnie zbieżnych jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym.

$\forall$ 28. Wypisz szczegółowe dowody (pominięte na wykładzie) dla formuł „algebraicznych" dotyczących iloczynów Cauchy'ego odpowiednich szeregów potrzebnych przy dowodach **przynajmniej jednej** spośród poniższych formuł (patrz fakty 1 i 2 ze str. 49):

(a) $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$,

[41] Przynajmniej z punktem c) w wersji (i).

[42] Opisywany tu rodzaj grupowania nazywany bywa *rozstawianiem* (albo *dopisywaniem*) *nawiasów*.

(b) $\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$,

(c) $\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$,

(d) $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.

29. Wykaż, że $\forall_{x \in \mathbb{R}} \ \exp(x) > 0$. (Wskazówka: użyj wzoru z zad. 28 (a).)

IV Granica i ciągłość funkcji

[około 3 wykładów]

1. Granica funkcji

⋄ Punkty skupienia

Pojęcie granicy ciągu wprowadzone w rozdziale II rozszerzymy na znacznie ogólniejsze sytuacje. To uogólnienie pójdzie w dwóch kierunkach. Po pierwsze, będziemy rozważać szerszą klasę funkcji niż tylko ciągi. Po drugie, granica będzie mogła być rozważana nie tylko „w $+\infty$", ale także „w innych punktach". Dla funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie dziedzina D funkcji f jest podzbiorem $\mathbb{R}$, granicę będziemy mogli rozważać jedynie w takich punktach z $\overline{\mathbb{R}}$, które są tzw. *punktami skupienia* D.

Definicja. *Niech $a \in \overline{\mathbb{R}}, D \subset \mathbb{R}$. Wówczas a jest* ***punktem skupienia*** *D (będziemy to skracać: p.s.) wtw istnieje ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ w. $D \setminus \{a\}$* [43] *taki, że $x_n \to a$.*

Rozważane przez nas funkcje będą określone najczęściej na dziedzinach będących pewnymi przedziałami[44]. Wtedy oczywiście sprawa jest prosta: a jest punktem skupienia przedziału niezerowej długości wtw a należy do tego przedziału, bądź jest jego prawym lub lewym końcem (niezależnie od tego, czy te końce do przedziału należą, czy nie). Ale np. zbiór skończony nie ma punktów skupienia, $\mathbb{N}_{n_0}$ ma tylko $+\infty$, dla $\{0\} \cup [1; 2)$ zbiorem punktów skupienia jest $[1; 2]$, a dla $\mathbb{R}$ zbiorem tym jest $\overline{\mathbb{R}}$.

⋄ Definicja Heinego granicy

Przejdźmy zatem do samej definicji granicy funkcji.

Definicja (Heinego). *Niech $f : D \to \mathbb{R}$, a — p.s. D oraz niech $g \in \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas g jest* ***granicą*** *f* ***w punkcie*** *a wtw dla dowolnego $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ w. $D\setminus\{a\}$ takiego, że $x_n \to a$ zachodzi*

$$f(x_n) \to g.$$

Granicę tę oznaczamy przez

$$\lim_{x\to a} f(x),$$

ponadto fakt, że g jest granicą f w punkcje a oznaczamy także przez

$$\lim_{x\to a} f(x) = g \quad \textit{lub} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} g$$

(ewentualnie $f(x) \to g$, gdy a jest jedynym p.s. D).

Oczywiście (jak wynika z faktu 1 ze str. 26), jeśli istnieje granica f w punkcie a, to jest ona wyznaczona jednoznacznie.

Przykłady (bardzo proste). Niech $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą zadane dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ wzorami

$$f(x) = c, \quad g(x) = \begin{cases} c & \text{dla } x \neq 0 \\ d & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \quad h(x) = x,$$

gdzie c, d — ustalone liczby. Wówczas dla dowolnego $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mamy oczywiście

$$\lim_{x\to a} f(x) = c = \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_{x\to a} h(x) = a.$$

---

[43] Będziemy używać skrótu: $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ w. X, który oznacza, że $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest ciągiem o **w**yrazach w zbiorze X (tzn. funkcją z $\mathbb{N}_{n_0}$ w X). Inaczej: w. = „o wyrazach w".

[44] Patrz str. 62.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że wybór liczby d nie miał w powyższym przykładzie **żadnego** wpływu na wartość $\lim_{x\to a} g(x)$ nawet wtedy, gdy $a = 0$. Ogólnie bowiem, jak widać natychmiast z definicji granicy, wybór wartości $f(a)$ (gdy $a \in D$, co ogólnie nie musi wcale zachodzić) nie wpływa ani na fakt istnienia granicy f w punkcie, ani na jej wartość.

Poniższa uwaga wyjaśnia sprawę ewentualnej niejednoznaczności pojęcia granicy w przypadku ciągu, który przecież także jest funkcją...

Uwaga. Jeżeli $f : \mathbb{N}_{n_0} \to \mathbb{R}$, to pojęcie granicy funkcji f w $+\infty$ pokrywa się z pojęciem granicy ciągu $f = \{f(n)\}_{n\geqslant n_0}$ z rozdziału II (zatem nie ma też kolizji oznaczeń „lim" i „$\to$").

By tę uwagę wykazać wystarczy skorzystać z twierdzenia o granicy uogólnionego podciągu (twierdzenie II.5).

◇ Kłopoty z notacją

Notacja związana z pojęciem granicy funkcji może jednak sprawiać pewne kłopoty. Związane jest to z faktem, że granica, o ile istnieje, jest jednoznacznie wyznaczona przez funkcję oraz punkt „w którym granica jest rozważana". Zatem optymalnym oznaczeniem byłoby np. „$\lim_a f$" w miejsce tradycyjnego „$\lim_{x\to a} f(x)$". A tradycyjny zapis, przez to, że pojawia się tam nie samo f, ale „jakieś $f(x)$", w naturalny sposób zachęca do zastępowania owego „$f(x)$" konkretnym wzorem, którym funkcja może być zadana. Ale co oznacza np. napis:

$$\lim_{m\to+\infty}(m - [m])\,?$$

Czy chodzi tu o granicę ciągu? Wtedy jest to ciąg zerowy i granica równa 0. Ale może chodzi o granicę funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(m) = m - [m]$ da dowolnego $m \in \mathbb{R}$? A ta „niestety" nie istnieje! (dlaczego?). Problem polega więc na tym, że podany jest wzór, zamiast funkcji. Wiemy więc tylko, jakim wzorem funkcja ta jest zadana, ale nie wiemy na jakiej dziedzinie. Aby zbytnio nie odchodzić od tradycyjnej notacji, możemy w takich wieloznacznych sytuacjach pisać:

$$\lim_{x\to a,\, x\in D} \mathit{wzór}(x).$$

Jednak tak będziemy postępować tylko sporadycznie. Raczej będziemy liczyli na to, że znaczenie tego typu symbolu będzie jasne z kontekstu jego użycia. Jednocześnie będziemy się starali sprawę wyboru pomiędzy ciągiem a „nieciągiem" rozstrzygnąć poprzez użycie odpowiedniej zmiennej: dla ciągu będziemy raczej rezerwować litery: n, m, k, a dla innych funkcji: x, y, z. Choć dla „nieciągu" wybór dziedziny pozostaje nieraz wystarczająco duży by niejednoznaczność nadal miała miejsce. Np. w powyższym przykładzie zupełnie co innego uzyskujemy dla dwóch różnych dziedzin $D_2 := \{\frac{1}{2} + n : n \in \mathbb{N}\}$, $D_3 := \{\frac{1}{3} + n : n \in \mathbb{N}\}$.

◇ O definicji Cauchy'ego granicy

Przyjęta przez nas definicja granicy funkcji odwołuje się do zdefiniowanej już wcześniej granicy ciągu. Jednak nie było to konieczne, można było użyć tzw. definicji Cauchy'ego — pewnego warunku nie odwołującego się wcale do ciągów, równoważnego warunkowi z definicji Heinego.

Twierdzenie IV.1. *Niech $f : D \to \mathbb{R}$, a — p.s. D, $g \in \overline{\mathbb{R}}$. Następujące trzy warunki są równoważne:*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = g$

(ii) *dla dowolnego ściśle monotonicznego $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ w $D \setminus \{a\}$ takiego, że $x_n \to a$ zachodzi $f(x_n) \to g$.*

(iii) *(„definicja" Cauchy'ego)*
przypadek 1. — dla $a, g \in \mathbb{R}$:

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D\setminus\{a\}}\ (|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\epsilon)$$

przypadek 2. — dla $a \in \mathbb{R}, g = +\infty$:

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D\setminus\{a\}}\ (|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M)$$

przypadek 3. — dla $a = -\infty, g \in \mathbb{R}$:

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in D}\ (x<M \Rightarrow |f(x)-g|<\epsilon)$$

... itd. — w sumie należałoby wypisać 9 przypadków obejmujących wszystkie możliwości dla par a, g będących (niezależnie) w $\mathbb{R}$ lub $+\infty$ lub $-\infty$. Liczę, że na podstawie tych trzech przypadków, każdy z Czytelników będzie w stanie wypisać dowolny z pominiętych.

Dowód tego twierdzenia najłatwiej przeprowadzić dowodząc implikacji $(ii) \Rightarrow (iii)$ oraz $(iii) \Rightarrow (i)$, co dzięki oczywistości $(i) \Rightarrow (ii)$ da potrzebne równoważności. Szczegóły dowodu pomijam i zostawiam jako zadanie.

◇ Rachunkowe własności granicy funkcji

Odpowiednikiem twierdzenia o rachunkowych własnościach granicy ciągu (tw. II.1) jest twierdzenie poniższe:

Twierdzenie IV.2 (o rachunkowych własnościach granicy funkcji). *Niech $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$, a — p.s. D oraz niech $\circledast$ oznacza jedno z działań $+, -, \cdot, :$. Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to a} f_j(x) = g_j$ dla $j = 1, 2$, gdzie $g_1, g_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ i że działanie $g_1 \circledast g_2$ jest określone oraz, w przypadku gdy $\circledast$ jest dzieleniem, że $\forall_{x\in D}\ f_2(x) \neq 0$. Wówczas $\lim\limits_{x\to a}(f_1 \circledast f_2)(x) = g_1 \circledast g_2$.*

Dla porządku należy jeszcze wyjaśnić, że działanie $\circledast$ „na funkcjach" określone jest naturalnym wzorem $(f_1 \circledast f_2)(x) := f_1(x) \circledast f_2(x)$ dla $x \in D$.

Dowód.
Wystarczy użyć definicji Heinego granicy i twierdzenia II.1. □

W powyższym twierdzeniu nie wspomnieliśmy o jeszcze jednej ważnej operacji dla funkcji, a mianowicie o *złożeniu funkcji* oznaczanym przy pomocy symbolu $\circ$. Przypominamy, że jeżeli $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, to $g \circ f : X \to Z$ zadana jest wzorem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

dla dowolnego $x \in X$. Odpowiednie twierdzenie „o granicy złożenia" (zwane też twierdzeniem „o podstawianiu") ma treść nietrudną do odgadnięcia, choć (uwaga!) pojawia się tam pewien „haczyk". Sprawy związane z tym twierdzeniem można odnaleźć w zadaniach do rozdziału IV. Warto tu wspomnieć, że samo twierdzenie można traktować jako uogólnienie twierdzenia II.5 (o granicy uogólnionego podciągu).

◇ Obcinanie i scalanie

Operacją nieco przypominającą branie podciągu danego ciągu jest w ogólnym przypadku funkcji operacja *obcięcia* [45] Przypomnijmy, że *obcięcie funkcji* $f : X \to Y$ *do zbioru* $X' \subset X$ oznaczamy symbolem $f|_{X'}$ oraz że $f|_{X'}: X' \to Y$, przy czym dla $x \in X'$ po prostu

$$(f|_{X'})(x) := f(x).$$

Za analog (choć nie uogólnienie) twierdzenia „o granicy podciągu" można by więc uznać fakt następujący, całkiem oczywisty z definicji granicy.

Fakt. *Niech* $f : D \to \mathbb{R}$, $D' \subset D$ *oraz* a *— p.s.* D'. *Jeżeli* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$, *to* $\lim\limits_{x\to a}(f|_{D'})(x) = g$. [46]

Znacznie jednak ważniejsze jest następujące wzmocnienie powyższego faktu.

Twierdzenie IV.3 (o „scalaniu" [47]). *Jeżeli* $f : D \to \mathbb{R}$, $D_1, D_2 \subset D$, a *— p.s.* D_1 *i* D_2 *oraz* $D \setminus \{a\} = (D_1 \cup D_2) \setminus \{a\}$, *to* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$ *wtw dla* $j = 1$ *i dla* $j = 2$ *zachodzi* $\lim\limits_{x\to a}(f|_{D_j})(x) = g$.

Dowód.
Oczywisty, jeśli użyć definicji Cauchy'ego (tzn. tw. IV.1)... □

◇ Granice jednostronne

Oprócz zdefiniowanego już pojęcia granicy funkcji rozważa się także tzw. *granice jednostronne funkcji.* Można je zdefiniować powtarzając z odpowiednimi modyfikacjami definicję dla „zwykłej" granicy, albo któryś z warunków jej równoważnych z twierdzenia IV.1. My jednak postąpimy inaczej. Dla $D \subset \mathbb{R}$ oraz $a \in \overline{\mathbb{R}}$ oznaczmy

$$D^a_{+(-)} := \{x \in D : x > (<) a\}$$

(dla $a = 0$ upraszczamy to do D_+, D_-). Inaczej mówiąc, D^a_+ to część zbioru D położona na prawo od punktu a, a D^a_- — na lewo od a. W szczególności $D^{+\infty}_+ = D^{-\infty}_- = \emptyset$, $D^{+\infty}_- = D^{-\infty}_+ = D$ oraz $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty; 0)$.

Definicja. *Niech* $f : D \to \mathbb{R}$, *oraz* a *— p.s.* $D^a_{+(-)}$. *Jeżeli istnieje* $\lim\limits_{x\to a}(f|_{D^a_{+(-)}})(x)$, *to nazywamy ją* ***granicą prawostronną (lewostronną)*** f *w punkcie* a *i oznaczamy*

$$\lim_{x\to a+(-)} f(x).$$

Obie nazywamy ***granicami jednostronnymi*** f *w punkcie* a.

A zatem granice jednostronne to szczególne przypadki zdefiniowanej na początku rozdziału granicy funkcji, tyle, że rozważanej na ewentualnie zmniejszonej dziedzinie. Nie ma zatem potrzeby dowodzenia osobnych analogów „jednostronnych" wszystkich formułowanych wcześniej lub dopiero w przyszłości twierdzeń dot. „zwykłych" granic. Po prostu należy te „zwykłe" twierdzenia zastosować do funkcji obciętych do odpowiednich zbiorów D^a_+ lub D^a_-. Szczególnym przypadkiem twierdzenia o „scalaniu" jest

Wniosek. *Jeżeli* $f : D \to \mathbb{R}$ *oraz* a *— p.s.* D^a_+ *i* D^a_-, *to* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$ *wtw* $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = g = \lim\limits_{a\to a-} f(x)$.

---

[45] Nie ma tu pełnej analogii — np. przy braniu podciągu dziedzina nie zmienia się, przy obcinaniu — owszem.

[46] Zgodnie z wcześniejszym ustaleniem moglibyśmy pisać $\lim\limits_{x\to a,\, x\in D'} f(x)$ zamiast $\lim\limits_{x\to a}(f|_{D'})(x)$.

[47] Nazwę tę zapożyczyłem od pana Michała Krycha (patrz też zadanie 13).

$\diamond$ „Dostatecznie bliskie”

W przypadku, gdy posługiwaliśmy się „zmienną całkowitą n” często używaliśmy skrótu d.d.d. n. Jak to przenieść na przypadek ogólniejszy ”zmiennej x ze zbioru D” i punktu skupienia a zbioru D? Zrobimy to następująco. Termin: *dla $x \in D$ dostatecznie bliskich a* (w skrócie zapiszemy: d. $x \in D$ d.b. a) będzie odtąd tym samym co:

- $\exists_{\delta>0} \ \forall_{x\in D,\, 0<|x-a|<\delta}$, gdy $a \in \mathbb{R}$,
- $\exists_{M\in\mathbb{R}} \ \forall_{x\in D,\, x>(<)M}$, gdy $a = +\infty \ (-\infty)$.

Dopuszczamy tu jednak dowolność szyku zdania, podczas gdy w wersji z kwantyfikatorami, kwantyfikatory muszą być zawsze na początku zdania.

$\diamond$ Inne ważne analogie z teorią ciągów

Jak widzieliśmy np. w przypadku twierdzenia IV.2 (o rachunkowych własnościach granicy funkcji), twierdzenia dotyczące granic ciągów miewają nierzadko swe naturalne uogólnienia obowiązujące dla granic funkcji. Tak jest również w przypadku kilku innych twierdzeń z rozdziału II.

Na użytek poniższych twierdzeń przyjmujemy, że $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a — p.s. D, $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ oraz $c, d \in \overline{\mathbb{R}}$.

Twierdzenie IV.4 (o trzech (ew. dwóch) funkcjach). *Jeżeli*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

d. $x \in D$ d.b. a oraz

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = c,$$

to $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Gdy $c = +\infty \ (-\infty)$, to założenia dotyczące funkcji h (funkcji f) można pominąć.

Twierdzenie IV.5 (o zachowaniu nierówności przy przejściu granicznym). *Jeśli $f(x) \leqslant g(x)$ d. $x \in D$ d.b. a oraz $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d$, to $c \leqslant d$.*

Twierdzenie IV.6 (o warunku Cauchy'ego dla funkcji). *Funkcja f posiada skończoną*[48] *granicę w a wtw*

- $\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x,y\in D\setminus\{a\}} \ (|x-a|, |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$, *gdy $a \in \mathbb{R}$;*
- $\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{M\in\mathbb{R}} \ \forall_{x,y\in D\setminus\{a\}} \ (x, y > (<)M \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$, *gdy $a = +\infty \ (-\infty)$.*

Uwaga! Proszę nie mylić warunku Cauchy'ego dla funkcji z „definicją” Cauchy'ego granicy funkcji z twierdzenia IV.1.

Fakcik. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ *wtw* $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Twierdzenie IV.7 (o granicach jednostronnych funkcji monotonicznej). *Jeżeli f jest monotoniczna oraz a — p.s. D^a_+ (D^a_-), to istnieje prawostronna (lewostronna) granica f w punkcie a.*

Dowody.
Powyższe twierdzenia sprowadzają się do odpowiednich twierdzeń z rozdziału II. Dla twierdzeń IV.4, IV.5 i fakciku jest to całkiem proste. W przypadku twierdzenia IV.6 do implikacji „$\Rightarrow$” łatwo użyć po prostu twierdzenia IV.1 (definicji Cauchy'ego). Natomiast przy dowodzie „$\Leftarrow$”,

[48] Tzn. rzeczywistą (należącą do $\mathbb{R}$).

używając twierdzenia II.7 (o zupełności $\mathbb{R}$) łatwo możemy wykazać, że dla dowolnego $\{x_n\}$ w. $D \setminus \{a\}$ takiego, że $x_n \to a$, ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny. Pozostaje wykazać, że granica $\{f(x_n)\}$ jest taka sama dla wszystkich rozważanych $\{x_n\}$. Jak to wykazać? — pozostawiam to Państwu ... (nietrudne!). Dla dowodu twierdzenia IV.7 można najpierw skorzystać z warunku „równoważnego" (ii) z twierdzenia IV.1, dzięki czemu będziemy mieli do czynienia jedynie z ciągami $\{f(x_n)\}$, które sa monotoniczne (dlaczego?). Gdy zatem skorzystamy z twierdzenia II.4 (o granicy ciągu monotonicznego), do zakończenia dowodu pozostanie rozwiązanie podobnego, choć już trochę trudniejszego problemu, co przy dowodzie twierdzenia IV.6. $\square$

◇ Kilka ważnych granic

Na zakończenie podrozdziału dotyczącego granicy funkcji podamy przykłady kilku ważnych granic funkcji. Wykazanie części z podanych tu równości będzie zadaniem dla Państwa (m. in. na ćwiczenia).

Przykłady.

1. $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. Nie chodzi tu oczywiście o granicę ciągu o wyrazach $(1+\frac{1}{n})^n$ znanego Państwu z rozdziału II, ale o granicę funkcji określonej np. na $\mathbb{R}_+$. Jednak dość łatwo wykazać powyższą równość, korzystając właśnie z tego, że e jest granicą powyższego ciągu.

2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{c^x} = 0$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$, $c > 1$. Tu, podobnie jak w poprzednim przykładzie, można wykorzystać zbieżność odpowiedniego ciągu. Oczywiście chodzi tu o $\frac{n^\alpha}{c^n} \to 0$ (str. 29). Pomocne będą też informacje o monotoniczności funkcji wykładniczej i potęgowej (patrz wniosek str. 21).

3. $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ dla $a > 0$. To oczywiście uogólnienie znanego nam faktu: $\sqrt[n]{a} \to 1$ (patrz przykład e) strona 29). Dzięki twierdzeniu IV.7 wiemy, że istnieją granice jednostronne w punkcie 0 — oznaczmy je odpowiednio: g_-, g_+. Zatem z definicji granicy funkcji mamy $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to g_+$, skąd $g_+ = 1$ oraz $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{n}} \to g_-$, czyli $g_+ = g_- = 1$. Zatem z wniosku ze strony 57 uzyskujemy potrzebną równość.

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

7. $\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Ten ostatni przykład można uzyskać z przykładu 4. — a jak? To zostawiam Państwu jako ćwiczenie do zrobienia już po przejściu przez definicję logarytmu (patrz też zadanie 3).

Równości z przykładów 4, 5 i 6 zostaną wkrótce wyjaśnione w oparciu o tzw. *szeregi potęgowe*.

2. Ciągłość funkcji w punkcie

⋄ Definicje Heinego i Cauchy'ego

Niech $f : D \to \mathbb{R}$ i niech $a \in D \subset \mathbb{R}$.

Definicja (Heinego). *Funkcja f **jest ciągła w (punkcie)** a wtw dla dowolnego $\{x_n\}$ w. D takiego, że $x_n \to a$ zachodzi $f(x_n) \to f(a)$.*

Zauważmy, że ta definicja bardzo przypomina definicję (Heinego) granicy. Ale istotne różnice są takie: tu zamiast granicy g jest $f(a)$ oraz tu $a \in D$, ale za to a nie musi koniecznie być punktem skupienia D. Ponadto może tu zachodzić $x_n = a$ dla pewnych n.

Czasami używa się alternatywnej definicji — tzw. definicji Cauchy'ego, która z kolei przypomina „definicję" Cauchy'ego granicy funkcji (patrz tw. IV.1 war. (iii)). Skoro jednak my zdecydowaliśmy się na definicję ciągłości w wersji Heinego, ta alternatywna definicja będzie dla nas już twierdzeniem.

Twierdzenie IV.8. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest ciągła w a,*

(ii) *jeżeli a — p.s. D, to $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$,*

(iii) *(„definicja" Cauchy'ego)*

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in D}\ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Dowód.
$(i) \Rightarrow (ii)$ wynika natychmiast z obu definicji (Heinego) dla ciągłości i dla granicy. $(iii) \Rightarrow (i)$ — to z kolei bardzo łatwo wykazać z definicji granicy ciągu (proszę to zrobić samodzielnie...). Wystarczy więc wykazać, że $(ii) \Rightarrow (iii)$. Załóżmy więc (ii). Jeżeli a — p.s. D, to (iii) wynika bezpośrednio z twierdzenia IV.1 (patrz przypadek 1 w (iii)). Jeżeli a — nie jest p.s. D, to istnieje takie $\delta > 0$, że w przedziale $(a-\delta; a+\delta)$ nie ma żadnego elementu zbioru D poza a. Stąd by wykazać (iii) wystarczy dobrać tę właśnie liczbę δ dla każdego $\epsilon > 0$. □

Wniosek. *Jeżeli $a \in D$, ale a nie jest p.s. D, to f jest ciągła w a.*

W szczególności np. dowolny ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest funkcją ciągłą w każdym z punktów $n \in \mathbb{N}_{n_0}$. Oczywiście jednak, tak naprawdę, ciągłość w punkcie jest interesująca wyłącznie dla tych punktów $a \in D$, które są p.s. dziedziny funkcji.

⋄ Ciągłość w punkcie i granice „nowych" ciągów

Informacja o tym, że jakaś funkcja f jest ciągła w punkcie a bywa bardzo wygodna. Każdy taki przypadek ciągłości pozwala nam bowiem sformułować następujący „fakcik", będący po prostu przeformułowaniem definicji ciągłości w punkcie:

$$(x_n \in D \textit{ d.d.d. } n \textit{ oraz } x_n \to a) \implies f(x_n) \to f(a).$$

A więc, inaczej mówiąc, w takiej sytuacji możemy „mechanicznie" obie strony symbolu $x_n \to a$ „obłożyć" funkcją f. To pozwala nam na poważne rozszerzenie zasobu ciągów, dla których będziemy w stanie znaleźć granicę. Jednak pod jednym warunkiem — musimy znać jakieś funkcje ciągłe w pewnych punktach. I to możliwie dużo ... Tą ważną sprawą zajmiemy się w następnych podrozdziałach.

⋄ Funkcja „wszędzie nieciągła"

Teraz natomiast przykład całkiem negatywny ...

Przykład (funkcja Dirichleta). Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana będzie wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Łatwo dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ skonstruować dwa ciągi: $\{x_n\}$ — o wyrazach wymiernych i $\{x'_n\}$ — o wyrazach niewymiernych takie, że $x_n, x'_n \to a$ (patrz zadanie 18). Ponieważ

$$1 \equiv f(x_n) \to 1 \neq 0 \leftarrow f(x'_n) \equiv 0$$

zatem w każdym punkcie $a \in \mathbb{R}$ funkcja f jest nieciągła (tj. nie jest ciągła w a). Co więcej, dla każdego punktu a funkcja Dirichleta nie posiada w ogóle granicy w tym punkcie.

3. Funkcje ciągłe

⋄ Intuicje geometryczne i definicja

Zdefiniowaliśmy już ciągłość w punkcie. Teraz zajmiemy się ciągłością funkcji „w ogóle". Dość często, gdy mowa o funkcjach ciągłych, można usłyszeć następującą „intuicyjno–geometryczną definicję":

Funkcja ciągła to taka funkcja, której wykres można narysować bez odrywania ołówka.

Jeśli chodzi o intuicję związaną z ciągłością, to powyższe stwierdzenie bywa czasem użyteczne, choć nawet pomijając kwestię ścisłości, trudno uznać je za stwierdzenie prawdziwe. Istnieją bowiem tak dziwne funkcje ciągłe, których wykresu z pewnością nie dałoby się naszkicować nawet z grubsza... Tymczasem ścisła definicja jest taka:

Definicja. *Funkcja jest ciągła wtw jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.*

⋄ Operacje na funkcjach ciągłych

Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia o rachunkowych własnościach granicy funkcji (tw. IV.2) oraz z tw. IV.8 jest następujący wynik.

Fakt 1. *Suma, iloczyn, różnica i iloraz funkcji ciągłych (w przypadku ilorazu zakładamy, że funkcja przez którą dzielimy ma wszystkie wartości różne od* 0*) jest ciągła.*

Bezpośrednio z definicji ciągłości wynika natomiast „zamkniętość" klasy funkcji ciągłych na jeszcze jedną operację.

Fakt 2. *Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

Inną operacją na funkcjach „nie psującą" ciągłości jest np. obcinanie funkcji do mniejszej dziedziny.

Uwaga. Analogiczne fakty dotyczące ciągłości w ustalonym punkcie są oczywiście także prawdziwe (proszę sformułować samodzielnie, ze szczegółami, odpowiedni fakt dotyczący składania funkcji).

◇ Najprostsze funkcje ciągłe

Przykłady.

1. Wielomian to dowolna funkcja zadana wzorem
$$w(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
dla $x \in D \subset \mathbb{R}$. ($a_0, \ldots, a_n$ — ustalone liczby). Gdy $a_n \neq 0$ to n nazywa się *stopniem wielomianu* w. Ponieważ z definicji funkcja *identycznościowa* $\mathbb{x} : D \to \mathbb{R}$ (tzn., $\mathbb{x}(x) = x$ dla $x \in D$) jest oczywiście ciągła i podobnie funkcja stała, zatem z faktu 1 wynika ciągłość dowolnego wielomianu.

2. Funkcja wymierna to dowolny iloraz dwóch wielomianów zadanych na wspólnej dziedzinie D, na której wielomian z mianownika nie osiąga wartości 0. Z faktu 1 taka funkcja też jest ciągła.

3. Moduł: $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tzn. f taka, że $f(x) = |x|$ też jest funkcją ciągłą na mocy tw. IV.8 i nierówności
$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|,$$
wynikającej łatwo z nierówności trójkąta.

Inne przykłady funkcji ciągłych podamy już wkrótce.

◇ Trzy ważne własności funkcji ciągłych na $[a; b]$

Sformułujemy teraz kilka istotnych ogólnych twierdzeń opisujących własności funkcji ciągłych. Jednak najpierw wprowadźmy oznaczenie przedziałów o końcach a, b wygodne w sytuacji, gdy nie wiemy który z nich jest początkiem, a który końcem przedziału: dla $a, b \in \mathbb{R}$
$$(a?b) := \begin{cases} (a; b) \text{ gdy } a \leqslant b \\ (b; a) \text{ gdy } b < a \end{cases}$$
i analogicznie dla innego typu przedziałów: $[a?b)$, $[a?b]$ i $(a?b]$, np. $[1?0) = [0; 1)$.

Dowodami poniższych trzech twierdzeń zajmiemy się po sformułowaniu ostatniego z nich. We wszystkich zakładamy, że $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$.

Twierdzenie IV.9 (Bolzano o własności Darboux; o osiąganiu wartości pośrednich). *Jeżeli $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $y \in (f(a)?f(b))$, to istnieje $x \in (a; b)$ takie, że $f(x) = y$.*

Twierdzenie IV.10 (Weierstrassa; o osiąganiu kresów). *Jeżeli $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to istnieją $m; M \in [a; b]$ takie, że $f(m) = \inf f([a; b])$ oraz $f(M) = \sup f([a; b])$.*[49] *W szczególności f jest ograniczona.*

Z tw. IV.9 i IV.10 uzyskujemy natychmiast wniosek dotyczący „obrazu ciągłego" dowolnego przedziału. Sprecyzujmy tu, że $I \subset \mathbb{R}$ nazywamy *przedziałem* wtw
$$\forall_{a,b \in I}\ [a?b] \subset I.$$
Przedziałami są zatem np.: $\emptyset$, $\{7\}$, $\mathbb{R}$, $(143; +\infty)$. *Przedziałem domkniętym*[50] nazywamy zbiór postaci $[a; b]$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, a *przedziałem niezdegenerowanym* każdy przedział różny od

[49] Gdy $f : D \to X$ oraz $A \subset D$, to mimo iż A nie jest elementem D, tylko jego podzbiorem, oznaczamy $f(A) := \{f(a) \in X : a \in A\}$. Jest to powszechnie przyjęte nadużycie (albo tylko rozszerzenie...) notacji „$f(x)$". Zbiór $f(A)$ nazywamy *obrazem A* (*przy pomocy*, ew. *względem f*).

[50] Ta nazwa może stać się trochę myląca, gdy poznacie Państwo pojęcie zbioru domkniętego (w rozdziale VIII). Przedział domknięty **nie** jest bowiem tym samym, co przedział, który jest zbiorem domknietym...

$\emptyset$ i od przedziału jednopunktowego (postaci $\{x\}$). Proszę samodzielnie wykazać, że przedział niezdegenerowany musi być jednym ze znanych nam już wcześniej typów przedziałów (skończonych lub nie): otwartych, domkniętych, otwarto–domkniętych bądź domknięto–otwartych.

Wniosek. *Jeżeli I — przedział oraz $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $f(I)$ — przedział. Jeśli ponadto I — przedział domknięty, to $f(I)$ — także przedział domknięty.*

Dla celów kolejnego twierdzenia przyjmujemy następującą definicję.

Definicja. *Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest* ***jednostajnie ciągła*** *wtw*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in D}\ (|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon).$$

Powyższą definicję warto porównać ze zwykłym warunkiem ciągłości (czyli ciągłości w każdym punkcie $x \in D$), który na mocy „definicji" Cauchy'ego można zapisać równoważnie tak:

$$\forall_{x\in D}\ \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{y\in D}\ (|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon).$$

Różnica jest zrozumiała: w warunku na jednostajną ciągłość δ dobrać trzeba uniwersalnie dla wszystkich $x \in D$, w sposób zależny jedynie od ϵ, a w warunku ciągłości δ mogła być dobierana w sposób zależny i od ϵ i od x. Stąd „jednostajność" w nazwie („**jedno** wspólne δ dla wszystkich x"). W szczególności funkcja jednostajnie ciągła oczywiście jest też ciągła. Przykłady funkcji jednostajnie ciągłych to funkcja $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcja identycznościowa $\mathbb{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a także $f : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Natomiast $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, choć jest ciągła, ale jednostajnie ciągła nie jest (sprawdzenie tych własności f i g to zadania dla Państwa).

Wobec wcześniejszego wywodu „o wyższości ciągłości jednostajnej nad «zwykłą» ciągłością", następne twierdzenie może być pewnym zaskoczeniem...

Twierdzenie IV.11 (o jednostajnej ciągłości). *Jeżeli $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to f jest jednostajnie ciągła.*

Warto jednak zwrócić uwagę na to, że ten „zaskakujący" wynik dotyczy tylko funkcji określonych na przedziałach domkniętych — zdefiniowane przed chwilą nowe pojęcie nie jest więc zapewne całkiem niepotrzebne...

Dowody (tw. IV.9, IV.10, IV.11).
Głównym „chwytem" użytym w dowodzie każdego z tych trzech twierdzeń będzie twierdzenie Bolzano–Weierstrassa (tw. II.6). Zacznijmy od dowodu tw. IV.9. Przypuśćmy, że f nie osiąga wartości y. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i „podzielmy" przedział $[a;b]$ na n–części o równych długościach $d_n := \frac{b-a}{n}$ punktami $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$, tzn. $a_k := a + kd_n$ dla $k \in \{0, \ldots, n\}$. Wśród dwóch liczb $f(a_0)$, $f(a_n)$ jedna jest większa od y, a druga mniejsza od y — w takiej sytuacji mówimy, że liczby te są *po przeciwnych stronach* y. Zatem musi istnieć takie $k \leqslant n-1$, że liczby $f(a_k)$, $f(a_{k+1})$ są po przeciwnych stronach y (patrz rys. 4).

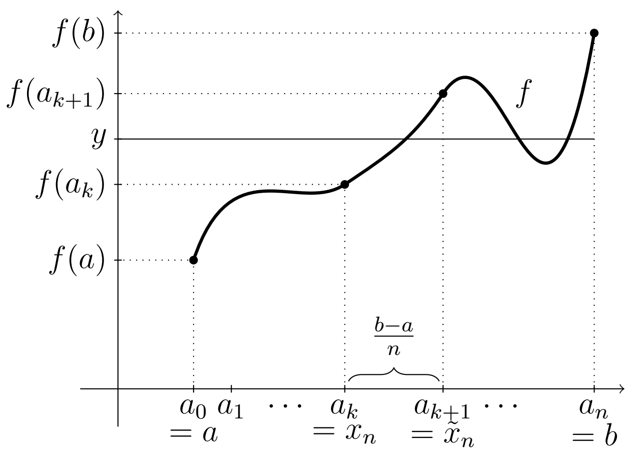
Oznaczmy przez x_n tę spośród liczb a_k, a_{k+1} dla której wartość f jest mniejsza niż y, a przez $\tilde{x}_n$ tę, dla której dla której wartość f jest większa od y. Tym sposobem określiliśmy dwa ciągi $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ i $\{\tilde{x}_n\}_{n\geqslant 1}$ o wyrazach w $[a;b]$ (więc ograniczone), które spełniają

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(x_n) < y < f(\tilde{x}_n), \tag{IV.1}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |x_n - \tilde{x}_n| = d_n. \tag{IV.2}$$

Korzystamy teraz z tw. Bolzano–Weierstrassa i wybieramy podciąg zbieżny $\{x_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$. Mamy zatem $x_{k_n} \to g$ dla pewnego $g \in \mathbb{R}$. Ponadto $g \in [a;b]$ na mocy tw. II.2. Ponieważ na mocy (IV.2) $x_n - \tilde{x}_n \to 0$, zatem mamy także $\tilde{x}_{k_n} \to g$. Dzięki ciągłości f mamy zatem

$$f(x_{k_n}) \to f(g), \qquad f(\tilde{x}_{k_n}) \to f(g),$$



Rysunek 4. Liczby $f(a_k)$, $f(a_{k+1})$ są po przeciwnych stronach y.

skąd na mocy (IV.1), stosując ponownie tw. II.2, dostajemy $f(g) \leqslant y \leqslant f(g)$, czyli $y = f(g)$, co jest sprzeczne z naszym założeniem.

Aby wykazać tw. IV.10 wystarczy dowód części dotyczącej „sup" (część dot. „inf" uzyskamy wtedy stosując część dot. „sup" do funkcji $-f$). Niech $c \in \overline{\mathbb{R}}$ będzie równe $\sup f([a;b])$. Istnieje zatem ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ w. $[a;b]$ taki, że $f(x_n) \to c$ (patrz np. zadanie 10). Wybierzmy podciąg $\{x_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ zbieżny, tzn. $x_{k_n} \to M$ dla pewnego $M \in [a;b]$. Stąd $f(x_{k_n}) \to f(M)$ i jednocześnie $f(x_{k_n}) \to c$ czyli $c = f(M)$.

Aby wykazać tw. IV.11 przypuśćmy, że jego teza jest fałszywa. A zatem niech $\epsilon > 0$ będzie takie, że dla dowolnego $\delta > 0$ istnieją $x, y \in [a;b]$ dla których zachodzi

$$|x - y| < \delta \text{ oraz } |f(x) - f(y)| \geqslant \epsilon.$$

W szczególności dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ możemy wybrać x_n, $y_n \in [a;b]$ takie, że (w powyższym bierzemy „$\delta = \frac{1}{n}$")

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \epsilon. \tag{IV.3}$$

Znów wybieramy zbieżny podciąg $\{x_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, tzn. $x_{k_n} \to g \in [a;b]$ i wówczas (analogicznie jak w dowodzie tw. IV.9) mamy też $y_{k_n} \to g$, a stąd $f(x_{k_n}) \to f(g) \leftarrow f(y_{k_n})$, czyli $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \to 0$ — sprzeczność z (IV.3). □

◇ Odwracanie funkcji ciągłych

Jedną z ważnych operacji na funkcjach, o której jeszcze dotąd nie wspominaliśmy jest odwracanie funkcji. Zacznijmy od przypomnienia, że $f : X \to Y$ jest *odwracalna* wtw jest „na" (tzn. $\forall_{y\in Y}\ \exists_{x\in X}\ f(x) = y$) oraz „1–1", tj. *różnowartościowa* (tzn. $\forall_{x_1,x_2\in X}\ (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$). Dla odwracalnej funkcji $f : X \to Y$ określamy *funkcję odwrotną* $f^{-1} : Y \to X$ warunkiem

$$\forall_{x\in X, y\in Y}\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Okazuje się, że pod pewnymi warunkami ciągłość zachowuje się także przy operacji odwracania funkcji.

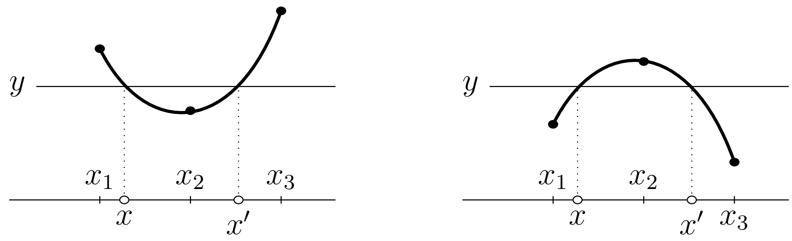
Twierdzenie IV.12 (o ciągłości funkcji odwrotnej). *Jeżeli $I, Y \subset \mathbb{R}$, I — przedział oraz $f : I \to Y$ jest ciągła i odwracalna, to f^{-1} też jest ciągła.*

A zatem owym dodatkowym warunkiem jest w założeniach powyższego twierdzenia to, że dziedzina f jest przedziałem.

W dowodzie tw. IV.12 wykorzystamy dwa lematy, które są także interesujące same w sobie. W obu załóżmy, że I — przedział oraz $f : I \to \mathbb{R}$.

Lemat 1. *Jeżeli f jest ciągła, to f jest „1–1" wtw f jest ściśle monotoniczna.*[51)]

Dowód.
Trzeba dowieść tylko „$\Longrightarrow$". Przypuśćmy, że f nie jest ściśle monotoniczna. Nietrudno wówczas wykazać (nie potrzeba tu korzystać jeszcze z ciągłości f, zostawiam ten krok Państwu), że istnieją takie $x_1 < x_2 < x_3$ w I, że zachodzi $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$ lub $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ (rys. 5).



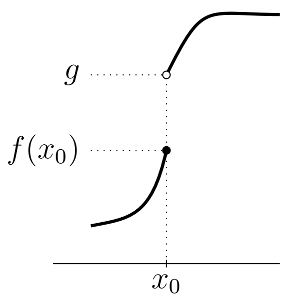
Rysunek 5. To typowe możliwości, gdy brak monotoniczności...

„Dla ustalenia uwagi" załóżmy, że zachodzi pierwszy z tych przypadków oraz że $f(x_1) < f(x_3)$. Wówczas niech $y \in (f(x_2); f(x_1)) \subset (f(x_2); f(x_3))$. Na mocy tw. IV.9 (własność Darboux) istnieją $x \in (x_1; x_2), x' \in (x_2; x_3)$ takie, że $f(x) = y = f(x')$, co przeczy różnowartościowości f. □

Każdy z Państwa bez trudu wskaże przykład pokazujący istotność założenia, że powyżej dziedzina f jest przedziałem. Podobna sytuacja jest też poniżej.

Lemat 2. *Jeżeli f jest monotoniczna, to f jest ciągła wtw $f(I)$ jest przedziałem.*

Dowód.
Implikacja „$\Longrightarrow$" wynika z wniosku po tw. IV.9 i IV.10. Załóżmy więc, że $f(I)$ — przedział. Wykażemy, że dla dowolnego $x_0 \in I$ takiego, że x_0 nie jest prawym końcem I, dla $g := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (zauważmy, że ta granica istnieje na mocy tw. IV.7) zachodzi $g = f(x_0)$. Możemy założyć, że f jest rosnąca (gdy jest malejąca, rozumowanie „przejdzie" dla $-f$...).



Rysunek 6. Jeśli $f(x_0) \neq g$, to y nie będzie należało do $f(I)$.

Niech więc $x' > x_0$, $x' \in I$. Dla dowolnego x takiego, że $x_0 < x < x'$ zachodzi $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x')$, zatem na mocy twierdzenia IV.5 mamy $f(x_0) \leqslant g \leqslant f(x')$. Gdyby zachodziło $f(x_0) \neq g$, to mielibyśmy $f(x_0) < g \leqslant f(x')$ dla wszystkich $x' \in I$ t. że $x' > x_0$ (a takie istnieją dzięki założeniu o x_0). Rozważmy wówczas jakikolwiek $y \in (f(x_0); g)$ (patrz rys. 6). Należy on do $f(I)$ (bo $f(I)$ — przedział). Z drugiej strony, skoro f rosnąca, to dla $x \in I$ takich, że $x \leqslant x_0$ mamy $f(x) \leqslant f(x_0) < y$, a z kolei dla $x' \in I$ takich, że $x' > x_0$ mamy $f(x') \geqslant g > y$. Zatem y nie może być równe $f(x)$ dla żadnego $x \in I$, tzn. $y \notin f(I)$ — sprzeczność!

Analogicznie uzyskujemy odpowiednią równość dotyczącą granicy lewostronnej, skąd łącznie uzyskamy ciągłość f. □

Dowód (twierdzenia IV.12).
Z lematu 1 f jest ściśle monotoniczna zatem $g := f^{-1}$ też (dlaczego? ...). Ponadto $J := f(I)$ — przedział (wniosek z tw. IV.9 i IV.10). Zatem $g : J \to I$ oraz $g(J) = I$ — przedział. Stąd $g = f^{-1}$ jest ciągła na mocy lematu 2. □

Założenia, że dziedziną f jest przedział nie można z twierdzenia usunąć. Zachęcam do znalezienia odpowiedniego przykładu (patrz zadanie 19).

[51)] Ogólnie dla funkcji stosujemy terminologię związania z monotonicznością analogiczną do tej dla ciągów. Tzn. — przypomnijmy z rozdziału I — funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *ściśle rosnąca* (*malejąca*) wtw $\forall_{x,y \in D}\ (x < y \Longrightarrow f(x) < (>) f(y))$, a po prostu *rosnąca* (*malejąca*) gdy ostrą nierówność z prawej strony „$\Longrightarrow$" zastąpimy odpowiednią nieostrą. Łącznie na funkcje rosnące i malejące mówimy, że są *monotoniczne*. Analogicznie funkcje ściśle rosnące i ściśle malejące nazywamy *ściśle monotonicznymi*.

4. Szeregi potęgowe

◇ Uogólnienie pojęcia wielomianu

Poznaliśmy już sporo twierdzeń opisujących własności funkcji ciągłych, ale wciąż mamy niewiele przykładów takich funkcji. Nie wiemy np. nic o ciągłości takich elementarnych funkcji jak funkcje trygonometryczne, wykładnicze, czy potęgowe. Wciąż główny nasz „pozytywny" przykład to wielomian. W tym podrozdziale, w pewnym sensie, uogólnimy pojęcie wielomianu. Mianowicie zamiast mówić o funkcji będącej „skończoną" sumą jednomianów „$a_k x^k$" (— taka właśnie była definicja wielomianu) zajmiemy się szerszą klasą funkcji zadanych „nieskończonymi" sumami jednomianów.

Definicja. ***Szeregiem potęgowym*** *nazywamy rodzinę (tzn. zbiór) wszystkich szeregów liczbowych danych wzorem*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ [52]}$$

dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest ustalonym (tj. niezależnym od x) ciągiem liczb zwanych ***współczynnikami szeregu potęgowego*** *oraz x_0 jest ustaloną liczbą zwaną* ***środkiem szeregu potęgowego****. Zbiór Z złożony z tych $x \in \mathbb{R}$ dla których szereg powyższy jest zbieżny to* ***zbiór zbieżności****, a funkcja $S : Z \to \mathbb{R}$ zadana dla $x \in Z$ wzorem $S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ to* ***suma*** *tego szeregu potęgowego.*

Przykłady. Oczywiście każdy wielomian określony na $\mathbb{R}$ jest sumą szeregu potęgowego (można wziąć $x_0 = 0$ i współczynniki $a_n = 0$ d.d.d. n). Funkcje exp, sin, cos zdefiniowane pod koniec rozdziału III są również sumami szeregów potęgowych o środku 0 i zbiorze zbieżności $\mathbb{R}$. Dla exp — to jasne z definicji. Dla sin i cos sprawa jest trochę delikatniejsza, bo np. szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ **nie jest** szeregiem potęgowym w rozumieniu powyższej definicji. Dlaczego więc mimo to twierdzimy, że cos jest sumą szeregu potęgowego? Odpowiedź jest prosta: można z łatwością wykazać, że zachodzi

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \ \cos x \text{ [53]} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m,$$

gdzie

$$a_m := \begin{cases} 0 & \text{dla } m \text{ — nieparzystych} \\ \frac{(-1)^n}{(2n)!} & \text{dla } m = 2n \end{cases}$$

Analogicznie można postąpić dla funkcji sin.

A zatem wspomniane wcześniej uogólnienie klasy wszystkich wielomianów, to klasa wszystkich sum szeregów potęgowych.

Dodajmy jeszcze, że zapis f w postaci sumy szeregu potęgowego nazywany jest ogólnie *rozwinięciem f w szereg potęgowy.* Do tej sprawy będziemy jeszcze powracać w dalszych rozdziałach.

◇ Postać zbioru zbieżności

Na ogół zbiór zbieżności Z nie jest całym $\mathbb{R}$, ale zawsze $\{x_0\} \subset Z$ — choć czasem Z to „tylko" $\{x_0\}$, jak np. dla szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$. Pytanie zatem — na ile „dziwny" może być zbiór Z? Okazuje się, że nie może być dziwny wcale!

---

[52] Tu umowa, że $0^0 = 1$. Dla uproszczenia zapisu, gdy mowa o szeregu potęgowym $\{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n : x \in \mathbb{R}\}$, to najczęściej piszemy po prostu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.

[53] W przypadku niektórych funkcji elementarnych np. sin, cos, tg, ctg (a także $\log_a$, ln, które pojawią się już wkrótce) zwyczajowo można pomijać nawias przy pisaniu argumentu. Zatem np. $\sin x = \sin(x)$.

Twierdzenie IV.13. *Zbiór zbieżności szeregu potęgowego o środku w x_0 jest przedziałem*[54] *postaci $Z = Z_0 \cup Z_b$, gdzie $Z_0 = (x_0 - R; x_0 + R)$ dla pewnego $R \in [0; +\infty] := [0; +\infty) \cup \{+\infty\}$ oraz $Z_b \subset \{x_0 - R, x_0 + R\} \cap \mathbb{R}$. Dla $x \in Z_0$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ jest bezwzględnie zbieżny.*

A zatem Z to przedział, który — jeśli pominąć jego końce — jest symetryczny względem x_0. Powyższe $R \in [0; +\infty]$, będące połową długości tego przedziału, nazywane jest *promieniem zbieżności*. Gdy rozważamy szeregi potęgowe, dla których $0 < R < +\infty$, to może się zdarzyć każda z „wersji końców" przedziału zbieżności: brak końców, tylko lewy, tylko prawy, oba (zachęcam do samodzielnych poszukiwań odpowiednich przykładów). Zbiór Z_0 z powyższego twierdzenia będziemy nazywali *otwartym przedziałem zbieżności.*

Dowód (twierdzenia IV.13).
Dzięki „podstawieniu $y = x - x_0$" możemy ograniczyć się do przypadku, gdy $x_0 = 0$. Zauważmy, że teza będzie wykazana, o ile wykażemy następujący lemat.

Lemat. *Jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla pewnego $x \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $x' \in \mathbb{R}$ takiego, że $|x'| < |x|$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x')^n$ jest bezwzględnie zbieżny.*

Dowód.
Niech $|x'| < |x|$. Ze zbieżności $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ mamy $a_n x^n \to 0$, więc w szczególności dla pewnego $M \in \mathbb{R}_+$ dla dowolnego $n \geqslant 0$ zachodzi

$$|a_n x^n| \leqslant M$$

skąd $0 \leqslant |a_n (x')^n| = |a_n x^n| \cdot |\frac{x'}{x}|^n \leqslant M q^n$ dla $q := |\frac{x'}{x}| < 1$. A zatem teza lematu wynika z kryterium porównawczego (kryt. III.1). □

□

⋄ Ciągłość sumy szeregu potęgowego

Okazuje się, że rozszerzając w taki właśnie sposób pojęcie wielomianu, jak uczyniliśmy to tutaj, nie wyszliśmy na szczęście poza klasę funkcji ciągłych.

Twierdzenie IV.14 (o ciągłości sumy szeregu potęgowego). *Suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą.*

Udowodnimy tylko część powyższego twierdzenia — pominiemy trudniejszą sprawę — ciągłości w ewentualnych końcach przedziału zbieżności.

Dowód (ciągłości w punktach z Z_0).
Znów możemy założyć, że $x_0 = 0$ (dla innych x_0 trzeba złożyć sumę szeregu pot. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ z ciągłą funkcją „$x \longmapsto x - x_0$"). Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ oraz dla $x \in (-R; R)$ niech $S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Niech $t_0 \in (-R; R)$ (zatem $R > 0$). Wykażemy, że S jest ciągła w punkcie t_0. Możemy wybrać R' takie, że $|t_0| < R' < R$. Na mocy twierdzenia IV.13 szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (R')^n$ jest zbieżny bezwzględnie, tj.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (R')^n < +\infty. \tag{IV.4}$$

Niech $\epsilon > 0$. Dowód będzie zakończony (na mocy tw. IV.8 — „def. Cauchy'ego") jeżeli znajdziemy $\delta > 0$ taką, że gdy $|t - t_0| < \delta$, to $|S(t) - S(t_0)| < \epsilon$. Wskażemy takie δ, które będzie dodatkowo spełniać warunek:

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (-R', R'). \tag{IV.5}$$

---

[54] W analizie matematycznej ważną rolę odgrywają ogólniejsze szeregi potęgowe, w których zarówno x, x_0 jak i a_n mogą być liczbami zespolonymi. Wówczas Z to pewien podzbiór $\mathbb{C}$ złożony z koła otwartego $\{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < R\}$ i pewnego podzbioru okręgu tego koła.

Najpierw korzystając z (IV.4) dobierzemy $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|(R')^n < \frac{\epsilon}{3}. \tag{IV.6}$$

Jeśli δ spełnia (IV.5) oraz $|t - t_0| < \delta$, to $t_0, t \in (-R'; R')$ i na mocy (IV.6) mamy (zachęcam do samodzielnego **szczegółowego** uzasadnienia poniższych nierówności)

$$\begin{aligned} |S(t) - S(t_0)| &\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} a_n t^n - \sum_{n=0}^{N} a_n t_0^n\right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n||t|^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n||t_0|^n \\ &< \left|\sum_{n=0}^{N} a_n t^n - \sum_{n=0}^{N} a_n t_0^n\right| + \frac{2}{3} \cdot \epsilon. \end{aligned} \tag{IV.7}$$

Ponieważ $S_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ jest wielomianem, a zatem funkcją ciągłą, zatem w szczególności możemy dobrać $\delta > 0$ tak, że (IV.5) zachodzi, oraz że jeżeli $|t - t_0| < \delta$, to $|S_N(t) - S_N(t_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. A zatem na mocy (IV.7) tak dobrane δ spełnia nasze warunki. □

Z powyższego twierdzenia uzyskujemy w szczególności ciągłość funkcji sin, cos, exp.

Przykład. Pokażemy jak można użyć twierdzenia IV.14 do obliczenia granic z przykładów 4, 5 i 6 ze strony 59. Zrobimy to na przykładzie $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}$. Zauważmy, że dla dowolnego $x \neq 0$ zachodzi

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ ma zatem zbiór zbieżności równy $\mathbb{R}$, w szczególności jego suma S jest funkcją ciągłą w 0, tzn. $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} S(x) = S(0) = \frac{0^0}{1!} = 1$.

5. O kilku funkcjach elementarnych

Zajmiemy się tu kilkoma często używanymi funkcjami (niektórymi tzw. *funkcjami elementarnymi* — ten termin na ogół nie jest definiowany w jakiś jednoznaczny sposób...). Podamy niektóre ich ważne własności (część z nich bez dowodu), z których będziemy korzystali w dalszych częściach wykładu.

⋄ Funkcja wykładnicza i logarytm

Niech $a > 0$. Funkcja wykładnicza (o podstawie a) zadana wzorem $W_a(x) := a^x$ dla $x \in \mathbb{R}$ zdefiniowana została już w rozdziale I.

Fakt. *W_a jest ciągła; gdy $a > 1$ jej granica w $+\infty$ równa jest $+\infty$, a granica w $-\infty$ równa jest 0 i odwrotnie, gdy $a < 1$. W obu przypadkach $W_a(\mathbb{R}) = (0; +\infty)$ i $W_a : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$ jest odwracalna.*

Dowód.
Ciągłość wynika łatwo z przykładu 3 str. 59, bowiem $\lim_{x\to x_0} W_a(x) = \lim_{h\to 0} W_a(x_0+h) = \lim_{h\to 0} a^{x_0+h} = a^{x_0} \lim_{h\to 0} a^h = a^{x_0} = W_a(x_0)$. Granice w $\pm\infty$: istnienie wynika z twierdzenia IV.7, a konkretną ich wartość uzyskamy z faktu, że $a^n \to 0$ dla $0 < a < 1$. Ponieważ obraz W_a musi być przedziałem, zatem ścisła monotoniczność (patrz wniosek ze strony 21) i wyliczone granice w $\pm\infty$ dają nam $W_a(\mathbb{R}) = (0; +\infty)$ i odwracalność. □

Definicja. *Niech $a > 0$, $a \neq 1$.* ***Logarytmem o podstawie*** *a nazywamy funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej $W_a\colon \mathbb{R} \to (0;+\infty)$. Oznaczamy ją symbolem $\log_a$ (gdy $a = e$, to $\log_a$ nazywamy też* ***logarytmem naturalnym*** *i oznaczamy przez $\ln$).*

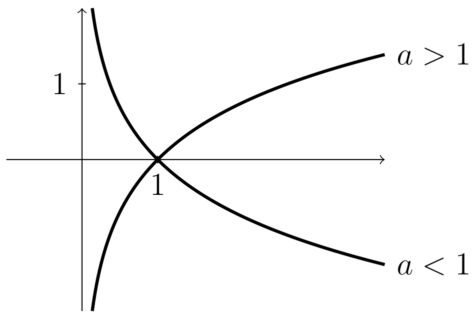
Z twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej (tw. IV.12), z definicji f^{-1} i z odpowiednich własności potęgi rzeczywistej łatwo uzyskujemy następujący wynik.

Fakt. *Dla $a > 0$, $a \neq 1$ funkcja $\log_a\colon (0;+\infty) \to \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna i ciągła. Gdy $a > 1$ jej granica w $+\infty$ równa jest $+\infty$, a w 0 równa jest $-\infty$ i odwrotnie gdy $a < 1$. Ponadto dla $a, b \in (0;+\infty) \setminus \{1\}$, $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi:*

(i) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;

(ii) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$;

(iii) $\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$.



Rysunek 7. Dwa warianty wykresu funkcji logarytmicznej.

Ostatni ze wzorów (tzw. *wzór na zamianę podstaw logarytmów*) pokazuje, że zamiast logarytmów o różnych podstawach, można śmiało używać jednej tylko funkcji logarytmicznej — np. ln.

Na koniec tego podrozdziału zajmiemy się zdefiniowaną w rozdziale III i rozważaną też w tym rozdziale funkcją exp. Okazuje się, że ona również jest funkcją wykładniczą.

Fakt. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exp(x) = e^x$ *(tzn. $\exp = W_e$).*

Dowód.
Wykazaliśmy, że zarówno funkcja exp jak i W_e są ciągłe. Ponadto obie spełniają tożsamość

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \tag{IV.8}$$

i mają dodatnie wartości (dla exp — patrz zadanie 29). Można też wykazać, że mają tę samą wartość w punkcie 1, tzn. że $\exp(1) = e$ — patrz. np. zadania 17 i 18. Reszta dowodu wynika z następującego lematu.

Lemat. *Dla każdego $c > 0$ istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to (0;+\infty)$ spełniająca (IV.8) oraz warunek $f(1) = c$ (mianowicie W_c).*

Dowód.
Istnienie jest jasne, bo $f = W_c$ spełnia te warunki. Wykażemy jednoznaczność. Przez indukcję „po n" łatwo dowodzimy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ zachodzi

$$f(nx) = (f(x))^n.$$

Biorąc $\frac{x}{n}$ zamiast x w ostatniej formule, dla $n \geqslant 1$ dostajemy

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = (f(x))^{\frac{1}{n}}.$$

Mamy też $f(-x) = (f(x))^{-1}$ (dlaczego?...). Stąd

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(1)^{\frac{m}{n}} = c^{\frac{m}{n}} = W_c(\frac{m}{n})$$

dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że $f(q) = W_c(q)$ dla wszystkich $q \in \mathbb{Q}$. Dla $x \in \mathbb{R}$ weźmy ciąg $\{q_n\}$ w. $\mathbb{Q}$ taki, że $q_n \to x$ (patrz np. zadanie 18). Wówczas dzięki ciągłości funkcji f i W_c otrzymujemy $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(q_n) = \lim_{n\to+\infty} W_c(q_n) = W_c(x)$. □

□

◇ Funkcja potęgowa

Rozważamy funkcję potęgową P_α z potęgą $\alpha > 0$, $P_\alpha\colon [0;+\infty)$ [55] $\to [0;+\infty)$, $P_\alpha(x) := x^\alpha$ dla $x \geqslant 0$.

Fakt. *Dla $\alpha > 0$ funkcja P_α jest ciągła i ściśle rosnąca, $\lim_{x\to+\infty} P_\alpha(x) = +\infty$, $P_\alpha([0;+\infty)) = [0;+\infty)$.*

Dowód.
Ścisły „wzrost" dla P_α był wykazany w rozdziale I. Ciągłość w punktach $x_0 > 0$ wynika z twierdzenia o ciągłości złożenia funkcji ciągłych (fakt 2 ze strony 61) i wzoru $x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x}$ dla $x > 0$ (używamy wykazanej już ciągłości funkcji wykładniczej i logarytmicznej). Ciągłość w 0 wynika z faktów dotyczących granicy ln w 0 oraz granicy W_e w $-\infty$, a granicę w $+\infty$ wyliczamy wykorzystując granice obu powyższych funkcji w $+\infty$. Z własności Darboux dostajemy zatem $f([0;+\infty)) = [0;+\infty)$. □

◇ Funkcje trygonometryczne sin, cos, tg, ctg

Tu podamy tylko kilka informacji o funkcjach trygonometrycznych związanych z niezdefiniowaną dotąd przez nas liczbą π. Poniższy fakt podamy bez dowodu.

Fakt. *Istnieje liczba $\pi > 0$ taka, że $\sin(\pi) = 0$ oraz $\sin x > 0$ dla $x \in (0;\pi)$.*

Uwaga. Powyższe warunki wyznaczają liczbę π jednoznacznie. Można więc uznać je za definicję liczby π. Dowód faktu nie jest trudny (patrz zadanie 23). Nieco trudniej jest wskazać jakieś dość precyzyjne oszacowanie liczby π przy użyciu konkretnych liczb wymiernych. Chwilowo bez dowodu przyjmiemy, że

$$3 < \pi < 4.$$

W oparciu o powyższy fakt oraz o wzory na sin i cos sumy i „jedynkę" trygonometryczną (patrz fakt ze strony 49) można wykazać praktycznie wszystkie znane wzory trygonometryczne (w tym tzw. wzory „redukcyjne") dotyczące funkcji sin i cos.

W szczególności nietrudno wykazać, że $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$, a także, że sin i cos są funkcjami okresowymi[56] o okresie 2π.

Funkcje tg („tangens") i ctg („kotangens") określa się następująco:
$\mathrm{tg}\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x};$$

$\mathrm{ctg}\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ctg}(x) := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

---

[55] W rozdziale I dziedziną P_α było zawsze $(0;+\infty)$. Tu, dla $\alpha > 0$, dziedzinę tę troszkę powiększamy. Formalnie jest to więc już inna funkcja, choć używamy tego samego oznaczenia P_α.

[56] Przypomnijmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *okresowa* wtw istnieje $T \neq 0$ takie, że $f(x+T) = f(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz że każda liczba $T \neq 0$ o powyższej własności nazywa się *okresem* funkcji f.

Definicje te są poprawne, można bowiem łatwo sprawdzić, że zbiór zer[57] sinusa, to zbiór $\{k\pi\colon k\in\mathbb{Z}\}$, a cosinusa $\{k\pi+\frac{\pi}{2}\colon k\in\mathbb{Z}\}$. Co więcej tg i ctg są ciągłe, jako ilorazy funkcji ciągłych. Są okresowe o okresie (nawet) π (uwaga — tu dziedzina nie jest $\mathbb{R}$, więc owa okresowość jest w nieco innym znaczeniu, niż to z definicji okresowości z niedawnego przypisu — w jakim?) oraz $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm}\operatorname{tg}x=\mp\infty=\lim\limits_{x\to 0\mp}\operatorname{ctg}x$.

[57] *Zero funkcji* f to każdy taki x z dziedziny f, że $f(x)=0$.

Zadania do Rozdziału IV

1. Sformułuj pominięte na wykładzie przypadki „definicji" Cauchy'ego granicy (tw. IV.1). Dla jednego wybranego (spośród dziewięciu) przypadku udowodnij twierdzenie IV.1.

$\forall$ 2.

   (a) Wykaż, że poniższe „twierdzenie" jest **fałszywe**:

   Załóżmy, że $A, B \subset \mathbb{R}$, $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ i a — p.s. A, b — p.s. B oraz, że $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to \mathbb{R}$. Wówczas, jeżeli

   (i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$,

   (ii) $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$,

   to $\lim\limits_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$.

   (b) Wykaż twierdzenie „o granicy złożenia" (inaczej „o podstawianiu") powstałe przez dołożenie powyżej jeszcze jednego założenia:

   (iii) zachodzi przynajmniej jeden z warunków:
   - $b \in B$ i g jest ciągła w punkcie b;
   - $f(x) \neq b$ d. $x \in A$ d.b. a (np. gdy $b = \pm\infty$...).

3. Wykorzystując twierdzenie z zadania 2 (b), policzoną na wykładzie (przykład 4 ze str. 59) granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}$ oraz wiedzę z podrozdz. 5.1 wykaż, że $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (przykład 7 ze str. 59).

4. Wykaż (ze szczegółami), że $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (przykład 1 ze str. 59) oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{c^x} = 0$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$, $c > 1$ (przykład 2 ze str. 59).

$\forall$ [58] 5. Znajdź poniższe granice, lub wykaż, że nie istnieją:

   (a) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ dla $a = \pm\infty; \pm 2; \pm 1; 0$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(13x)}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$;

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^e - 1}{1 - x^\pi}$;

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[2007]{1+x} - 1}{2x + x^2}$;

   (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{1+x} - \sin\sqrt{x})$;

   (g) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sin(1+x) - \sin x)$;

   (h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ dla $\alpha > 0$;

   (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^{2007} + x^{2009})}{\sqrt[9999]{x}}$;

   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$;

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$;

   (l) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$;

   (m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\sqrt{2}} - 1}{x^2}$;

   (n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x}$;

   (o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ dla $a > 0$.

6. Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ jest ciągła funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadana wzorem

[58] Obowiązkowo przynajmniej 9 szt. spośród (a)–(e), (h)–(o).

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| \leqslant 1 \\ x^2 + ax + b & \text{dla } |x| > 1, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x = 0 \\ \sin \frac{b}{|x|} & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$

7. Znajdź przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest ciągła w

   (a) dokładnie jednym punkcie;

   (b) dokładnie dwóch punktach;

   (c) dokładnie n punktach ($n \in \mathbb{N}$, ustalone);

   (d) każdym punkcie zbioru $\mathbb{Z}$, a w pozostałych punktach jest nieciągła.

8. Uzupełnij szczegóły dowodu twierdzenia „o granicach jednostronnych funkcji monotonicznej" (tw. IV.7).

9. Rozważamy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{\mathrm{mian}(x)} & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$ gdzie $\mathrm{mian}(x) := \min\{n \in \mathbb{N}\colon \exists_{m\in\mathbb{Z}}\ x = \frac{m}{n}\}$ dla $x \in \mathbb{Q}$. Wykaż, że f jest ciągła w punkcie x wtw $x \notin \mathbb{Q}$.

10. Wykaż, że każde z poniższych równań ma co najmniej dwa pierwiastki (tzn. rozwiązania) w $\mathbb{R}$:

    (a) $e^x = 1 + 2x$;

    (b) $2^x = 4x$;

    (c) $e^{-(x^2+\sin x)} = \frac{1}{2}$.

$\forall$ 11. Znajdź pewną liczbę wymierną będącą przybliżeniem jakiegoś pierwiastka poniższego równania z podaną dokładnością d (tzn. takie $y \in \mathbb{Q}$, że istnieje pierwiastek p równania taki, że $|y - p| \leqslant d$):

    (a) $x^3 - 3x = -1,\ \ d = \frac{1}{10}$;

    (b) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0,\ \ d = \frac{1}{8}$.

12. Wykaż, że wielomian stopnia nieparzystego posiada pierwiastek rzeczywisty.

13. Twierdzenie o punkcie stałym, to każde twierdzenie postaci:

    Jeżeli $f\colon X \to X$ oraz zachodzi Z, to istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = x$,

    gdzie Z to pewne założenie dotyczące funkcji f i zbioru X. Wykaż twierdzenie o punkcie stałym dla każdego z poniższych założeń Z:

    $\forall$ (a) f jest ciągła, X — przedział domknięty;

    (b) f jest ciągła i malejąca, $X = \mathbb{R}$;

    (c) f jest zwężająca, tzn. $\exists_{c<1}\ \forall_{x,y\in X}\ |f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|$, $X = \mathbb{R}$.

14. Wykaż, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x) = \frac{1000x^{14} - 7x^{11} + 12x + 7}{(x^7 - 1)^2 + 1}$$

    jest ograniczona.

$\forall$ 15. Wykaż następujące twierdzenie „o osiąganiu jednego kresu”:

> *Jeżeli I to niepusty przedział, $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz istnieje $x_0 \in I$ taki, że dla dowolnego a będącego końcem przedziału I nienależącym do I zachodzi $\lim_{x\to a} f(x) > f(x_0)$ ($< f(x_0)$), to f osiąga swój kres dolny (górny).*[59)]

16. Wykaż, że funkcja f z zadania 14 osiąga obydwa swe kresy.

17. Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest *lipschitzowska* wtw $\exists_{c\in\mathbb{R}} \forall_{x,y\in D}\ |f(x)-f(y)| \leqslant c|x-y|$. Znajdź **wszystkie** te implikacje, które zachodzą pomiędzy parami zdań utworzonymi spośród: „f jest lipschitzowska”, „f jest ciągła”, „f jest jednostajnie ciągła”, niezależnie od wyboru funkcji f.

18. Zbadaj jednostajną ciągłość i lipschitzowskość funkcji zadanych poniższymi wzorami:

   (a) $\sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$;

   (b) x^2 dla $x \in \mathbb{R}$;

   (c) $|x|$ dla $x \in \mathbb{R}$;

   $\forall$ (d) $\ln x$ dla $x > 0$;

   $\forall$ (d') $\ln x$ dla $x \geqslant a$, gdzie $a > 0$ jest ustalone.

19. Znajdź przykład funkcji $f\colon A \to B$, gdzie $A, B \subset \mathbb{R}$, która jest ciągła i odwracalna, ale $f^{-1}\colon B \to A$ nie jest ciągła. (Wskazówka: weź B — przedział, ale A — nie).

$\forall$ [60)] 20. Znajdź zbiór zbieżności i promień zbieżności następujących szeregów potęgowych:

   (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$;

   (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}(x+1)^n$;

   (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$;

   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} (2+(-1)^n)^n x^n$;

   (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{1000}}{\sqrt{n!}} x^n$;

   (f) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{1000}} x^n$;

   (g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\ln(2+n)} x^n$.

21. Wykaż, że jeśli dwa szeregi potęgowe o środku w 0 i o dodatnich promieniach zbieżności mają równe sumy w pewnym przedziale $(-r;r)$, $r > 0$, to szeregi te są identyczne (tzn. mają te same ciągi współczynników). Powyższy fakt, to tzw. twierdzenie o jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy i jest ono uogólnieniem znanego faktu dotyczącego jednoznaczności współczynników wielomianu. Wskazówka: użyj sprytnie twierdzenia o ciągłości sumy szeregu potęgowego (tw. IV.14).

22. Wykaż, że każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła i *addytywna*, tj. spełniająca warunek

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ f(x+y) = f(x) + f(y),$$

jest funkcją liniową, tzn. zadaną wzorem $f(x) = ax$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, przy pewnym (ustalonym) $a \in \mathbb{R}$.

[59)] Przez dolny lub górny kres funkcji rozumiemy oczywiście odpowiedni kres jej zbioru wartości, tzn. tu inf lub sup $f(I)$.

[60)] Obowiązkowo przynajmniej 4 przykłady.

23. Wykaż fakt o istnieniu liczby π (ze strony 70). Wskazówka: wykorzystaj zadanie 5.

24. W oparciu o wiedzę z wykładu (tzn. definicję sin i cos, wzory z rozdziału III (fakt 2 ze str. 49) oraz fakt z zadania 23) wykaż następujące własności sin i cos:

    (a) $\cos\pi = -1$;

    (b) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

    (c) sin i cos są okresowe o okresie 2π;

    (d) $\sin x = 0$ wtw $x \in \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

25. Wykaż, że funkcja Dirichleta (przykład ze strony 61) jest okresowa. Znajdź zbiór wszystkich jej okresów.

26. Wykaż, że jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa o okresie $T_n \neq 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, przy czym $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$, to f jest stała. Czy ciągłość jest tu istotnym założeniem?

27. Wykaż, że istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że dla $x \geqslant M$ zachodzi

    (a) $x^{10000} < \frac{1}{10000!}x^{10001} - 10000!\sqrt{x}x^{10000}$;

    (b) $1000!\ln x < x^{\frac{1}{1000!}}$.

28. Wykaż, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x = e^y$ dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ (uwaga: użyj tu **świadomie** ciągłości odpowiedniej funkcji w odpowiednim punkcie...).

29. Wykorzystując fakt, że $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (przykład 7 ze str. 59) udowodnij następujące kryterium zbieżności szeregów (Raabego): *Jeżeli* $a_n > 0$ *dla* $n \geqslant n_0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}) = \alpha$, [61] *to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny, gdy* $\alpha > 1$ *oraz jest rozbieżny, gdy* $\alpha < 1$. Wskazówka: użyj również „drugiego kryterium porównawczego” z zadania 14.

30. Wykorzystując informacje o granicach odpowiednio dobranych funkcji (w odpowiednich punktach) zbadaj zbieżność szeregów

    (a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{3} - 1)^\alpha$

    (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$

    $\forall$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - \cos\frac{1}{n})^\alpha$

    w zależności od wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. Wskazówka: użyj kryterium asymptotycznego (kryterium III.2).

[61] Można zamiast tej granicy wziąć także $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$.

V Rachunek różniczkowy

[około $3\frac{1}{2}$ wykładu]

W rozdziale IV rozważaliśmy funkcje ciągłe, czyli takie, o których można powiedzieć, że „lokalnie zachowują się w sposób dosyć regularny”. Obecnie zajmiemy się funkcjami „jeszcze bardziej regularnymi”, a mianowicie *różniczkowalnymi*. Popularna geometryczna „definicja” (podobnie jak w przypadku ciągłości, mocno nieścisła, ale sugestywna...) jest następująca:

Funkcja jest różniczkowalna, gdy jej wykres nie posiada „kantów”.

A zatem chodzi o klasę tych funkcji, z którymi w praktyce mamy do czynienia najczęściej. Rzeczywiście — ogromna większość funkcji pojawiających się przy próbach matematycznego opisu zjawisk z otaczającego nas świata — to funkcje różniczkowalne. Również samo pojęcie *pochodnej*, bezpośrednio związane z różniczkowalnością, bardzo często pojawia się przy takich opisach — np. dla wyrażenia szybkości zmian pewnych wielkości w czasie.

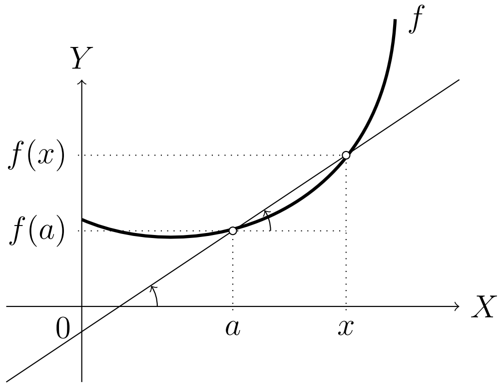
1. Pochodna funkcji

◇ Iloraz różnicowy

Rozważmy funkcję $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$ oraz niech $a \in D$ i a — p.s. D. *Ilorazem różnicowym* dla funkcji f i punktu a nazywamy funkcję określoną na $D \setminus \{a\}$, zadaną dla $x \neq a$ wzorem

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Geometryczny sens powyższej wielkości jest taki: to tangens kąta utworzonego przez oś OX oraz przez prostą wyznaczoną punktami wykresu f dla argumentów a i x (patrz rys. 8). Powyższą prostą nazywa się często *sieczną* do wykresu funkcji f.



Rysunek 8. Wartość ilorazu różnicowego dla f i a w punkcie x to po prostu tangens zaznaczonego tu kąta.

◇ Pochodna i różniczkowalność

Definicja.

- *Jeżeli istnieje granica w punkcie a ilorazu różnicowego dla f i a, tzn.*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

*to nazywamy ją **pochodną** f **w (punkcie)** a i oznaczamy $f'(a)$.*

- ***Pochodna lewostronna (prawostronna)*** *f w punkcie a to*

$$\lim_{x\to a-(+)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\ ^{62)}$$

Oznaczamy ją $f'_-(a)$ ($f'_+(a)$).

- *Funkcja f jest **różniczkowalna w (punkcie)** a wtw $f'(a)$ istnieje i jest skończona (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$).*

- *Funkcja f jest **różniczkowalna** wtw $\forall_{a\in D}$ f jest różniczkowalna w punkcie a. W tej sytuacji funkcję $D \ni x \rightsquigarrow f'(x)$ [63] nazywamy **pochodną** f i oznaczamy symbolem f'.*

Wspomniany we wstępnie do niniejszego rozdziału brak „kantów" w wykresie funkcji różniczkowalnej najlepiej chyba uściślić jako istnienie *prostej stycznej* do wykresu f, rozumianej jako prosta „graniczna" prostych siecznych do wykresu „przy $x \to a$".

Definicja. *Załóżmy, że f posiada pochodną w a. **Prosta styczna do wykresu** f dla a (lub w punkcie $(a, f(a))$) to*

- *w przypadku, gdy $f'(a) \in \mathbb{R}$ zbiór*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = f'(a)(x-a) + f(a)\},$$

- *gdy $f'(a) = \pm\infty$ zbiór*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x = a\}.$$

A zatem powinniśmy jeszcze trochę poprawić „definicję" geometryczną różniczkowalności wykluczając w niej nie tylko „kanty", ale także pionowe styczne ...

Uwagi.

1. Zamiast granicy $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ w definicji pochodnej możemy równoważnie rozważać granicę $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2. Zamiast oznaczenia f' na pochodną, często używane jest tradycyjne oznaczenie

$$\frac{df}{dx}$$

może dość niewygodne jako symbol funkcji, ale za to odzwierciedlające z grubsza sens pojęcia pochodnej (d oznacza tu "przyrost").

3. Często przy definicji pochodnej robione jest nieco silniejsze założenie dotyczące dziedziny D i punktu $a \in D$. Zakłada się mianowicie, że dla pewnego $\delta > 0$ zbiór

$$D_{a,\delta} := \{x \in D : |x-a| < \delta\} \tag{V.1}$$

jest jednym z przedziałów $(a-\delta; a+\delta)$, $[a; a+\delta)$ lub $(a-\delta; a]$. Mówimy wówczas, że a *ma w D otoczenie będące przedziałem*. Założenie to jest oczywiście spełnione, jeżeli np. D jest dowolnym niezdegenerowanym przedziałem, ewentualnie skończoną sumą takich przedziałów, oraz $a \in D$. A zatem spełnione jest w przypadkach najczęściej tu przez nas rozważanych (zachęcam jednak do podania jakiegoś przykładu „negatywnego", tj. dziedziny D oraz $a \in D$, będącego p.s. D, niespełniających tego warunku).

---

[62] Oczywiście, by w ogóle mówić o tych *jednostronnych* pochodnych, a musi być p.s. D^a_- lub, odpowiednio, D^a_+.

[63] Symbol: $D \ni x \rightsquigarrow$ wzór(x) oznacza funkcję g określoną na D zadaną dla wszystkich $x \in D$ jako $g(x) =$ wzór(x).

4. Gdy a jest *obustronnym* punktem skupienia D, tzn. a — p.s. D_+^a oraz D_-^a, to $f'(a)$ istnieje wtw istnieją $f'_+(a)$ i $f'_-(a)$ i są sobie równe.

5. Podobnie jak granica funkcji w punkcie, tak i pochodna funkcji w punkcie to pojęcia *lokalne*, tzn. dla dowolnego $\delta > 0$ istnienie i wartość $f'(a)$ jest tym samym co istnienie i wartość $f'_\delta(a)$, gdzie $f_\delta := f|_{D_{a,\delta}}$ (patrz oznaczenie $D_{a,\delta}$ z powyższego punktu 3). Mówiąc bardziej obrazowo (ale zupełnie nie ściśle ...) punkty „dalekie od a" nie mają wpływu na $f'(a)$. [64)]

◇ Nieco przykładów oraz związki z ciągłością

Po tych dosyć abstrakcyjnych rozważaniach czas już na konkretne przykłady. Zwróćmy w nich uwagę nie tylko na różniczkowalność i pochodną, ale także na kwestię ciągłości.

Przykłady (najprostsze).

1. Funkcja stała ma w każdym punkcie skupienia swej dziedziny pochodną równą 0, bo iloraz różnicowy jest stale równy 0.

2. Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją *afiniczną* (zwaną czasem *liniową*, choć to trochę mylące) tzn. zadaną dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax+b$ (a, b — ustalone liczby), to iloraz różnicowy dla f i dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ jest funkcją stale równą a, zatem też f' jest funkcją stale równą a, co więcej wykres f jest jednocześnie prostą styczną do „siebie samego" dla x_0, niezależnie od wyboru x_0.

3. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Wówczas $f'(x) = 1$ dla $x > 0$, $f'(x) = -1$ dla $x < 0$, a $f'(0)$ nie istnieje, ponieważ $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. Zatem to przykład funkcji ciągłej, która nie w każdym punkcie posiada pochodną.

4. Rozważmy funkcję signum $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem [65)]

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

   Zachodzi: $f'(x) = 0$, dla $x \neq 0$, $f'(0) = +\infty$. Jest to więc przykład funkcji nieciągłej, która w każdym punkcie posiada pochodną.

5. Niech $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Wówczas po standardowych przekształceniach wzoru na iloraz różnicowy tej funkcji uzyskujemy $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla $x > 0$ oraz $f'(0) = +\infty$. Jest to więc przykład funkcji ciągłej, która nie jest różniczkowalna, ale w każdym punkcie posiada pochodną.

Uzupełnieniem powyższych przykładów 3, 4 i 5 może być następujący ważny rezultat dotyczący związków pochodnej z ciągłością.

Fakt. *Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest też w tym punkcie ciągła.*

[64)] Mogą się zatem narodzić wątpliwości: a zatem, czy w ogóle jakiś punkt dziedziny poza samym a ma wpływ na $f'(a)$? Może wystarczy znać tylko a i $f(a)$? ... Ostrzegam, że są to jednak wątpliwości dotyczące bardziej mankamentów logicznych naszego potocznego języka, niż matematyki...

[65)] Funkcja oznaczana tym symbolem nie zawsze jest tą tu właśnie zdefiniowaną funkcją. Rozmaicie bywa wybierana wartość sgn dla argumentu 0.

Dowód.
Gdy $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, to

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)\right) = f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0).$$

□

2. Różniczkowanie funkcji elementarnych

Zajmiemy się tu wzorami umożliwiającymi obliczanie pochodnych funkcji elementarnych. Dokładniej — zajmiemy się tymi funkcjami, które można uzyskać, wychodząc od znanych nam kilku ich podstawowych typów, przy pomocy znanych nam operacji na funkcjach.

⋄ Pochodne kilku ważnych funkcji

Zaczniemy od poniższych czterech wzorów na pochodne już wcześniej przez nas badanych funkcji.

Fakt.

1. *Jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem $f(x) = x^\alpha$ przy czym a) $\alpha \in \mathbb{N}$ i $D = \mathbb{R}$ lub b) $\alpha \in \mathbb{Z}$ i $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ lub c) $D = \mathbb{R}_+$, to $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ (tu ewentualne „0^0", mogące się pojawić w a) dla $\alpha = 1$ i $x = 0$, uznajemy za równe 1).*
2. *Jeżeli $a > 0$ oraz $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana jest wzorem $f(x) = a^x$, to $f'(x) = a^x \ln a$. W szczególności $\exp' = \exp$.*
3. $\sin' = \cos$.
4. $\cos' = -\sin$.

Dowód.
Sprawdzimy wszystkie wzory na pochodne w punkcie x_0. Dla pierwszego wzoru można skorzystać z tego, że $\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x-1} = \alpha$ (patrz przykład 7 strona 59) oraz zapisać dla $x_0 \neq 0$ i $\frac{x}{x_0} > 0$

$$\frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x-x_0} = x_0^{\alpha-1}\frac{(\frac{x}{x_0})^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0}-1},$$

co daje natychmiast potrzebny wynik, o ile $x_0 \neq 0$ (przypadek $x_0 = 0$, możliwy tylko dla a), jest oczywisty). Dla dowodu punktu 2 zauważmy, że dla $a \neq 1$ i $x \neq x_0$

$$\frac{a^x - a^{x_0}}{x-x_0} = a^{x_0}\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0} = a^{x_0}\frac{e^{(x-x_0)\ln a}-1}{(x-x_0)\ln a}\ln a \xrightarrow[x\to x_0]{} a^{x_0}\ln a$$

ponieważ

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

(patrz przykład 4 strona 59). Dla $a = 1$ ten wzór na pochodną jest oczywisty. Wreszcie wzory 3 i 4 to prosta konsekwencja wzorów na sin i cos od sumy argumentów (patrz fakt 2 ze str. 49) oraz przykładów 5 i 6 ze strony 59. Np.

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} &= \cos x_0\frac{(\cos h - 1)}{h^2}h - \sin x_0\frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x_0\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 - \sin x_0 \cdot 1\\ &= -\sin x_0.\end{aligned}$$

□

$\diamond$ Wzory rachunkowe dla pochodnej

Poniższy rezultat pozwoli nam badać funkcje zadane bardziej skomplikowanymi wzorami.

Twierdzenie V.1 (o własnościach rachunkowych pochodnej).

a. Jeżeli $f, g : D \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $a \in D$, to $f \pm g$ i $f \cdot g$ także są różniczkowalne w a oraz

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \qquad \textit{(wzór Leibniza).}$$

Jeżeli ponadto $\forall_{x\in D}\ g(x) \neq 0$, to $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w a oraz

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}. \tag{V.2}$$

b. Jeżeli $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ oraz f jest różniczkowalna w $a \in A$ i g jest różniczkowalna w $f(a)$, to $g \circ f$ jest różniczkowalna w a oraz

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

c. Jeżeli $I, Y \subset \mathbb{R}$, I — przedział oraz $f : I \to Y$ jest odwracalna i różniczkowalna, przy czym $\forall_{x\in I}\ f'(x) \neq 0$, to f^{-1} też jest różniczkowalna, oraz dla dowolnego $y \in Y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Dowód.
Dla $f + g$ teza wynika natychmiast z faktu, że iloraz różnicowy dla $f + g$ i a to odpowiednia suma ilorazów różnicowych. Z kolei wzór Leibniza uzyskamy stosując standardowy „chwyt" podobny do tego, który został użyty w dowodzie twierdzenia o granicy iloczynu ciągów (patrz twierdzenie II.1): dla $x \in D \setminus \{a\}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(a)\end{aligned}$$

(trzeba tu też skorzystać z tego, że f jest ciągła w a — patrz fakt ze strony 78).

Przed dowodem części dotyczącej ilorazu, wykażemy punkt b). W tym celu oznaczmy $D_1 := \{x \in A : f(x) \neq f(a)\}$, $D_2 = A \setminus D_1$. Niech $x \in A \setminus \{a\}$ oraz rozważmy iloraz różnicowy dla złożenia

$$i(x) := \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}.$$

Jeżeli $x \in D_2$, to mamy oczywiście $f(x) = f(a)$, skąd $i(x) = 0$. Jeżeli natomiast $x \in D_1$, to

$$i(x) = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Załóżmy, że a jest p.s. obydwu zbiorów D_1 i D_2. Ponieważ f jest różniczkowalna w a, zatem jest ciągła w a, więc $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. A zatem mamy

$$\lim_{x\to a}(i|_{D_1})(x) = g'(f(a))f'(a) \tag{V.3}$$

oraz

$$\lim_{x\to a}(i|_{D_2})(x) = 0 \tag{V.4}$$

Jednocześnie, skoro a jest p.s. D_2, to

$$f'(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D_2}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0.$$

Stąd na mocy twierdzenia o scalaniu (tw. IV.3), z (V.3) i z (V.4) wynika, że $\lim_{x\to a} i(x) = g'(f(a))f'(a)$, co kończy dowód punktu b) w tym przypadku. Jeżeli a jest p.s. tylko jednego spośród zbiorów D_1, D_2, to dowód jest prosty i *de facto* zawarty w powyższych rozważaniach.

Powróćmy do ilorazu. Zauważmy, że iloraz mozna zapisać przy pomocy mnożenia i składania:

$$\left(\frac{f}{g}\right) = f\cdot(h\circ g),$$

gdzie $h:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ zadana jest wzorem $h(x)=\frac{1}{x}$. A zatem w tym przypadku teza wynika natychmiast z udowodnionych już części twierdzenia dotyczących iloczynu i złożenia oraz faktu ze strony 79 pkt. 1 dla $\alpha=-1$.

Udowodnimy c). Możemy założyć, że przedział I jest niezdegenerowany. Ponieważ f jest w szczególności ciągła, zatem Y jest przedziałem (i to niezdegenerowanym — dlaczego?) i f^{-1} też jest ciągła (patrz tw. IV.12). Zatem gdy $y_0\in Y$, to y_0 — p.s. Y oraz dla $y\in Y\setminus\{y_0\}$, dzięki odwracalności, mamy $f^{-1}(y)\neq f^{-1}(y_0)$, skąd

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}} \xrightarrow[y\to y_0]{} \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

przy czym powyższa zbieżność jest konsekwencją ciągłości f^{-1} w y_0 oraz różniczkowalności f w $f^{-1}(y_0)$. □

Oczywistą konsekwencją twierdzenia V.1 jest następujący wniosek, dotyczący zachowania różniczkowalności przy podstawowych operacjach na funkcjach.

Wniosek. *Suma, iloczyn, iloraz i złożenie (o ile mają sens) funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną. Funkcja odwrotna do funkcji różniczkowalnej z niezerującą się pochodną, określonej na przedziale jest funkcją różniczkowalną.*

◇ Pochodne dalszych ważnych funkcji

Twierdzenie V.1 wraz z udowodnionym wcześniej faktem pozwala wyliczyć pochodne kolejnych funkcji elementarnych.

Przykład.

1. Niech $1\neq a>0$. Na mocy pkt. c) twierdzenia mamy dla $x>0$

   $$(\log_a)'(x) = \frac{1}{\ln a\cdot a^{\log_a x}} = \frac{1}{x\cdot\ln a},$$

   w szczególności $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

2. Dla x należącego do dziedziny tangensa, na mocy (V.2), mamy

   $$(\mathrm{tg})'(x) = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}\ ^{66)}\ .$$

66) Stosujemy tu popularną (choć niestety czasem mylącą) konwencję pisania $f^2(x)$ zamiast $(f(x))^2$ dla pewnych funkcji f — szczególnie trygonometrycznych.

3. Podobnie dla x z dziedziny kotangensa

$$(\mathrm{ctg})'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -1 - \mathrm{ctg}^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Na zakończenie tego podrozdziału warto podkreślić, że w efekcie udało nam się osiągnąć zapowiadany cel związany z praktyczną „wyliczalnością" wzorów na pochodne wszystkich funkcji elementarnych. Jest to bardzo komfortowa sytuacja — jak przekonamy się w rozdziale VII — całkiem odmienna od tej, jaką będziemy mieli przy *całkowaniu*, czyli operacji odwrotnej (w nieco nieścisłym sensie) do różniczkowania.

3. Pochodna i ekstrema lokalne

Jak wskazywałaby na to geometryczna interpretacja pochodnej związana ze styczną do wykresu, powinny istnieć łatwe do opisania relacje pomiędzy rozmaitymi własnościami funkcji a własnościami jej pochodnej. W następnym podrozdziale przekonamy się, że tak jest np. z monotonicznością funkcji. Tu natomiast przyjrzyjmy się tego typu związkom, które mają miejsce dla innej własności: posiadania przez funkcję *ekstremum lokalnego*.

◇ Maksima i minima lokalne

Definicja. *Niech $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$. Funkcja f posiada* ***maksimum (minimum) lokalne*** *w x_0 wtw dla pewnego $\delta > 0$ zachodzi*

$$f(x_0) = \max(\min)\{f(x) : x \in D, |x - x_0| < \delta\}.$$

Funkcja f posiada ***ekstremum lokalne*** *w x_0 wtw f posiada maksimum lub minimum lokalne w x_0.*

Inaczej mówiąc, funkcja osiąga w x_0 maksimum (minimum) lokalne w sytuacji, gdy dla pewnego $\delta > 0$ jej wartość w x_0 jest wartością największą (najmniejszą) spośród wartości osiąganych w $D_{x_0,\delta}$. Ekstremum lokalne posiada zatem np. funkcja cos w 0, funkcja stała — w każdym punkcie, funkcja $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = x$ — w punkcie 0 i 1.

◇ Pochodna dla ekstremów wewnątrz dziedziny

Z powyższych przykładów nie widać jednak by fakt posiadania ekstremum lokalnego wpływał w jakiś jednolity sposób na własności pochodnej. Dlatego ograniczymy się do rozważania tylko niektórych punktów dziedziny funkcji. Mówimy mianowicie, że x_0 jest *punktem wewnętrznym* zbioru D wtw $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D$ dla pewnego $\delta > 0$.

Twierdzenie V.2 (o ekstremach lokalnych). *Jeżeli f posiada ekstremum lokalne w punkcie wewnętrznym x_0 swojej dziedziny oraz f jest różniczkowalna w x_0* [67]*, to $f'(x_0) = 0$.*

Dowód.
Niech D — dziedzina f i niech $\delta > 0$ będzie takie, że $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D$ oraz równocześnie $\forall_{x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)}\ f(x) \leqslant f(x_0)$ (a zatem zakładamy, że w x_0 jest maksimum lokalne, gdyby było to jednak minimum lokalne, wystarczy rozważać $-f$ zamiast f). W efekcie dla $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ mamy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$, a dla $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ mamy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Stąd $f'_-(x_0) \geqslant 0$ oraz $f'_+(x_0) \leqslant 0$. Ponieważ jednak $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, zatem $f'(x_0) = 0$. □

[67] Wystarczy zakładać, że f posiada pochodną w x_0.

Klasyczny przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = x^3$, która choć ma w zerze pochodną równą 0, jednak nie posiada w tym punkcje ekstremum, pokazuje, że nie zachodzi twierdzenie odwrotne do twierdzenia V.2. A zatem twierdzenie to daje tylko pewien warunek konieczny na „posiadanie ekstremum lokalnego w x_0”. Niemniej w wielu zadaniach bywa to bardzo przydatne.

⋄ Znajdowanie kresów funkcji — sposób I

Przykład. Znajdziemy kres górny i dolny zbioru wartości funkcji $f : [0; 3] \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x.$$

Po pierwsze zauważmy, że f jest ciągła, a zatem osiąga w pewnych punktach z $[0; 3]$ swój kres[68] górny i dolny. W każdym z tych punktów f posiada zatem ekstremum lokalne. Jeśli taki punkt x jest punktem wewnętrznym przedziału, to $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2) = 0$, czyli x to 1 lub 2. W efekcie wiemy, że kresy osiągane są w jednym z punktów 0, 1, 2, 3 (na początku wiedzieliśmy tylko, że są osiągane gdzieś w $[0; 3]$ — zatem zbiór „punktów podejrzanych” udało nam się solidnie zmniejszyć ...). Mamy $f(0) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, a zatem kres górny f to 9, a dolny to 0.

4. Twierdzenia o wartości średniej dla pochodnej

⋄ Trzy twierdzenia o wartości średniej

Zapowiadane tu trzy twierdzenia to rezultaty fundamentalne dla rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej — pozwolą nam one naprawdę skutecznie badać funkcje za pomocą ich pochodnych. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dwa pierwsze twierdzenia dotyczą jednej funkcji $f : [a; b] \to \mathbb{R}$.

Twierdzenie V.3 (Rolle'a). *Jeżeli f jest ciągła w a i w b, różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $(a; b)$* [69] *oraz $f(b) = f(a)$, to*

$$\exists_{c \in (a;b)}\ f'(c) = 0.$$

Teza twierdzenia Rolle'a ma prostą interpretację geometryczną: w pewnym punkcie wewnątrz przedziału styczna do wykresu jest pozioma, co dzięki naszym intuicjom związanym z różniczkowalnością funkcji wydaje się całkiem naturalne przy przyjętym założeniu, że wartości funkcji są równe na końcach. Następne twierdzenie jest uogólnieniem poprzedniego — rezygnujemy w nim z założenia $f(b) = f(a)$.

Twierdzenie V.4 (Lagrange'a). *Jeżeli f jest ciągła w a i w b oraz jest różniczkowalna w $(a; b)$, to*

$$\exists_{c \in (a;b)}\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

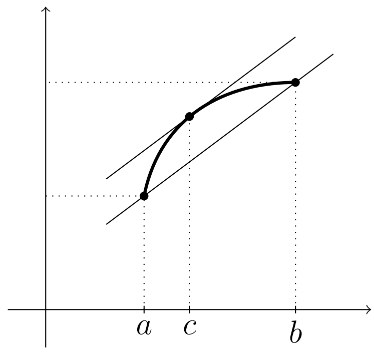
To twierdzenie także wydaje się być zgodne z naszą intuicją — styczna do wykresu ma być równoległa do prostej siecznej odpowiadającej argumentom a i b (patrz rys. 9).

Trzecie twierdzenie dotyczy już dwóch funkcji $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ i jest uogólnieniem obu poprzednich twierdzeń [70] .

[68] Kresem górnym (dolnym) funkcji nazywamy odpowiedni kres jej zbioru wartości.

[69] Zamiast „różniczkowalna w każdym punkcie zbioru X” będziemy też mówić *różniczkowalna w X*.

[70] Dlaczego?



Rysunek 9. Styczna dla punktu c jest równoległa do siecznej dla a i b.

Twierdzenie V.5 (Cauchy'ego). *Jeżeli f i g są ciągłe w a i w b oraz różniczkowalne w $(a;b)$, to*

$$\exists_{c\in(a;b)}\ (f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$$

Dowody.
Zacznijmy od twierdzenia Rolle'a. Zauważmy najpierw, że f — ciągła, zatem z twierdzenia Weierstrassa (tw. IV.10) istnieją $m, M \in [a;b]$ takie, że $\forall_{x\in[a;b]}\ f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M)$. Jeżeli $f(m)=f(M)$, to f jest stała, więc $f'(c)=0$ dla **każdego** $c\in(a;b)$. Jeśli natomiast $f(m)\neq f(M)$, to jedna z liczb m, M musi byś różna od a i od b, gdyż $f(a)=f(b)$. Biorąc tę właśnie liczbę jako c, z twierdzenia V.2 uzyskujemy tezę, gdyż f posiada w szczególności ekstremum lokalne w c i c jest punktem wewnętrznym $[a;b]$.

Teraz pozostałe twierdzenia uzyskamy natychmiast, stosując twierdzenie Rolle'a do odpowiednio dobranych funkcji „pomocniczych" $\tilde{f} : [a;b]\to\mathbb{R}$. Dla twierdzenia Lagrange'a $\tilde{f}$ definiujemy wzorem

$$\tilde{f}(x) := f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$$

Dla twierdzenia Cauchy'ego bierzemy natomiast

$$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

o ile $g(b)\neq g(a)$, a gdy $g(b)=g(a)$ teza wynika natychmiast z twierdzenia Rolle'a

◇ Najprostsze równanie różniczkowe

Przykładem bardzo ważnej konsekwencji twierdzenia Lagrange'a jest następujący wynik dotyczący najprostszego *równania różniczkowego*: $f'(x)=0$.

Wniosek. *Jeżeli I — przedział oraz $f : I\to\mathbb{R}$ spełnia $f'(x)=0$ dla dowolnego $x\in I$, to f jest funkcją stałą.*

Dowód.
Dla dowolnych $x,y\in I$, $x<y$ istnieje $c\in(x;y)$ takie, że $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)=0$, skąd $f(x)=f(y)$. □

Należy jednak **koniecznie** pamiętać, że powyższy wniosek dotyczy wyłącznie funkcji określonych na przedziale.

◇ Monotoniczność a pochodna

Kolejnym ważnym wnioskiem jest kryterium monotoniczności funkcji. Podobnie jak przed chwilą, istotne jest tu, że dziedzina funkcji to przedział.

Twierdzenie V.6 (o monotoniczności). *Jeżeli I — przedział oraz $f : I \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to*

1. *f jest rosnąca (malejąca) wtw $\forall_{x \in I}\ f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$);*

2. *Jeżeli $\forall_{x \in I}\ f'(x) > 0$ (< 0), to f jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca).*

Dowód.
Implikacja „$\Rightarrow$" w pkt. 1. to natychmiastowy wniosek z definicji pochodnej, a pozostała część tezy twierdzenia wynika (też natychmiastowo) z tw. Lagrange'a. □

Wspomniany niedawno przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ pokazuje, że w pkt. 2. powyżej implikacja „$\Leftarrow$" **nie zachodzi**, bowiem $f'(0) = 0$.

⋄ Kilka nowych funkcji elementarnych — funkcje „arkus..."

Twierdzenie o monotoniczności wykorzystamy teraz do badania monotoniczności funkcji trygonometrycznych (na pewnych przedziałach). Pozwoli nam to zdefiniować kolejne funkcje „elementarne": arcsin, arccos, arctg i arcctg. Rozważmy następujące cztery funkcje, będące obcięciami znanych nam funkcji trygonometrycznych do pewnych podzbiorów ich dziedzin.

$s : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1], \quad s(x) = \sin x;$
$c : [0; \pi] \to [-1; 1], \quad c(x) = \cos x;$
$t : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad t(x) = \operatorname{tg} x;$
$ct : (0; \pi) \to \mathbb{R}, \quad ct(x) = \operatorname{ctg} x.$

Na mocy twierdzenia V.6 pkt.2 oraz na mocy wzorów z podrozdziału 2. wszystkie te funkcje są różnowartościowe [71] (s i t są ściśle rosnące, c i ct — ściśle malejące). Korzystając z twierdzenia o własności Darboux (tw. IV.9) oraz badając granice, względnie wartości powyższych funkcji w końcach ich dziedzin uzyskujemy też, że funkcje te są „na". Funkcje arcsin, arccos, arctg i arcctg to funkcje odwrotne do s, c, t i ct. Ich wykresy są zatem symetryczne odpowiednio do wykresów funkcji s, c, t, ct względem prostej o równaniu $y = x$ (patrz rys. 10).

Z twierdzenia V.1 uzyskujemy też różniczkowalność arctg i arcctg oraz różniczkowalność w $(-1; 1)$ arcsin i arccos oraz wzory:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{dla} \quad x \in (-1; 1);$$

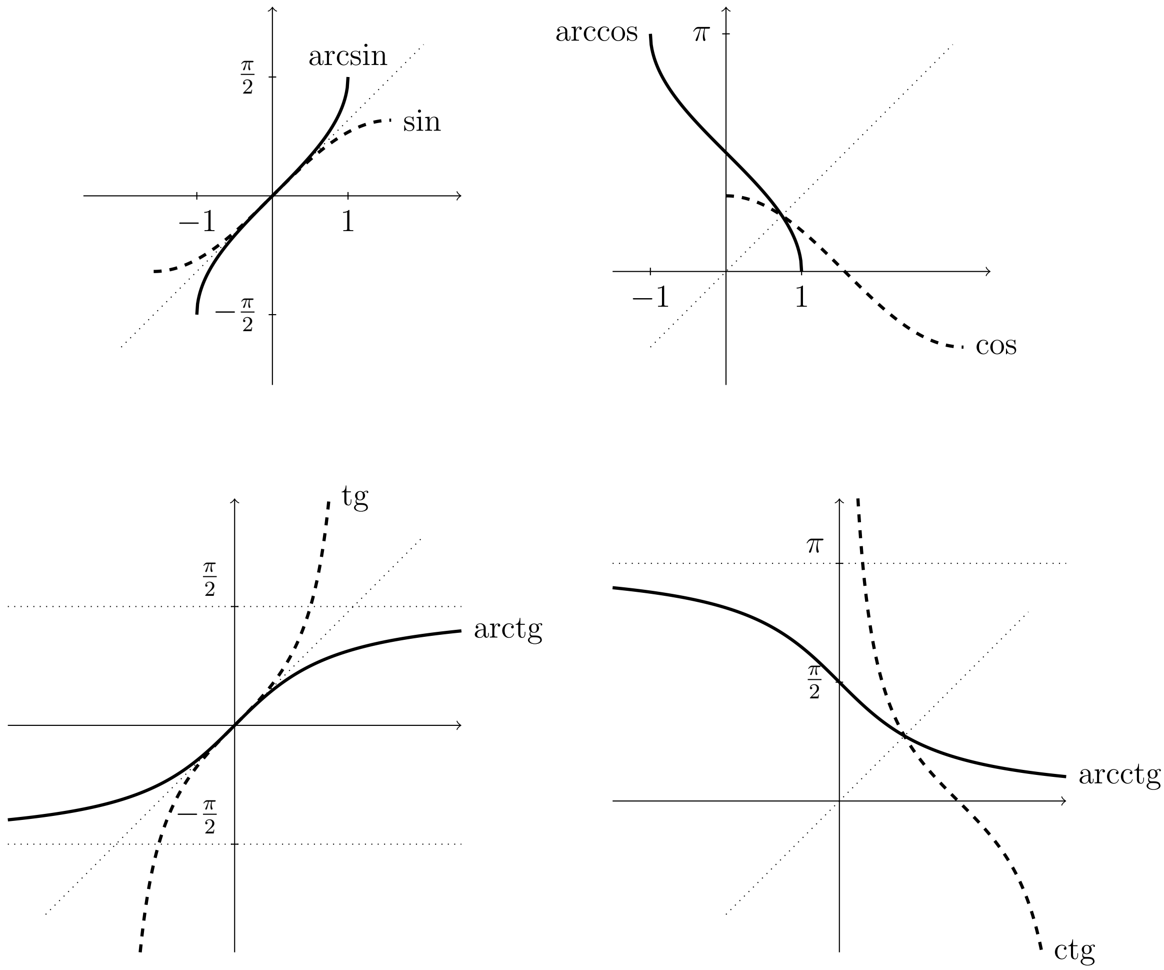
$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \operatorname{arcctg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

⋄ Znajdowanie kresów funkcji — sposób II

Twierdzenie o monotoniczności pozwala też rozwiązywać zadania na znajdowanie kresów funkcji przy użyciu metody alternatywnej do tej użytej w przykładzie ze str. 83 (wykorzystującej twierdzenie o ekstremach lokalnych).

Przykład. Rozważmy tę samą funkcję co we wspomnianym wyżej przykładzie. Najpierw znajdziemy możliwie duże przedziały zawarte w dziedzinie f, po obcięciu do których f jest monotoniczna (tzw. *maksymalne przedziały monotoniczności*). Dzięki tw. V.6 sprowadza się to do rozwiązania nierówności $f'(x) \leqslant 0$ lub $f'(x) \geqslant 0$. Ponieważ $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$ zatem

[71] Należy tu czasem użyć też faktu, że pochodna funkcji stałej na pewnym przedziale ma w **całym** tym przedziale pochodną równą 0.



Rysunek 10. Wykresy „fragmentów” funkcji trygonometrycznych i odpowiadających im „arkusów”.

bez trudu uzyskujemy, że na $[1; 2]$ f jest malejąca, a na $[0; 1]$ i na $[2; 3]$ jest rosnąca (choć na sumie: $[0; 1] \cup [2; 3]$ już **nie** — dlaczego?). Oczywiście kres górny f może być osiągany jedynie w prawym końcu któregoś przedziału, gdzie f rośnie lub lewym takiego, gdzie f maleje, czyli w 1 lub 3. Ponieważ $f(1) = 5 < 9 = f(3)$, więc kres górny to 9. Podobnie kres dolny może być osiągany jedynie w prawym końcu przedziału, gdzie f maleje lub lewym, gdzie rośnie, czyli w 2, 0, 3. A zatem kres dolny to $f(0) = 0$, bo $f(3) = 9 > f(2) = 4 > 0 = f(0)$.

Jak widać z czysto rachunkowego punktu widzenia, ta metoda jest bardzo podobna do metody I. Zamiast równania $f'(x) = 0$ rozwiązujemy nierówność $f'(x) \geqslant 0$ lub $\leqslant 0$, a to na ogół robi się bardzo podobnie. Główna różnica polega na sposobie argumentacji. Metoda II ma oczywiście swoje ograniczenia: cała dziedzina musi dać się rozbić na sumę przedziałów monotoniczności. Ma też jednak pewną wyższość nad metodą I — można ją bez większego trudu uogólnić na przypadek funkcji określonych na innych przedziałach niż tylko domknięte, z czym dla metody I mogą być pewne kłopoty (zachęcam do znalezienia stosownego przykładu).

◇ Dowodzenie nierówności

A oto jeszcze jedno zastosowanie twierdzenia o monotoniczności.

Przykład (dowodzenie nierówności). Wykażemy nierówność

$$\sin x \leqslant x \qquad \text{dla} \ \ x \geqslant 0.$$

Rozważmy $f : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = \sin x - x$. Mamy

$$f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$$

dla każdego $x \geqslant 0$. Funkcja f jest więc malejąca — w szczególności $\sin x - x = f(x) \leqslant f(0) = 0$, czyli $\sin x \leqslant x$ dla dowolnego $x \geqslant 0$. A zatem, w dużym skrócie, sprowadziliśmy dowód nierówności dla funkcji do pewnej nierówności na jej pochodną. Całkiem podobnie dowodzimy nierówność

$$\ln(1+x) \leqslant x \qquad \text{dla } \ x > -1.$$

należy tylko badać monotoniczność funkcji zadanej wzorem $\ln(1+x) - x$ osobno na lewo i osobno na prawo od 0.

◇ Reguła de l'Hospitala i badanie „nieoznaczoności"

Ważną konsekwencją twierdzenia Cauchy'ego (tw. V.5) jest tzw. reguła de l'Hospitala, pomocna niekiedy przy obliczaniu granic funkcji (choć niestety także często jest nieprzydatna, albo bywa używana wtedy, gdy można się łatwo obyć bez niej...).

Twierdzenie V.7 (reguła de l'Hospitala). *Niech $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Załóżmy, że funkcje f i g określone w $(a; b)$ są różniczkowalne oraz że $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a; b)$. Niech $x_0 = a$ lub b. Jeżeli istnieje granica*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{V.5}$$

oraz zachodzi któreś z założeń

wersja 1. *(„$\frac{0}{0}$"):* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

wersja 2. *(„$\frac{?}{\pm\infty}$"):* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ *lub* $-\infty$,

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód.
Przedstawimy tu tylko dowód dla szczególnego przypadku wersji 1. z dodatkowymi założeniami, że $x_0 = a \in \mathbb{R}$. Funkcje f i g „dookreślimy" w punkcie a biorąc $f(a) = g(a) = 0$ tzn., nieco ściślej, zdefiniujemy $\tilde{f}, \tilde{g} : [a; b) \to \mathbb{R}$ wzorami

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = a \\ f(x) & \text{dla } x \in (a; b), \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = a \\ g(x) & \text{dla } x \in (a; b). \end{cases}$$

Niech $x \in (a; b)$. Oczywiście $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ są ciągłe w a i w x oraz są różniczkowalne w przedziale $(a; x)$. W szczególności zatem, z twierdzenia Rolle'a, mamy $g(x) \neq 0$ na mocy założenia, że pochodna g' jest niezerowa. Ponadto z tw. Cauchy'ego o wartości średniej, dla pewnego $c_x \in (a; x)$ zachodzi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{V.6}$$

Skoro $a < c_x < x$, zatem na mocy twierdzenia o trzech funkcjach (tw. IV.4) mamy $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$ i przy tym $c_x \neq a$. Stąd, na mocy (V.6), dzięki istnieniu granicy (V.5), otrzymujemy tezę twierdzenia[72]. □

Zauważmy jeszcze, że granice pojawiające się w twierdzeniu V.7 to granice *de facto* jednostronne (choć nie zostały użyte symbole $\lim\limits_{x \to x_0 \pm}$, ale x_0 jest „na końcu" dziedziny). A zatem reguły de l'Hospitala można używać w sposób bezpośredni tylko do granic jednostronnych.

[72] Patrz też ew.: twierdzenie „o granicy złożenia" z zadania 2 do rozdziału IV.

W przypadku granic „obustronnych” trzeba właściwie użyć jej dwukrotnie — dla „każdej ze stron” osobno, choć zazwyczaj rachunki dla obu stron są analogiczne. I jeszcze jedna sprawa. Stosując regułę de l'Hospitala **nie można** zapomnieć, że istnienie granicy (V.5) jest jednym z założeń twierdzenia!

Jak widać z samego sformułowania, reguła de l'Hospitala nadaje się bezpośrednio do badania „nieoznaczoności” typu „$\frac{0}{0}$” i „$\frac{\infty}{\infty}$”. Często jednak, po odpowiednich przekształceniach algebraicznych, do którejś z tych „nieoznaczoności” daje się sprowadzić także „nioznaczoności” inne.

Przykład („nieoznaczoność” typu „$1^{\pm\infty}$”). Znajdziemy $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$. Ponieważ granica podstawy, tj. cos równa jest 1, a granica wykładnika co prawda nie istnieje, ale istnieją granice jednostronne równe odpowiednio $\pm\infty$. Te dwie sytuacje określamy mianem *nieoznaczoności*[73] *typu* „$1^{+\infty}$” lub odpowiednio „$1^{-\infty}$”. Dla $0 \neq x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ mamy:

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln((\cos x)^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}. \tag{V.7}$$

Policzmy więc najpierw $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\ln\cos x}{x}$ — użyjemy regułę de l'Hospitala (wersję 1) mamy bowiem $\lim\limits_{x\to 0\pm} x = \lim\limits_{x\to 0\pm} \ln\cos x = \ln 1 = 0$. Ponieważ iloraz pochodnych to

$$\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1} = -\operatorname{tg} x$$

i posiada on (obustronną) granicę w 0 równą 0, zatem także $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x} = 0$, stąd, dzięki ciągłości funkcji wykładniczej, na mocy (V.7), mamy

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

5. Wyższe pochodne

◇ Rekurencyjna definicja n–tej pochodnej

Będziemy tu mówili o pochodnych n–tego rzędu (inaczej: n–tych pochodnych), gdzie $n \in \mathbb{N}_0$. Dla $n = 0$ n–ta pochodna funkcji f to po prostu sama funkcja f — określona jest więc ona w każdym punkcie dziedziny. Z kolei dla $n = 1$ *pierwsza pochodna* f w punkcie x to po prostu pochodna, czyli $f'(x)$, o ile istnieje. Oznaczmy więc $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$. Ogólnie, n–tą pochodną funkcji f w punkcie x_0 będziemy oznaczać przez $f^{(n)}(x_0)$. Zdefiniujemy ją przy użyciu rekursji „po n”, startując np. od przyjętej już definicji dla $n = 0$. Mówiąc niezbyt dokładnie, $(n+1)$–sza pochodna będzie po prostu pochodną n–tej pochodnej, musimy to jednak doprecyzować. Dla zbioru $D \subset \mathbb{R}$, punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $\delta > 0$ przyjmijmy (a właściwie przypomnijmy — patrz str. 77) oznaczenie

$$D_{x_0,\delta} := D \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta),$$

które przyda nam się poniżej.

Definicja (przejście od n do $n+1$ w definicji n–tej pochodnej). *Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Jeżeli $n \in \mathbb{N}_0$, to $f^{(n+1)}(x_0)$* ***istnieje*** *wtw dla pewnego $\delta > 0$ dla dowolnego $x \in D_{x_0,\delta}$ $f^{(n)}(x)$ istnieje i jest skończona oraz funkcja $D_{x_0,\delta} \ni x \rightsquigarrow f^{(n)}(x)$ posiada pochodną w x_0* [74]. *W takiej sytuacji tę pochodną w x_0 oznaczamy $f^{(n+1)}(x_0)$ i nazywamy $n+1$–**szą pochodną** f **w** x_0 (ew. pochodną $n+1$–szego rzędu w x_0).*

[73] Ściślej, słowo „nieoznaczoność” wyraża niemożność sensownego zdefiniowania odpowiedniego działania — w tym wypadku potęgowania „$1^{+\infty}$” ani „$1^{-\infty}$”.

[74] W szczególności zatem x_0 musi być punktem skupienia i elementem D.

Będziemy także mówić, że f jest *n–krotnie różniczkowalna w (punkcie) x_0* wtw $f^{(n)}(x_0)$ istnieje i jest **skończona** oraz, że f jest *n–krotnie różniczkowalna* wtw f jest n–krotnie różniczkowalna w x dla dowolnego x z dziedziny funkcji f. W tej ostatniej sytuacji funkcję $D \ni x \rightsquigarrow f^{(n)}(x)$ nazywamy *n–tą pochodną* f i (oczywiście) oznaczamy przez $f^{(n)}$. Czasami na $f^{(n)}$ używa się też tradycyjnego oznaczenia $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Zwróćmy uwagę na pewną subtelność związaną z definicją wyższych pochodnych. W przypadku 1–szej pochodnej, aby mogła być ona określona w punkcie x_0, z punktu widzenia własności samej dziedziny wystarczało w zasadzie by x_0 był jej elementem oraz punktem skupienia. Mógł więc to być np. punkt $x_0 = 0$ dziedziny $D = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [0; 1]$. Jednak już dla $n = 2$ podobna sytuacja nie jest możliwa, bowiem w żadnym z punktów postaci $-\frac{1}{n}$ pierwsza pochodna funkcji określonej na D nie istnieje (bo punkty te nie są punktami skupienia D). Zatem zgodnie z definicją, $f^{(2)}(0)$ nie istnieje, niezależnie od tego jak „regularną" funkcję f rozważamy na tej dziedzinie.

⋄ Wzory rachunkowe dla wyższych pochodnych i wielokrotne różniczkowanie funkcji elementarnych

Dzięki znalezionym już przez nas wzorom na pierwsze pochodne możemy teraz bez trudu (np. indukcyjnie) dowieść, że wiele spośród funkcji elementarnych to funkcje n–krotnie różniczkowalne dla **dowolnego** n. Tak jest np. z funkcjami: wykładniczymi, potęgowymi (określonymi na $\mathbb{R}_+$), wielomianami (określonymi na $\mathbb{R}$), logarytmami, sin oraz cos. Co więcej, katalog takich funkcji można bardzo rozszerzyć dzięki poniższemu rezultatowi będącemu wnioskiem (choć może nie we wszystkich punktach trywialnym[75]) z twierdzenia o własnościach rachunkowych pochodnej (tw. V.1).

Twierdzenie V.8 (własności rachunkowe n–krotnego różniczkowania). *Suma, iloczyn i iloraz funkcji f i g różniczkowalnych n–krotnie w punkcie x_0 są funkcjami n–krotnie różniczkowalnymi w x_0 oraz zachodzi*

1. $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$, $(\alpha \cdot f)^{(n)}(x_0) = \alpha \cdot f^{(n)}(x_0)$, *dla* $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. *(wzór Leibniza rzędu n)* $(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$.

Złożenie $g \circ f$ funkcji f różniczkowalnej n–krotnie w x_0 z funkcją g różniczkowalną n–krotnie w $f(x_0)$ jest n–krotnie różniczkowalne w x_0.

Jeżeli I — przedział oraz $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$ jest odwracalna i n–krotnie różniczkowalna oraz $f'(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in I$, to f^{-1} jest n–krotnie różniczkowalna. **B.D.**

Przy użyciu tego twierdzenia otrzymujemy m. in. n–krotną różniczkowalność dla dowolnego n funkcji: tg, ctg, arctg, arcctg, a także funkcji arcsin i arccos obciętych do przedziału $(-1; 1)$.

Dziwić może nieco brak w powyższym twierdzeniu wzorów na n–tą pochodną ilorazu oraz złożenia. Dla ilorazu wzór taki można by jeszcze ewentualnie wypisać, choć byłby on dość skomplikowany. Natomiast wzór na n–tą pochodną złożenia jest już tak makabrycznie skomplikowany, że zapisanie go w zwięzłej formie jest nie lada sztuką! Zachęcam do wypisania go tylko dla $n = 3$ (i sądzę, że to wystarczy, by powyższą opinię podzielić...).

⋄ Klasy C^n i C^∞

Na koniec tego podrozdziału — dwa często spotykane oznaczenia: klasa $C^n(D)$ to zbiór wszystkich tych funkcji określonych na D, które są n–krotnie różniczkowalne oraz ich n–ta pochodna $f^{(n)}$ jest funkcją ciągłą, a klasa $C^\infty(D)$ — tych, które są n–krotnie różniczkowalne dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $C^\infty(D) \subset C^n(D)$ przy dowolnym $n \in \mathbb{N}$ (dlaczego?). Używa się też sformułowania: f **jest klasy** C^n (odp. **klasy** C^∞). Zamiast C^0 piszemy na ogół C, czyli $C(D)$, to po prostu zbiór wszystkich ciągłych funkcji $f : D \to \mathbb{R}$.

[75] Choć osiągalnym przy tak już dalece rozwiniętej przez nas teorii — patrz — Zadania.

6. Druga pochodna i wypukłość

Spośród n–tych pochodnych dwie — mianowicie pierwsza i druga wyróżniają się ze względu na ich liczne zastosowania i czytelną interpretację geometryczną. O pierwszej już powiedzieliśmy nieco. Teraz w formie bardzo skrótowej zajmiemy się drugą pochodną. Najpopularniejsze zastosowanie ma ona chyba w fizyce — np. określa wartość przyśpieszenia (podczas gdy pierwsza — prędkości) punktu poruszającego się „jednowymiarowo”, ale też każdej ze współrzędnych punktu poruszającego w wielu wymiarach (wtedy różniczkowana funkcja określa odpowiednią współrzędną położenia punktu, a zmienna to czas).

◇ Funkcje wypukłe i wklęsłe

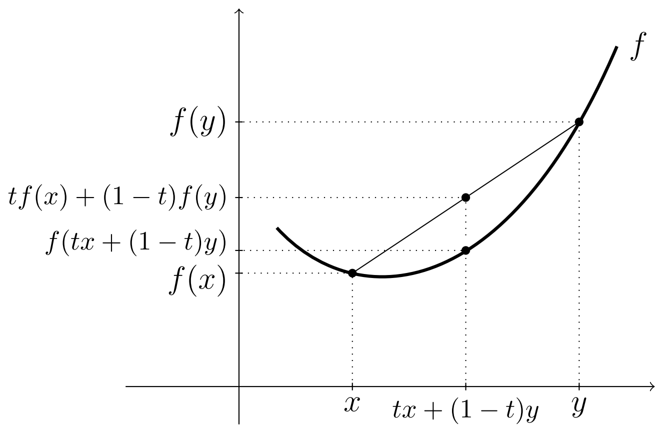
Znak pierwszej pochodnej ma ścisły związek z dość „geometryczną” własnością funkcji jaką jest monotoniczność. Tymczasem, jak zaraz zobaczymy, znak drugiej pochodnej wiąże się z inną, też bardzo geometryczną własnością — mianowicie z wypukłością. Przypomnijmy tu, że podzbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ [76] jest *wypukły* wtw dla dowolnych $a, b \in A$ odcinek łączący a i b zawarty jest w A. Zdefiniujmy pojęcie *wypukłości funkcji* $f : I \to \mathbb{R}$ [77], gdzie I — przedział (I oznacza przedział w całym tym podrozdziale). Niech N_f oznacza zbiór punktów położonych „nieostro” **nad** wykresem f, tzn. $N_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \geqslant f(x)\}$.

Definicja. *$f : I \to \mathbb{R}$ jest* ***wypukła*** *wtw N_f jest zbiorem wypukłym; f jest* ***wklęsła*** *wtw $(-f)$ jest wypukła.*

Uwaga. Oczywiście, w definicji wypukłości funkcji wystarczy zakładać, że każda *cięciwa wykresu*, tzn. odcinek łączący dwa punkty wykresu, zawiera się w N_f, a zatem zapisując ten fakt w formie analitycznej uzyskujemy, że f jest wypukła wtw

$$\forall_{x,y \in I}\ \forall_{t \in [0;1]}\ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \tag{V.8}$$

(patrz rys. 11).



Rysunek 11. Przy wypukłości cięciwa leży nad wykresem.

Analogiczny warunek, tyle że z nierównością w stronę przeciwną, równoważny jest wklęsłości funkcji.

[76] Tu standardowo oznaczamy przez X^k iloczyn kartezjański k egzemplarzy zbioru X.

[77] Uwaga! Z formalnego punktu widzenia taka funkcja to to samo co jej wykres, a więc pewien podzbiór $\mathbb{R}^2$. Jednak wypukłość f jako takiego właśnie zbioru jest zupełnie **czym innym** niż wypukłość f jako funkcji, o czym przekonamy się za chwilę.

◇ Nierówność Jensena

Warunek (V.8), wyrażający wypukłość funkcji, można łatwo uogólnić do warunku dotyczącego n punktów z odcinka I zamiast tylko dwóch punktów x i y.

Fakt (nierówność Jensena). *Niech $n \in \mathbb{N}_2$. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtw*

$$\forall_{x_1,\ldots,x_n \in I} \forall_{\substack{t_1,\ldots,t_n \in [0;1], \\ t_1+\ldots+t_n=1}} f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i). \tag{V.9}$$

Dowód.
„$\Longleftarrow$" — oczywisty z uwagi powyżej (wystarczy rozważyć $t_1 = t$, $t_2 = 1 - t$, $t_3 = \ldots = t_n = 0$ oraz $x_1 = x$, $x_2 = y$, a pozostałe x_i — dowolne),
„$\Longrightarrow$" — przy założeniu wypukłości łatwo wykazać indukcyjnie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_2$ zachodzi (V.9). W dowodzie „kroku indukcyjnego" wygodnie jest użyć (V.8). □

Jeżeli zastosować nierówność Jensena do pewnych odpowiednio dobranych funkcji f (oraz odpowiednich x_i, t_i), można uzyskać wiele ciekawych, ważnych i znanych nierówności. Nieco przykładów zostało umieszczonych w zadaniach.

◇ Wypukłość a własności różniczkowe funkcji

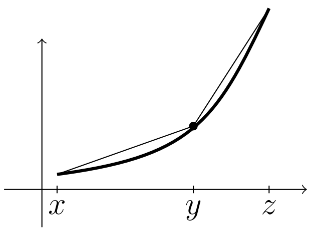
Zasadnicze pytania, na które należałoby odpowiedzieć zanim zacznie się stosować nierówność Jensena, są następujące:

> *Jak rozpoznać, czy dana funkcja jest wypukła? Czy można to zrobić prościej niż poprzez bezpośrednie sprawdzenie warunku* (V.8)*?*

Okazuje się, że w przypadku tych funkcji, dla których umiemy „wyliczyć" pochodną odpowiedź jest nietrudna.

Twierdzenie V.9. *Jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to f jest wypukła (wklęsła) wtw f' jest rosnąca (malejąca).*

Dowód.
W oparciu o (V.8) nietrudno wykazać charakteryzację wypukłości w terminach „wzrostu" ilorazów różnicowych zawartą w poniższym lemacie (patrz rys. 12).



Rysunek 12. Prawa cięciwa jest bardziej (nie mniej) stroma od lewej.

Lemat. *Funkcja f jest wypukła wtw dla dowolnych x, y, $z \in I$ takich, że $x < y < z$ zachodzi*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

B.D.

Tezę twierdzenia łatwo uzyskać teraz z lematu, wykorzystując definicję pochodnej jako granicy ilorazu różnicowego oraz twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (tw. V.4). □

To twierdzenie pozwala nam uzyskać wypukłość bądź wklęsłość wielu funkcji elementarnych obciętych do odpowiednich przedziałów. Np. funkcje wykładnicze są wypukłe, $\log_a$ jest wklęsły przy $a > 1$ oraz wypukły dla $0 < a < 1$, funkcja potęgowa (określona na $[0; +\infty)$) z wykładnikiem $\alpha \geqslant 1$ jest wypukła, a z wykładnikiem $\alpha \in [0; 1]$ — wklęsła[78)], sinus obcięty do $[0; \pi]$ jest wklęsły.

Gdy funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna, charakteryzacja wypukłości sprowadza się na mocy twierdzenia V.9 jedynie do badania znaku drugiej pochodnej. Uwaga: zamiast $f^{(2)}(x)$ używa się często oznaczenia

$$f''(x).$$

Wniosek. *Jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, to f jest wypukła (wklęsła) wtw*

$$\forall_{x \in I}\ f''(x) \geqslant 0 \ (\leqslant 0).$$

7. Wzór Taylora

⋄ Pierwsza pochodna i przybliżenie funkcją afiniczną

Gdy znamy wartość funkcji f w punkcie x_0 i wiemy, że f jest w tym punkcie ciągła, to możemy powiedzieć, że mamy jakąś informację o wartościach tej funkcji f w punktach „bliskich x_0" — wiemy mianowicie, że są one „bliskie $f(x_0)$". Ściślej, mamy

$$f(x) = f(x_0) + R_0(x), \qquad \text{gdzie} \quad R_0(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Gdy założymy nieco więcej — różniczkowalność w x_0, to fakt, że $f'(x_0)$ jest odpowiednią granicą ilorazu różnicowego można równoważnie zapisać w taki sposób:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R_1(x), \qquad \text{gdzie} \quad \frac{R_1(x)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Oczywiście mamy w szczególności także $R_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, ale informacja, że $\frac{R_1(x)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ jest znacznie mocniejsza (dlaczego?). Inaczej mówiąc, wydaje się, że przybliżenie f „w pobliżu x_0" przez funkcję afiniczną zadaną wzorem

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

którą znamy, o ile tylko znamy wartości $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, jest „lepsze" niż poprzednie przybliżenie funkcją stale równą $f(x_0)$.

⋄ Wielomian i reszta Taylora

Powstaje naturalne pytanie, czy znając $f^{(k)}(x_0)$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$ będziemy w stanie uzyskać coraz lepsze przybliżenia, w podobnym rozumieniu. Okazuje się, że odpowiedź jest nietrudna. Funkcja przybliżająca f „w pobliżu x_0" jest tym razem pewnym wielomianem wyznaczonym przez liczby $f(x_0)$,...,$f^{(n)}(x_0)$. Nazywamy go *wielomianem Taylora*, a dokładniej, n–tym *wielomianem Taylora funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy przez T_{n,f,x_0}, albo krócej przez T_n, gdy f i x_0 są ustalone. Wielomian $T_n : D \to \mathbb{R}$, gdzie D — dziedzina f, zadany jest wzorem[79)] :

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{V.10}$$

[78)] Co prawda, gdy $\alpha < 1$, to brak różniczkowalności w 0, ale wtedy mamy wypukłość po obcięciu funkcji do $(0; +\infty)$, skąd na całej dziedzinie łatwo (jak?) uzyskać wypukłość dzięki ciągłości (patrz też zadanie 42).
[79)] T_n można też traktować jako funkcję określoną np. na całym $\mathbb{R}$.

W szczególności, uprzednio wypisana przez nas funkcja przybliżająca funkcję f była w obu przypadkach $n = 0$ i $n = 1$ równa właśnie odpowiedniemu T_n. Tak jak już zapowiedzieliśmy, wielomian T_n „dość dokładnie" przybliża f „w pobliżu" x_0. I czasami właśnie taka całkiem nieścisła informacja

$$„f \approx T_n"$$

nazywana bywa *wzorem Taylora* („$\approx$" to: „równa się w przybliżeniu"). Inny zapis tego samego, to

$$f = T_n + R_n, \tag{V.11}$$

gdzie R_n — „małe w pobliżu x_0". Oczywiście sama formuła (V.11) nie jest żadnym matematycznym twierdzeniem — to nic więcej niż po prostu definicja funkcji R_n, tzn.

$$R_n := f - T_n,$$

gdzie T_n zadane jest przez (V.10) (gdy potrzeba zaznaczyć zależność od f i x_0 piszemy R_{n,f,x_0} zamiast R_n). Funkcję R_n nazywa się *n–tą resztą Taylora* (funkcji f w punkcie x_0). Istnieje wiele uściśleń w.w. wzoru Taylora, mogących w jakimś sensie wyrażać „małość" reszty Taylora. Poznamy tu dwa z nich.

◇ Postać Peano reszty Taylora

Pierwsze z zapowiadanych twierdzeń to twierdzenie Peano, będące uogólnieniem przytoczonych na wstępie wyników dla $n = 0$ i $n = 1$.

Twierdzenie V.10 (Peano o postaci reszty Taylora). *Jeżeli f jest n–krotnie różniczkowalna w x_0 oraz x_0 ma otoczenie w dziedzinie f będące przedziałem*[80]*, to*

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Dowód.
Stosując $(n-1)$–krotnie regułę de l'Hospitala sprowadzamy badanie granicy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ do badania granicy $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{n!}\left[\dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0)\right]$ [81], równej 0 na mocy definicji $f^{(n)}(x_0)$. □

Tezę twierdzenia Peano wygodniej niekiedy zapisać w postaci takiej:

$$f(x) = T_n(x) + (x-x_0)^n \cdot r(x), \quad \text{gdzie } \lim_{x \to x_0} r(x) = 0.$$

Bardzo często to twierdzenie jest znacznie zgrabniejszym narzędziem do obliczania granic funkcji niż sama reguła de l'Hospitala. Pozwala ono bowiem *de facto* zastąpić wielomianem nawet dość skomplikowaną funkcję (zastępujemy odpowiednio dobranym wielomianem Taylora tej funkcji + „nieistotną" resztą). Problem sprowadza się więc najczęściej do trywialnego zadania polegającego na obliczeniu granicy ilorazu dwóch wielomianów. Jednocześnie stosując tę metodę, chyba lepiej „czujemy" rozwiązanie niż wtedy, gdy używamy nieco „magicznej" reguły de l'Hospitala.

Przykład. Obliczmy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}.$$

[80] Patrz uwaga 3 str.77.
[81] Zachęcam do samodzielnego szczegółowego prześledzenia.

Weźmy $f(x) := \sqrt{1+x}$, $x > -1$. Mamy $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$. Stąd dla $x_0 = 0$

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

i z twierdzenia Peano $\sqrt{1+x} = T_2(x) + x^2 \cdot r(x)$, gdzie $r(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Stąd

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\frac{1}{8}x^2}{x^2} + r(x) \right) = -\frac{1}{8}.$$

⋄ Notacja „o–małe"

Warto jeszcze wspomnieć w kontekście tezy twierdzenia Peano o tzw. notacji *o–małe* często stosowanej dla skrócenia zapisu rozmaitych formuł, czy rachunków. Mianowicie napis „$f(x) = o(g(x))$ przy $x \to x_0$" oznacza po prostu, że $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Często, gdy wiadomo o jakie chodzi x_0, pisze się tylko „$f(x) = o(g(x))$". Co więcej, używany również bywa zapis typu „$u(x) = h(x)+o(g(x))$", oznaczający to samo, co „$u(x)-h(x) = o(g(x))$". Np. tezę twierdzenia Peano można by zapisać:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Taka notacja bywa wygodna, ale należy zachować ostrożność. Np. dwa „o" nie muszą być sobie równe, choć są zapisane tym samym symbolem. A zatem z tego, że $e^x - 1 - \frac{x^2}{2} = x + o(x^2)$ oraz $\sin x = x + o(x^2)$ **nie wynika**, że $\sin x = e^x - 1 - \frac{x^2}{2}$. Dlatego dla początkujących polecam jednak raczej całkiem ścisły zapis w stylu: $\sin x = x + r(x) \cdot x^2$, gdzie $r(x)$ ma granicę 0 w 0. Dla różnych funkcji, a co za tym idzie — różnych „r–ów", można wtedy, dla ich odróżnienia, zastosować numerację r_1, r_2 itd.

⋄ Postać Lagrange'a reszty Taylora

Zapowiadana, druga wersja wzoru Taylora umożliwi znacznie konkretniejsze szacowanie „błędu" (czyli reszty Taylora) pomiędzy funkcją a jej wielomianem Taylora. Takie szacowanie nie daje się uzyskać w oparciu o twierdzenie Peano, zawierające tylko informację o pewnej granicy związanej z tym błędem. Niestety jednak nie dostaniemy nic „za darmo". Będziemy musieli przyjąć mocniejsze założenia o funkcji f.

Twierdzenie V.11 (Lagrange'a o postaci reszty Taylora). *Jeżeli f jest $(n+1)$–krotnie różniczkowalna w przedziale $(x_0?x)$ oraz n–ta pochodna f jest ciągła w punktach x_0 i x, to istnieje $c \in (x_0?x)$ taki, że*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{V.12}$$

Dowód.
Rozważmy dwie pomocnicze funkcje $\varphi, \psi \colon [x_0?x] \to \mathbb{R}$ zadane wzorami (t jest zmienną):

$$\varphi(t) := f(x) - T_{n,f,t}(x), \quad \psi(t) := (x - t)^{n+1}.$$

Do tych funkcji zastosujemy twierdzenie Cauchy'ego (tw. V.5). Istnieje zatem $c \in (x_0?x)$ takie, że

$$(\varphi(x_0) - \varphi(x)) \cdot \psi'(c) = (\psi(x_0) - \psi(x)) \cdot \varphi'(c). \tag{V.13}$$

Uwzględniając teraz, że dla $t \in (x_0?x)$

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n, \quad \psi'(t) = -(n+1)(x - t)^n$$

(rachunki prowadzące do wzoru na $\varphi'(t)$ pozostawiam Państwu...) oraz

$$\varphi(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \psi(x) = 0,$$

$$\varphi(x_0) = R_{n,f,x_0}(x) = R_n(x), \quad \psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1},$$

po podstawieniu do (V.13) otrzymujemy (V.12). □

Uwagi.

1. Nieco może zawiłe założenia twierdzenia można oczywiście nieco wzmocnić i zakładać po prostu, że f jest $(n+1)$–krotnie różniczkowalna w $[x_0?x]$. Otrzymamy nieco słabsze twierdzenie, ale na ogół wystarczające do typowych zastosowań.

2. Gdy $n = 0$, to $T_0(x) = f(x_0)$, więc uzyskujemy dokładnie twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (tw. V.4).

3. Należy pamiętać o tym, że liczba c z tezy twierdzenia, nie jest żadną „uniwersalną" stałą, ale może zależeć dosłownie od wszystkiego, tj. od f, x_0, x oraz n.

⋄ Znajdowanie przybliżeń i szacowanie błędu

Najbardziej chyba typowy przykład zastosowania twierdzenia Lagrange'a o postaci reszty Taylora to znajdowanie przybliżeń wymiernych rozmaitych liczb z kontrolą wielkości błędu przybliżenia.

Przykład. Dotąd niezbyt wiele wiedzieliśmy na temat wartości liczby e. Właściwie jedynie, że $2 < e < 3$ (choć dzięki definicji e oszacowanie z dołu łatwo można było poprawić). Obecnie bez trudu możemy np. wykazać, że „$e = 2,7...$"[82] . Rozważmy bowiem $f = \exp$ oraz $x_0 = 0$, $x = 1$. Mamy $e = f(1) = T_n(1)+R_n(1)$, gdzie $T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp(0)}{k!} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ oraz z twierdzenia V.11 $R_n(1) = \frac{\exp(c_n)}{(n+1)!}$ dla pewnego $c_n \in (0;1)$. W szczególności zatem $0 < R_n(1) < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Biorąc zatem $n = 5$ uzyskujemy przybliżenie

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,71(6)$$ [83]

z błędem mniejszym niż $\frac{3}{6!} = \frac{3}{720} = \frac{1}{240}$, a zatem, zgodnie z obietnicą, „$e = 2,7...$". Przy odrobinie większej pracowitości możemy też uzyskać „$e = 2,71...$", co pozostawiam Czytelnikom.

⋄ Rozwinięcia w szeregi Taylora

Inne ważne zastosowanie twierdzenia V.11 to rozwijanie pewnych funkcji w szeregi potęgowe, o czym wspominaliśmy już nieco w podrozdziale IV.4. Niech f będzie funkcją różniczkowalną dowolną liczbę razy w punkcie x_0. Wówczas szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ma poprawnie zdefiniowane współczynniki. Nazywamy go *szeregiem Taylora funkcji* f o środku w x_0 (a w szczególnym przypadku $x_0 = 0$ używa się też nazwy *szereg Maclaurina*). Naturalne pytanie:

[82] Te „..." oznaczają jakieś dalsze cyfry w *rozwinięciu dziesiętnym*, którego nie definiowaliśmy dotąd i niestety nie zdefiniujemy (z braku czasu). Zachęcam do samodzielnego zdefiniowania i wykazania istnienia dla dowolnej liczby rzeczywistej.

[83] Zapis dziesiętny „z okresem" (x) uważam (z konieczności) za znany.

czy szereg ten jest zbieżny do $f(x)$?

nie ma oczywiście jednoznacznej ogólnej odpowiedzi. W każdym razie często, **nie jest prawdą**, że

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

dla wszystkich x, mimo iż oczekiwalibyśmy być może, że taka równość zachodzi. Odpowiedź pozytywna jest na pewno dla $x = x_0$, i czasem (tj. dla pewnych f) **tylko** wtedy! Dla pewnych „dobrych" funkcji równość zachodzi dla wszystkich x z pewnego otoczenia $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punktu x_0 ($\delta > 0$ oczywiście) — mówimy wtedy, że f jest *analityczna* w otoczeniu punktu x_0. Pytanie powyższe może być trudniejsze niż pytanie o samą zbieżność powyższego szeregu (którym zajmowaliśmy się w podrozdziale IV.4.) — tu ważna jest nie tylko zbieżność, ale również to, by suma była równa właśnie $f(x)$.

Przykładami „w pełni pozytywnymi", tj. takimi, dla których zbieżność szeregu Taylora o środku x_0 do $f(x)$ ma miejsce przy każdym $x \in \mathbb{R}$ są między innymi funkcje exp, sin, cos przy $x_0 = 0$. Dla wymienionych funkcji dowód tego faktu jest dość oczywisty, bowiem jak łatwo wyliczyć, szeregi Taylora, które otrzymamy w tych przykładach to znane nam już dobrze wcześniej (z rozdziału IV) szeregi potęgowe dające rozwinięcia funkcji exp, sin i cos. Nie jest to wcale sprawa przypadku — jest to związane z następującym ogólnym wynikiem.

Fakt. *Jeżeli f posiada rozwinięcie w szereg potęgowy o środku w x_0 zbieżne do $f(x)$ dla $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ przy pewnym $r > 0$, to tym szeregiem potęgowym jest szereg Taylora funkcji f o środku w x_0.*

Na razie pominiemy dowód — wrócimy do niego jeszcze w następnym rozdziale.

W szczególności z powyższego faktu wynika różniczkowalność w x_0 dowolną liczbę razy funkcji zadanej szeregiem potęgowym o środku w x_0. Jest to też wzmocnienie faktu dotyczącego jednoznaczności rozwijania funkcji w szereg potęgowy — patrz np. zadanie 21. Jeżeli więc znamy już jakieś rozwinięcie funkcji f w szereg potęgowy, to odpowiedź na zadane wcześniej pytanie o zbieżność szeregu Taylora do $f(x)$ jest pozytywna (dla odpowiednich x). Tak jest zatem np. dla funkcji $f(x) := \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (-1; 1)$ bo $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ dla takich x (szereg geometryczny).

◇ Uogólniony wzór dwumianowy Newtona

Na zakończenie naszych rozważań dotyczących wzoru Taylora zajmijmy się jeszcze jedną z pominiętych tu dotąd funkcji — mianowicie funkcją potęgową z dowolnym wykładnikiem $\alpha \in \mathbb{R}$ (powyżej mieliśmy jedynie $\alpha = -1$), dla której nie znamy jak dotąd żadnego ogólnego rozwinięcia w szereg potęgowy. Pewne informacje o takim rozwinięciu uzyskamy właśnie z twierdzenia Lagrange'a o postaci reszty Taylora.

Przykład. Wzór

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

w którym $\alpha \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, to klasyczny wzór Newtona, a własciwie jego szczególny przypadek, z którego jednak bez trudu można wyprowadzić postać pełną (dla potęgi sumy dwóch dowolnych liczb — patrz Fakt ze strony 19). Rozważmy teraz dowolne $\alpha \in \mathbb{R}$. Niech $f\colon (-1; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^\alpha$. Łatwo wyliczyć, że $f^{(n)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - (n - 1))$, a zatem szereg Taylora dla f o środku w 0 ma postać

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

gdzie

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - (n-1))}{n!}$$

jest uogólnieniem znanego symbolu Newtona na przypadek dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ (dla $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geqslant n$ obie definicje pokrywają się oczywiście). Nietrudno tu wykazać w oparciu o twierdzenie V.11, że gdy $0 < x < 1$, to $R_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (szczegóły zostawiam Czytelnikom — patrz zadanie 29). Niestety informacje zawarte w tym twierdzeniu okazują się za słabe, by przy dowolnym α wykazać tego typu zbieżność dla $-1 < x < 0$, choć zbieżność taka także ma miejsce. Potrzebne są tu jednak inne metody, o których tu mówić nie będziemy. Na mocy definicji reszty Taylora R_n uzyskana tu (częściowo) zbieżność reszt do zera oznacza po prostu, że

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Oczywiście, gdy $\alpha \in \mathbb{N}$, to powyższa suma „kończy się” *de facto* na $n = \alpha$, bowiem wtedy przy $n \geqslant \alpha + 1$ zachodzi $\binom{\alpha}{n} = 0$, a zatem uzyskany wzór jest więc uogólnieniem przytoczonego na początku klasycznego wzoru Newtona.

Zadania do Rozdziału V

$\forall$ [84]) 1. Znajdź wzory na pochodne funkcji zadanych poniższymi wzorami:

(a) x^x dla $x > 0$;

(b) $x^{(x^7)}$ dla $x > 0$;

(c) $(x^x)^7$ dla $x > 0$;

(d) $\log_{(2+x^2)}(1 + x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

$\forall$ [85]) 2. Rozważamy tzw. *funkcje hiperboliczne* sinh, cosh i tgh będące swego rodzaju analogami funkcji trygonometrycznych, zadane wzorami:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wykaż wzory:

(a) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$;

(b) $\sinh' = \cosh$;

(c) $\cosh' = \sinh$;

(d) $\operatorname{tgh}'(x) = \frac{1}{(\cosh x)^2} = 1 - (\operatorname{tgh} x)^2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Wykaż, że funkcje $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\cosh|_{\mathbb{R}_+})\colon \mathbb{R}_+ \to (1; +\infty)$ oraz $\operatorname{tgh}\colon \mathbb{R} \to (-1; 1)$ są odwracalne, oraz znajdź wzory na pochodne funkcji do nich odwrotnych **w oparciu o twierdzenie V.1**.

$\forall$ [86]) 3. Znajdź maksymalne przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne oraz kresy dla funkcji zadanych poniższymi wzorami:

(a) x^x dla $x > 0$;

(b) $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $x^{1000} \cdot e^{-x}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\frac{x^4}{(1+x)^3}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

(e) $|x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2} \ln|x|$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(f) $\sin(\sin x)$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(g) $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\forall$ [87]) 4. Niech $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Znajdź $\sup A$ i $\inf A$, gdy $a_n =$

(a) $\sqrt[n]{n}$;

(b) $n^5 \cdot 2^{-n}$.

5. Dla poniższych $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbadaj, czy f jest różniczkowalna oraz czy f' jest ciągła (w przypadku różniczkowalności f)

---

[84]) Przynajmniej 2 przykłady.

[85]) W części dot. funkcji odwrotnej — tylko dla tgh.

[86]) Przynajmniej 3 przykłady.

[87]) Przynajmniej jeden z podpunktów.

(a) $f(x) = |x|^\alpha$ w zależności od parametru $\alpha > 0$;

(b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \leqslant 0 \\ ax + b & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$;

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$ w zależności od parametru $\alpha > 0$.

$\forall$ 6. Niech $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a;b)$. Definiujemy *pochodną symetryczną* w x_0

$$f'_{sym}(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

o ile granica ta istnieje.

(a) Wykaż, że jeśli $f'(x_0)$ istnieje, to istnieje też $f'_{sym}(x_0)$ i $f'_{sym}(x_0) = f'(x_0)$.

(b) Czy z istnienia $f'_{sym}(x_0)$ wynika istnienie $f'(x_0)$?

(c) Czy z istnienia i skończoności $f'_{sym}(x_0)$ wynika ciągłość f w x_0?

7. Dla $c \in \mathbb{R}$ definiujemy $f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $f_c(x) = x^2(\varphi(x) + c)$, gdzie

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Wykaż, że jeżeli $c \geqslant 1$, to f_c posiada minimum lokalne w 0, ale przy dowolnym $r > 0$ funkcja $(f_c)|_{[0;r]}$ ani $(f_c)|_{[-r;0]}$ nie jest monotoniczna. Dla jakich c minimum lokalne w 0 jest ściśle[88)] ? Czy f_c jest różniczkowalna?

$\forall$[89)] 8. Wykaż poniższe nierówności, wykorzystując twierdzenia rachunku różniczkowego (tj. dotyczące pochodnych):

(a) $(x + y)^\alpha \leqslant (\geqslant) x^\alpha + y^\alpha$ dla $x, y \geqslant 0$ i $\alpha \leqslant (\geqslant) 1$;

(b) $xe^{-x^2} + ye^{-y^2} + ze^{-z^2} \leqslant \sqrt{\frac{9}{2e}}$ dla $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(c) $\ln(1 + x) > (<) x - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$ $(-1 < x < 0)$;

(d) $\sqrt[3]{1 + x} > 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ dla $x > 0$.

9. Znajdź pewne (ewentualnie wersja troszkę trudniejsza: wszystkie) takie $\alpha \in \mathbb{R}$, że dla dowolnego $x > -1$ zachodzi $\ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \alpha x^3$.

$\forall$[90)] 10. Ile pierwiastków (tzn. rozwiązań) posiada równanie (x jest "niewiadomą", $x \in \mathbb{R}$):

(a) $x^{11} - 11x + 1 = 0$;

(b) $6 \ln(x^2 + 1) = e^x$;

(c) $a^x = x$, w zależności od parametru $a > 0$.

11. Zbadaj dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x^5 - 10x^2 + ax$ jest

(a) różnowartościowa,

[88)] Minimum lokalne f w x_0 jest *ścisłe* (inna nazwa: *istotne*) wtw $\exists_{\delta>0} \forall_{\substack{x \in D \\ 0<|x-x_0|<\delta}} f(x) > f(x_0)$. Analogicznie dla maksimum.

[89)] Przynajmniej 2 przykłady.

[90)] Przynajmniej 1 przykład.

(b) monotoniczna,

(c) ściśle monotoniczna.

12. Zbadaj dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $g_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g_a(x) = ax + \sin x$ jest

    (a) rosnąca;

    (b) ściśle rosnąca;

    (c) malejąca;

    (d) ściśle malejąca.

$\forall$ 13. Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Wykaż, że $f' = f$ wtw istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f = c \cdot \exp$. Uwaga: to już nieco „poważniejsze" równanie różniczkowe, niż $f' = 0$...

14. Wykaż, że dla dowolnego $x > -1$ zachodzi

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}.$$

    Czy podobnego typu rezultat ma miejsce dla $x < -1$?

15. Rozważamy wszystkie trójkąty wpisane w okrąg o promieniu 1. Czy wśród nich istnieje taki, którego obwód jest największy? Jeżeli tak, to jaki jest jego obwód?

16. Trójkąty prostokątne o obwodzie 1 obracamy wokół przeciwprostokątnej. Czy dla jakiegoś z nich objętość otrzymanej bryły obrotowej jest największa? Jeśli tak, to znajdź tę największą objętość.

    Uwaga: w zadaniach 15 i 16 oczywiście można stosować znane ze szkoły wzory geometryczne.

17. Niech $f \colon [a;b) \to \mathbb{R}$ będzie ciągła w a i różniczkowalna w $(a;b)$. Wykaż, że jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x \to a+} f'(x) =: g$, to także istnieje $f'_+(a)$ i równa jest g. Uwaga! Wynika z tego, że ewentualna nieciągłość pochodnej funkcji różniczkowalnej (na przedziale) nie może być „zbyt trywialna" — nie mogą pojawiać się zwykłe „skoki", tj. sytuacje, gdy granica istnieje, ale jest różna od wartości w punkcie granicznym.

18. Niech I będzie przedziałem oraz $f \colon I \to \mathbb{R}$ — funkcją różniczkowalną. Wykaż, że f jest lipschitzowska (patrz zadanie 17) wtw f' jest ograniczona.

19. Wykaż jednostajną ciągłość funkcji zadanych wzorami:

    (a) $\sqrt{x^2 + x}$ dla $x \geqslant 0$;

    (b) $\sin(\ln x)$ dla $x \geqslant 1$.

    Wskazówka: wykaż najpierw, że jeśli f jest jednostajnie ciągła na dwóch przedziałach, które nie są rozłączne, to jest też jednostajnie ciągła na ich sumie.

20. Wykaż, że pochodna funkcji różniczkowalnej na przedziale posiada własność Darboux, tzn. wykaż, że jeżeli $f \colon [a;b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $c \in (f'(a)?f'(b))$, to istnieje $x \in (a;b)$ takie, że $f'(x) = c$.

$\forall$ [91] 21. Wykorzystując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (twierdzenie V.4) zbadaj zbieżność następujących szeregów:

[91] Przynajmniej 1 przykład.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\sqrt{n}}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sqrt{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}}$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}(n))$.

$\forall$ [92] 22. Znajdź poniższe granice. Każdy z przykładów **spróbuj** zbadać korzystając z reguły de l'Hospitala i **odrębnie**, korzystając ze wzoru Taylora.

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$;

(d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{1-\cos x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})$;

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\ln(1+x)+x^3}{\sqrt{1-e^{-x^4}}}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + e^x - (1+2x+\frac{x^2}{2})}{x^4}$.

$\forall$ [93] 23. Znajdź przybliżenia wymierne poniższych liczb z podaną dokładnością d:

(a) $\sqrt{e}$, $d = 0,001$;

(b) $\cos^2 1$, $d = 0,001$;

(c) $\ln(\frac{3}{2})$, $d = \frac{1}{20}$.

24. Poniższe liczby zapisz w postaci sum szeregów o wyrazach wymiernych:

(a) $\frac{\sin\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;

(b) $\ln(\frac{8}{3})$;

(c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

25. Udowodnij pominięte w dowodzie z wykładu przypadki w regule de l'Hospitala (twierdzenie V.7).

26. Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$ będzie n–krotnie różniczkowalna w $x_0 \in D$, przy czym x_0 ma otoczenie w D będące przedziałem. Wykaż, że jeśli w jest wielomianem stopnia $\leqslant n$ takim, że $f(x) = w(x) + o((x-x_0)^n)$, przy $x \to x_0$, to $w = T_{n,f,x_0}$.

27. Wykorzystując wzór Taylora zbadaj zbieżność poniższych szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right)$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}\right)$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} |\operatorname{tg}(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{\sqrt{n}}|^\alpha$ w zależności od $\alpha > 0$;

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}\right)$ w zależności od $a, b, c > 0$.

[92] Przynajmniej 3 przykłady.
[93] Przynajmniej 1 przykład.

28. Wykaż, że jeśli $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ dla $x \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieją $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n.$$

Jakim wzorem zadane są powyższe współczynniki b_k?

29. Wykaż, że $(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ dla $x \in [0; 1)$ w oparciu o twierdzenie Lagrange'a o postaci reszty Taylora (twierdzenie V.11).

30. Niech $f\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ będzie n–krotnie różniczkowalna w $c \in (a; b)$, $n \geqslant 2$. Wykaż następujące kryterium na ekstrema.

Jeżeli $f^{(k)}(c) = 0$ dla dowolnego $k = 1, \ldots, n - 1$ oraz $\alpha := f^{(n)}(c) \neq 0$, to

- *jeżeli n jest parzyste i $\alpha > 0 (< 0)$, to f posiada ścisłe minimum (maksimum) lokalne w c;*
- *jeżeli n jest nieparzyste, to f nie posiada ekstremum lokalnego w c.*

31. Wykaż część twierdzenia V.8 dotyczącą iloczynu oraz złożenia funkcji n–krotnie różniczkowalnych w punkcie (dowody pominięte na wykładzie).

32. Znajdź wzory na $f^{(n)}(x)$ dla

(a) $f(x) = xe^x$, $n = 1000$;

(b) $f(x) = x^2 \sin(5x)$, $n = 100$.

33. Znajdź $\sup\{n \in \mathbb{N}\colon f \in C^n(\mathbb{R})\}$ dla następujących $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^7 & \text{dla } x > 0 \\ x^5 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$;

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$.

34. Wykaż, że jeżeli $f\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to f jest ciągła. Znajdź przykład pokazujący, że funkcja wypukła może nie być ciągła w końcu przedziału określoności (gdy koniec ten do przedziału należy).

35. Wykaż, że jeżeli $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest ciągła (I jest przedziałem) oraz $\forall_{x,y\in I}\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$, to f jest wypukła.

36. Rozstrzygnij, które spośród operacji: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, składanie, różniczkowanie (oczywiście, przy założeniu, że dana operacja jest wykonalna) zachowują wypukłość funkcji.

37. Przedstaw szczegóły dowodu faktu o nierówności Jensena (str. 91).

$\forall$ [94] 38. Wykaż następujące nierówności w oparciu o nierówność Jensena:

(a) $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ dla $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^\alpha \leqslant (\geqslant) n^{\alpha-1} \cdot \sum_{k=1}^n x_k^\alpha$ dla $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \geqslant 1$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$;

[94] Przynajmniej 1 przykład.

(c) $n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^k$ dla $n \in \mathbb{N}$.

39. Wykaż, że jeśli $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła oraz różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a;b)$, to wykres f „leży nad” styczną do wykresu f dla x_0, tzn. $\forall_{x \in (a;b)}\ f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

40. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, które są wypukłe i wklęsłe jednocześnie.

41. Wykaż, że jeżeli f jest wypukła i odwracalna, to f^{-1} jest wypukła lub wklęsła (wyjaśnij od od czego to zależy).

42. Wykaż, że jeżeli $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $f|_{(a;b)}$ jest wypukła, to f też jest wypukła.

VI Zbieżność ciągów i szeregów funkcji

[około $1\frac{1}{2}$ wykładu]

1. O różnych pojęciach zbieżności ciągu funkcji

W II i III rozdziale zajmowaliśmy się zbieżnością ciągów i szeregów liczbowych. Ale czy można mówić o zbieżności w przypadku ciągów, których wyrazami są nie liczby lecz funkcje (takie ciągi nazywamy *ciągami funkcyjnymi*)? No cóż, o tym że można, świadczy choćby tytuł tego rozdziału. Co więcej, w odróżnieniu od sytuacji jaką mieliśmy dla ciągów liczbowych, poznamy nie jeden, ale dwa, a właściwie nawet trzy rodzaje zbieżności ciągów funkcyjnych.

⋄ Zbieżność punktowa

Niech $f, f_n : D \to \mathbb{R}$ [95] dla $n \geqslant n_0$. Naturalne wydaje się określenie, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f wtw

$$\forall_{x\in D}\ f_n(x) \to f(x). \tag{VI.1}$$

Taki rodzaj zbieżności nazywamy *zbieżnością punktową* i oznaczamy symbolem[96]

$$f_n \to f.$$

A zatem $f_n \to f$ wtw zachodzi (VI.1). Gdy taka zbieżność zachodzi, to funkcję f nazywamy *granicą* ciągu $\{f_n\}$, mówimy o niej także *granica punktowa*. Oczywiście, jeśli granica ta istnieje, to jest ona wyznaczona jednoznacznie (bo mamy taką jednoznaczność dla ciągów liczbowych $\{f_n(x)\}$).

Przyjrzyjmy się nieco głębiej punktowej zbieżności. Gdy skorzystamy z definicji granicy ciągu liczbowego $\{f_n(x)\}_{n\geqslant n_0}$, to powyższą definicję możemy w sposób równoważny zapisać w postaci

$$\forall_{x\in D}\ \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{n\geqslant N}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{VI.2}$$

W warunku (VI.2) indeks N możemy zatem dobierać w sposób zależny zarówno od ϵ jak i od $x \in D$.

⋄ Zbieżność jednostajna

Gdy przypomnimy sobie pojęcie ciągłości jednostajnej (patrz podrozdział IV.3) oraz to, co odróżnia jej definicję od definicji „zwykłej" ciągłości, naturalny wyda nam się pomysł, by zmodyfikować warunek (VI.2) i dopuścić jedynie „jednostajny po x" (tzn., taki sam dla wszystkich x, niezależny od x) dobór N do ϵ. Otrzymamy wtedy warunek następujący [97]

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{n\geqslant N}\ \forall_{x\in D}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{VI.3}$$

[95] Na ogół w tym rozdziale D oznacza dziedzinę rozważanych funkcji; zazwyczaj będziemy tak przyjmować bez przypominania.

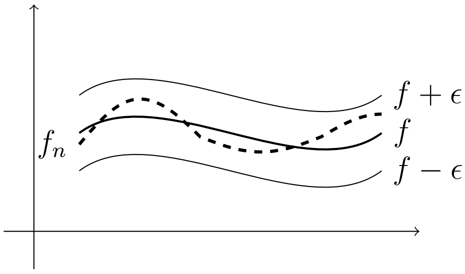
[96] Ten zapis przy pomocy „$\to$" jest nieco dwuznaczny, bo tego samego symbolu używaliśmy przy rozważaniu granicy ciągu liczbowego (choćby przed chwilą, w (VI.1)).

[97] Pamiętajmy o tym, że sąsiadujące ze sobą kwantyfikatory ogólne „$\forall$" możemy przestawiać — dotyczy to zarówno (VI.2) jak i (VI.3). Zmianą **istotną** jest dopiero przestawienie „$\forall$" i „$\exists$".

(patrz rys. 13 — wykres f_n dla wszystkich $n \geqslant N$ jest zawarty cały w „pasie" pomiędzy $f - \epsilon$ a $f + \epsilon$). I takim właśnie warunkiem definiujemy drugi rodzaj zbieżności — *zbieżność jednostajną*, którą oznaczamy symbolem

$$f_n \rightrightarrows f.$$

Tzn., $f_n \rightrightarrows f$ wtw zachodzi (VI.3). Przy tej zbieżności, o funkcji granicznej f mówimy często *granica jednostajna.*



Rysunek 13. Wykres f_n jest cały zawarty w pasie pomiędzy $f - \epsilon$ a $f + \epsilon$.

Uwagi.

1. Zbieżność jednostajna to „lepszy" rodzaj zbieżności, tzn.,

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \to f$$

(implikacji w przeciwną stronę nie ma — przykład będzie niedługo). W szczególności granica jednostajna jest więc też granicą punktową.

2. Granica jednostajna, jeśli istnieje dla danego ciągu funkcyjnego, to jest wyznaczona jednoznacznie. Wystarczy użyć uwagę 1. oraz jednoznaczność dla granicy punktowej.

⋄ Norma supremum i wygodne kryterium zbieżności jednostajnej

W warunku (VI.3), ze względu na „dowolność" $\epsilon > 0$, nierówność „$< \epsilon$" można oczywiście zastąpić przez „$\leqslant \epsilon$". Korzystając teraz z definicji kresu górnego możemy ten warunek zapisać równoważnie w postaci

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{n\geqslant N}\ \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon, \text{ [98]}$$

co (analogicznie jak przed chwilą) równoważne jest warunkowi z „$< \epsilon$", a to z kolei oznacza dokładnie, że

$$\lim_{n\to+\infty} (\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|) = 0$$

czyli, że ciąg **liczbowy**[99] $\{\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|\}_{n\geqslant n_0}$ ma granicę 0.

Jeżeli więc dla $g : D \to \mathbb{R}$ oznaczymy

$$\|g\| := \sup_{x\in D} |g(x)|,$$

to na mocy powyższych rozwazań możemy sformułować następujące zwięzłe kryterium.

[98] Symbol $\sup_{x\in X} g(x)$ to skrót (wygodny) od $\sup\{g(x) \in \mathbb{R} : x \in X\}$.

[99] Ściślej, ciąg ten ma wyrazy w $\overline{\mathbb{R}}$ (może zdarzyć się $+\infty$), ale definicja granicy dla tego typu ciągów przenosi się w sposób oczywisty.

Fakt.

$$f_n \rightrightarrows f \quad wtw \quad \|f_n - f\| \to 0.$$

Jest to wygodna „alternatywna definicja” zbieżności jednostajnej, bowiem sprowadza ona problem do badania zbieżności pewnego ciągu liczbowego.

Symbol $\|\cdot\|$ używany jest do oznaczania *normy*, czyli wielkości wyrażającej w jakimś sensie długość wektorów — tu tymi wektorami są funkcje o wartościach w $\mathbb{R}$ [100]. Można definiować rozmaite normy — ta konkretna tu zdefiniowana bywa nazywana „normą supremum” i czasem oznacza się ją przez $\|\cdot\|_\infty$. Każda norma musi spełniać kilka warunków (o tym wspomnimy jeszcze w przyszłości...) i wybierając jakąś normę zawsze możemy w sposób taki jak wyżej zdefiniować pewien „nowy” rodzaj zbieżności. My jednak teraz zadowolimy się tą jedną[101] normą.

◇ Obie zbieżności w prostym przykładzie

Przykład. Niech $D \subset R$ i $f_n : D \to \mathbb{R}$ niech będą zadane wzorem

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

dla $x \in D$ i $n \in \mathbb{N}$. Rozważymy parę rozmaitych dziedzin D. Jednak ponieważ $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \frac{x}{n} \to 0$, zatem niezależnie od wyboru D mamy $f_n \to 0$, gdzie tym razem 0 nie oznacza liczby 0 lecz **funkcję** stałą równą 0 (przypominam też dwuznaczny sens „$\to$” użytej tu przed chwilą w dwóch różnych znaczeniach ...). A zatem jeżeli również $f_n \rightrightarrows f$ dla pewnej funkcji f, to na mocy uwagi 1 i 2 jedynym „kandydatem” na f jest także $f = 0$.

Niech $D = \mathbb{R}$. Mamy wtedy

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{x}{n}| = +\infty \not\to 0,$$

zatem $f_n \not\rightrightarrows 0$, czyli $\{f_n\}$ nie jest ciągiem funkcyjnym zbieżnym jednostajnie!

Teraz rozważmy $D = [-5; 7]$. Wówczas

$$\|f_n - 0\| = \frac{1}{n} \sup_{x\in[-5;7]} |x| = \frac{7}{n} \to 0,$$

zatem $f_n \rightrightarrows 0$ w tym przypadku. Nietrudno uogólnić to na przypadek dowolnego ograniczonego zbioru D — wówczas również $f_n \rightrightarrows 0$, gdyż $M_D := \sup_{x\in D} |x| < +\infty$, skąd $\|f_n - 0\| = \frac{1}{n} M_D \to 0$. A zatem by nasz ciąg $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ był zbieżny jednostajnie zbiór D nie może być „zbyt duży”. Np. $D = \mathbb{R}$ był „za duży” na zbieżność jednostajną, ale ciąg $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ był jednostajnie zbieżny dla D będącego dowolnym przedziałem $[a; b]$.

◇ Zbieżność niemal jednostajna

Powyższy przykład sugeruje wprowadzenie jeszcze jednego rodzaju zbieżności. Będzie on dotyczył tylko funkcji określonych na przedziałach [102]. Będzie to tzw. *zbieżność niemal jednostajna*, którą będziemy oznaczać symbolem

$$f_n \overset{\rightarrow}{\dashrightarrow} f.$$

Jeśli $f, f_n : I \to \mathbb{R}$, gdzie I — przedział, to $f_n \overset{\rightarrow}{\dashrightarrow} f$ wtw

$$\forall_{a,b\in I}\ (f_n|_{[a;b]}) \rightrightarrows (f|_{[a;b]}).$$

[100] Wektory — to po prostu elementy przestrzeni liniowej, w naszym wypadku chodzi o przestrzeń wszystkich funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami.
[101] Tak naprawdę nie jedną, bo każdy zbiór D wyznacza inną normę supremum, „mierzącą” funkcje określone na zbiorze D. W razie potrzeby odróżnienia możemy np. używać oznaczenia $\|\cdot\|_D$.
[102] Można to też uogólnić na funkcje określone na innych zbiorach, ale tu nie będziemy się tym zajmować.

Już samo oznaczenie sugeruje, że ten rodzaj zbieżności jest gdzieś „pomiędzy” zbieżnością punktową a jednostajną, tzn. że

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \overset{-}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \to f$$

(np. dla dowodu drugiej implikacji wystarczy rozważać sytuację gdy $a = b$). Przykład takiej sytuacji, że $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny niemal jednostajnie, ale nie jednostajnie uzyskamy biorąc $D = \mathbb{R}$ w przykładzie powyżej. Oczywiście, także przy tym rodzaju zbieżności granica jest zdefiniowana jednoznacznie i może być nią jedynie granica punktowa. Może się zdarzyć, że to nowe pojęcie zbieżności nie wnosi jednak nic naprawdę nowego. Tak będzie np. wtedy, gdy I samo jest już przedziałem domkniętym — wtedy zbieżność jednostajna i niemal jednostajna są tym samym.

Dla wprowadzonych tu różnych rodzajów zbieżności ciągów funkcyjnych można sformułować nieco twierdzeń analogicznych do odpowiednich twierdzeń dotyczących ciągów liczbowych — np. do twierdzenia o rachunkowych własnościach granicy, w przypadku zbieżności punktowej. Nie wszystko jednak przenosi się automatycznie przy innych rodzajach zbieżności. Dla zbieżności jednostajnej, jedną z takich ważnych analogii jest odpowiednik twierdzenia o zupełności II.7, w którym zamiast „zwykłego” warunku Cauchy'ego pojawia się „jednostajny” warunek Cauchy'ego. Sprawę tę jednak odkładamy do zadań (patrz — zadanie 5).

2. Szeregi funkcyjne

◇ Trzy rodzaje zbieżności szeregów funkcyjnych

Niech $f_n : D \to \mathbb{R}$ dla $n \geqslant n_0$. *Szereg funkcyjny* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ określamy zupełnie analogicznie jak w przypadku szeregów liczbowych. Utożsamiamy go bowiem z *ciągiem sum częściowych* $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$, który jest w tej sytuacji ciągiem funkcyjnym, przy czym

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} f_k \quad \text{dla } n \geqslant n_0.$$

Definicja każdego z trzech rodzajów zbieżności (punktowej, jednostajniej i niemal jednostajnej) w odniesieniu do szeregu funkcyjnego jest, jak łatwo się domyślić, następująca: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ *jest zbieżny punktowo/jednostajnie/niemal jednostajnie* wtw $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest zbieżny (odpowiednio) punktowo/jednostajnie/niemal jednostajnie. *Sumą szeregu funkcyjnego* nazywa się granicę **punktową** ciągu $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ (o ile istnieje).

Punktowa zbieżności szeregu funkcyjnego $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ to, jak natychmiast widać, po prostu zbieżność szeregu liczbowego $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ dla wszystkich x z dziedziny funkcji f_n (wspólnej dla wszystkich n). Jednak badanie zbieżności jednostajnej lub niemal jednostajnej szeregów nie jest już tak proste...

◇ Inne spojrzenie na szeregi potęgowe

Poznane w IV rozdziale szeregi potęgowe też można utożsamiać z pewnymi szeregami funkcyjnymi. W rozdziale IV szeregiem potęgowym nazywaliśmy rodzinę szeregów liczbowych postaci $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ rozważanych dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Jednak zamiast mówić o rodzinie szeregów liczbowych, możemy wyrazy tego szeregu potraktować jako funkcje zmiennej x. Tzn. będziemy mieli tu do czynienia z szeregiem funkcyjnym $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, gdzie funkcje $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są dla $n \geqslant 0$ zadane wzorami $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ dla $x \in \mathbb{R}$. Tak właśnie będziemy rozumieli pojęcie szeregu potęgowego w tym rozdziale. Gdy „obetniemy” szereg potęgowy do jego zbioru zbieżności, to, na mocy samej definicji tego zbioru, otrzymamy szereg funkcyjny zbieżny punktowo. Jak wkrótce zobaczymy, można jednak uzyskać znacznie więcej...

◇ Warunek konieczny zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych

Jak wspominaliśmy, badanie zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych bywa sprawą w praktyce niełatwą. Jednak pewne warunki konieczne bywają dość łatwe do sprawdzenia. Sformułujemy najbardziej „popularny” z takich warunków.

Twierdzenie VI.1 (o warunku koniecznym zbieżności jednostajnej szeregów). *Jeżeli* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny, to* $f_n \rightrightarrows 0$.

Jak widać, jest to analog twierdzenia o warunku koniecznym zbieżności szeregu liczbowego — zresztą dowód jest także nieco podobny...

Dowód.
Niech $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} f_k$ dla $n \geqslant n_0$. Dla pewnej funkcji F zachodzi

$$\|S_n - F\| \to 0,$$

a zatem także $\|S_{n-1} - F\| \to 0$. Stąd mamy dla $n \geqslant n_0 + 1$

$$0 \leqslant \|f_n\| = \|S_n - S_{n-1}\| = \|(S_n - F) + (F - S_{n-1})\| \leqslant \|S_n - F\| + \|F - S_{n-1}\|, \quad \text{(VI.4)}$$

przy czym ostatnia nierówność to konsekwencja następującego lematu.

Lemat (nierówność trójkąta dla $\|\cdot\|$).

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Dowód lematu.
Wystarczy użyć zwykłej nierówności trójkąta (dla modułu $|\cdot|$) oraz definicji kresu górnego. □

Teraz z (VI.4) i z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\|f_n\| \to 0$, czyli $f_n \rightrightarrows 0$. □

Oczywiście istnieje wiele innych warunków koniecznych zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego. Np. takim warunkiem koniecznym jest oczywiście jego punktowa zbieżność.

◇ Warunek dostateczny i kryterium Weierstrassa

Kolejne twierdzenie daje pewien wygodny warunek dostateczny. Przypomina ono nieco twierdzenie o zbieżności szeregu liczbowego bezwzględnie zbieżnego.

Twierdzenie VI.2 (warunek dostateczny zbieżności jednostajnej). *Jeżeli szereg liczbowy* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\|$ *jest zbieżny, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód pominiemy, ale warto wiedzieć, że nietrudno go uzyskać w oparciu o wspominany (lecz nie wypisany...) niedawno jednostajny warunek Cauchy'ego — zachęcam do samodzielnych prób dowodu.

Zauważmy, że sformułowany wcześniej warunek konieczny, tzn. $\|f_n\| \to 0$ jest też „warunkiem koniecznym dla warunku dostatecznego” tzn. dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\| < +\infty$.

Uwaga. Przyjrzyjmy się trochę praktycznej skuteczności obu powyższych twierdzeń. Rozważmy więc ciąg $\{\|f_n\|\}_{n \geqslant n_0}$. Są trzy możliwości:

1. $\|f_n\| \not\to 0$ — wówczas $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ **nie** jest jednostajnie zbieżny na mocy twierdzenia VI.1.
2. $\|f_n\| \to 0$, ale $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\| = +\infty$ — wówczas powyższe twierdzenia **nie dają nic**.
3. $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\| < +\infty$ — wtedy $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ **jest** jednostajnie zbieżny na mocy twierdzenia VI.2.

A zatem mamy poważną lukę w praktycznej użyteczności powyższych twierdzeń, opisaną możliwością 2. Co robić gdy na taką sytuację natrafimy? Ogólnej recepty nie ma — trzeba każdy taki przypadek badać indywidualnie. Czasem jednak „ratunek" jest banalny: warto sprawdzić czy $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ jest w ogóle punktowo zbieżny — jeśli nie, to tym bardziej nie może być zbieżny jednostajnie. Przykład takiej sytuacji, to $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n}$, rozważany dla $x \in [0;1]$ (tzn. $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{n}$). Mamy wówczas $\|f_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, ale $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Jednak tu brak zbieżności punktowej, bo szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n}$ jest zbieżny jedynie dla $x = 0$.

Sformułujemy teraz często stosowany wniosek z twierdzenia VI.2.

Wniosek (kryterium Weierstrassa). *Jeżeli istnieje ciąg liczbowy $\{c_n\}_{n \geqslant n_0}$ taki, że*

$$\forall_{n \geqslant n_0,\ x \in D}\ |f_n(x)| \leqslant c_n \tag{VI.5}$$

oraz $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny

Dowód.

Na mocy (VI.5) i definicji normy supremum oraz definicji kresu górnego, dla dowolnego $n \geqslant n_0$ mamy

$$0 \leqslant \|f_n\| \leqslant c_n,$$

a zatem z kryterium porównawczego $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\|$ — zbieżny. Teza wynika więc z twierdzenia VI.2. □

⋄ Zbieżność niemal jednostajna szeregów potęgowych

Jednym z zastosowań powyższego kryterium jest ważny wynik dotyczący szeregów potęgowych. Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$. Poniżej funkcje będące jego wyrazami rozważamy jedynie na otwartym przedziale jego zbieżności tzn. na $Z_0 := (x_0 - R; x_0 + R)$ (czyli funkcje te obcinamy do Z_0).

Fakt. *Szereg potęgowy jest niemal jednostajnie zbieżny w swoim otwartym przedziale zbieżności*[103] *.*

Dowód.

Oczywiście możemy ograniczyć się do przypadku $x_0 = 0$. Dla dowodu niemal jednostajnej zbieżności powinniśmy dowodzić zbieżność jednostajną szeregu powstałego po obcięciu odpowiednich funkcji do dowolnego przedziału $[a; b]$ zawartego w $(-R; R)$. Wystarczy więc rozważać $a = -r$ i $b = r$, gdzie $0 \leqslant r < R$. Ale dla dowolnego $x \in [-r; r]$ i $n \geqslant 0$ mamy $|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n = |a_n r^n|$, a szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n r^n|$ jest zbieżny, gdyż $r \in (-R, R)$ a szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny w otwartym przedziale zbieżności (patrz np. lemat ze strony 67). A zatem potrzebna nam zbieżność jednostajna wynika z kryterium Weierstrassa. □

3. Własności granic ciągów i szeregów funkcyjnych

Zajmiemy się tu pytaniem:

> *Jakie własności wyrazów ciągu (ewentualnie szeregu) funkcyjnego przenoszą się na jego granicę?*

Ściślej — zajmiemy się głównie ciągłością i różniczkowalnością. Nietrudno znaleźć przykłady pokazujące, że żadna z tych własności nie zachowuje się przy zbieżności punktowej (zadanie 7).

---

[103] Zbieżność **niemal** jednostajna w „całym" przedziale zbieżności też zachodzi, ale dowód tego jest już subtelniejszy ...

◇ Ciągłość granicy jednostajnej i niemal jednostajnej

Zaczniemy od problemem ciągłości.

Twierdzenie VI.3 (o ciągłości granicy). *Jeżeli funkcje f_n są ciągłe dla $n \geqslant n_0$ oraz $f_n \rightrightarrows f$, to f jest ciągła. Czyli krótko: granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest ciągła.*

Dowód.
Wykażemy ciągłość f w dowolnym punkcie $x \in D$. Niech $x_n \in D$, $x_n \to x$. Musimy wykazać, że $f(x_n) \to f(x)$. Mamy

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &= |(f(x_n) - f_k(x_n)) + (f_k(x_n) - f_k(x)) + (f_k(x) - f(x))| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant 2\|f - f_k\| + |f_k(x_n) - f_k(x)| \end{aligned} \tag{VI.6}$$

dla dowolnych n i k. Niech $\epsilon > 0$. Ponieważ $\|f_n - f\| \to 0$, zatem dobierzmy $k \geqslant n_0$ takie, że $\|f_k - f\| < \frac{\epsilon}{3}$. Ponieważ f_k jest ciągła w x_0, zatem dobierzmy takie N, że $|f_k(x_n) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ dla dowolnego $n \geqslant N$. Wówczas korzystając z (VI.6) dla dowolnego $n \geqslant N$ mamy $|f(x_n) - f(x)| < \frac{2}{3}\epsilon + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. □

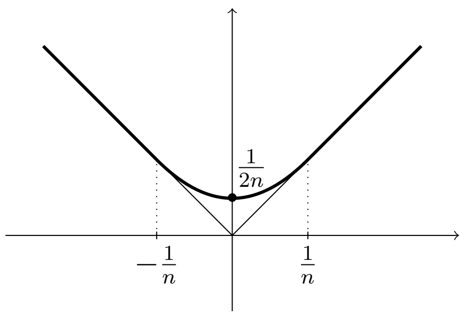
Ponieważ ciągłość jest własnością „lokalną”, zatem prostą konsekwencją powyższego twierdzenia jest podobny wynik dotyczący zbieżności niemal jednostajnej.

Wniosek. *Jeżeli funkcje f_n są ciągłe dla $n \geqslant n_0$ oraz $f_n \overset{\to}{\rightrightarrows} f$, to f jest ciągła.*

Uwaga. Wniosek ten pozwala nam m.in. przedstawić alternatywny dowód części twierdzenia o ciągłości sumy szeregu potęgowego (twierdzenie IV.14) — części dotyczącej ciągłości w otwartym przedziale zbieżności. Wystarczy bowiem skorzystać z udowodnionego niedawno faktu o niemal jednostajnej zbieżności dla takiego szeregu (strona 109).

◇ Różniczkowalność granicy

Niestety sprawa różniczkowalności funkcji okazuje się być bardziej złożona niż sprawa ciągłości. Analog twierdzenia VI.3 dla różniczkowalności nie jest bowiem prawdziwy. Łatwo się o tym przekonać konstruując odpowiednio przybliżenia funkcji $|\cdot|$ (nieróżniczkowalnej w 0) funkcjami różniczkowalnymi — proszę samodzielnie wykonać tę konstrukcję w oparciu o rysunek 14.



Rysunek 14. Nieróżniczkowalną funkcję $|\cdot|$ można łatwo „przybliżyć” jednostajnie funkcjami różniczkowalnymi poprzez „zaokrąglanie kantu”...

Sprawa różniczkowalności granicy nie jest jednak całkiem beznadziejna, można bowiem wykazać twierdzenie następujące.

Twierdzenie VI.4 (o różniczkowalności granicy). *Jeżeli $f_n, f, g\colon I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem oraz funkcje f_n są różniczkowalne i spełnione są warunki:*

1. $f_n \to f$,

2. $f_n' \rightrightarrows g$,

to f też jest różniczkowalna oraz $f' = g$. **B.D.**

A zatem dla różniczkowalności granicy potrzebna jest nie tyle jednostajna zbieżność samego ciągu $\{f_n\}$, co raczej ciągu pochodnych: $\{f_n'\}$.

Uwaga 1. W powyższym twierdzeniu w punkcie 2. wystarczy zakładać zbieżność niemal jednostajną. Wynika to (podobnie jak w wypadku kwestii ciągłości — patrz uwaga po twierdzeniu VI.3) z tego, że różniczkowalność jest pojęciem „lokalnym".

Uwaga 2. Zarówno twierdzenie VI.3 jak i twierdzenie VI.4 mają swoje odpowiedniki dla szeregów funkcyjnych (proszę je sformułować samodzielnie, jako proste ćwiczenie). Związane jest to z faktem, że zarówno ciągłość jak i różniczkowalność zachowują się przy dodawaniu funkcji, a zatem odpowiednie ciągi sum częściowych będą się składać z funkcji ciągłych, ewentualnie różniczkowalnych, o ile to samo założymy o wyrazach szeregu funkcyjnego. W przypadku różniczkowania takie twierdzenie dotyczące szeregów nazywane jest twierdzeniem „o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie" i jego teza zapisywana bywa w formie (nieco nieścisłej...)

$$\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n'.$$

◇ Różniczkowanie sumy szeregu potęgowego

Wniosek. *Szereg potęgowy można w otwartym przedziale zbieżności różniczkować „wyraz po wyrazie". Tzn., jeżeli S jest sumą szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ oraz Z_0 jest jego otwartym przedziałem zbieżności, to dla $x \in Z_0$ funkcja S jest różniczkowalna w x oraz*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n.$$

W szczególności S jest klasy C^∞ w otwartym przedziale zbieżności.

Dowód.
Na mocy uwagi 1 wystarczy tu dowieść, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$ jest w Z_0 zbieżny niemal jednostajnie. A to z kolei wynika z faktu o niemal jednostajnej zbieżności szeregu potęgowego (ze str. 109) oraz z poniższego prostego lematu, który pozostawiam do dowodu Czytelnikom. □

Lemat. *Promienie zbieżności szeregów $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$ są równe.*

Uwaga. W oparciu o powyższy wniosek łatwo można udowodnić fakt ze strony 96 (mówiący o tym, że rozwinięcie w szereg potęgowy jest szeregiem Taylora dla sumy tego szeregu potęgowego).

A oto jeszcze jeden przykład zastosowania różniczkowania „wyraz po wyrazie".

Przykład (funkcja ζ [104]) Riemanna). Jak wiemy, dla dowolnego $x > 1$ szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ jest zbieżny. Zdefiniujemy zatem funkcję $\zeta\colon (1;+\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Nietrudno wykazać (zadanie 10), że funkcja ta jest n–krotnie różniczkowalna przy dowolnych n, tzn. że $\zeta \in C^\infty((1;+\infty))$.

[104]) Czytaj „dzeta".

4. Aproksymacja[105] funkcji ciągłych

W matematyce i jej zastosowaniach często zamiast danej funkcji f wygodnie jest rozważać jakieś jej przybliżenia funkcjami należącymi do pewnej określonej klasy funkcji.

Jaki to rodzaj przybliżenia i jaka klasa funkcji aproksymujących — to zależy już od konkretnej sytuacji. Możliwość znajdowania tego typu przybliżeń gwarantują różne tzw. *twierdzenia o aproksymacji*, czyli po prostu twierdzenia, które mówią, że dla funkcji f istnieje ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ złożony z funkcji odpowiedniej klasy zbieżny w odpowiednim sensie do f. Sformułuję tu tylko jedno takie twierdzenie — dotyczące aproksymacji funkcji ciągłej wielomianami.

Twierdzenie VI.5 (Weierstrassa). *Każda funkcja ciągła na* ***przedziale domkniętym*** *jest granicą jednostajną ciągu wielomianów.* **B.D.**

Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem dużo bardziej abstrakcyjnego twierdzenia Stone'a–Weierstrassa. Twierdzeniem podobnym do VI.5 jest twierdzenie o aproksymacji funkcji ciągłych funkcjami *kawałkami liniowymi* (ściślej: afinicznymi...) — patrz zadanie 13. Warto też wiedzieć o tym, że jest bardzo wiele różnych twierdzeń o aproksymacji, które dotyczą rozmaitych zbieżności (niekoniecznie spośród trzech rodzajów tu poznanych) oraz rozmaitych funkcji (niekoniecznie ciągłych). Np. dla wielu zastosowań ważne są rozmaite wyniki dotyczące aproksymacji tzw. *wielomianami trygonometrycznymi*, co jest ściśle związane z nieobecną w tym wykładzie teorią *szeregów Fouriera.*

[105] Aproksymacja = przybliżanie.

Zadania do Rozdziału VI

$\forall$ [106] 1. Zbadaj zbieżność punktową, jednostajną, niemal jednostajną ciągów funkcyjnych $\{f_n\}$ zadanych poniższymi wzorami:

(a) x^n **(1.)** dla $x \in [0;1]$; **(2.)** dla $x \in [0;1)$;

(b) $x^n - x^{n+1}$ dla $x \in [0;1]$;

(c) $x^n - x^{2n}$ dla $x \in [0;1]$;

(d) $\frac{1}{n+x}$ dla $x \in (0;+\infty)$;

(e) $\frac{nx}{1+n+x}$ dla $x \in [0;+\infty)$;

(f) $\sin(\frac{x}{n})$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(g) $\operatorname{arctg}(nx)$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(h) $x \operatorname{arctg}(nx)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

$\forall$ [107] 2. Zbadaj zbieżność punktową, jednostajną, niemal jednostajną szeregów funkcyjnych zadanych następującymi wzorami:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^4+x^4}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^2e^{-nx}$ dla $x \in (0;+\infty)$;

(e) $\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-nx}$ dla $x \in (0;+\infty)$;

(f) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ dla $x \in (0;+\infty)$;

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(\frac{x}{n})$ dla $x \in [-100;100]$;

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ dla $x \in [0;+\infty)$.

3. Zbadaj, które z poniższych „twierdzeń” dotyczących zbieżności jednostajnej są rzeczywiście **twierdzeniami** (tu $f, f_n, g, g_n \colon D \to \mathbb{R}$):

(a) $f_n \rightrightarrows f$ oraz $A \subset D$, to $f_n|_A \rightrightarrows f|_A$.

(b) $A \cup B = D$ oraz $f_n|_A \rightrightarrows f|_A$ i $f_n|_B \rightrightarrows f|_B$, to $f_n \rightrightarrows f$.

(c) $f_n \rightrightarrows f$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $(f_n + g_n) \rightrightarrows f + g$.

(d) $f_n \rightrightarrows f$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $(f_n \cdot g_n) \rightrightarrows f \cdot g$.

Zbadaj analogiczne „twierdzenia” dotyczące „$\to$” oraz „$\underset{\to}{\rightrightarrows}$”.

4. Wykaż, że jeśli $f_n \rightrightarrows f$, to $\|f_n\| \to \|f\|$ (także, gdy $\|f\| = +\infty$).

5. Po uważnej lekturze odpowiednich fragmentów wykładu odgadnij, napisz i zapisz w równoważnej postaci z użyciem $\|\cdot\|$ „jednostajny warunek Cauchy'ego” dla ciągów funkcyjnych. Następnie sformułuj i udowodnij „jednostajny” odpowiednik twierdzenia II.7 (o zupełności...).

6. W oparciu o twierdzenie wykazane w zadaniu powyższym udowodnij twierdzenie o warunku dostatecznym zbieżności jednostajnej dla szeregu funkcyjnego (tw. VI.2).

[106] Przynajmniej 2 przykłady z a)–e) i jeden z f)–h).
[107] Przynajmniej 2 przykłady.

$\forall$ 7. Znajdź przykłady ciągów funkcyjnych pokazujące, że przy zbieżności punktowej ani ciągłość ani różniczkowalność nie muszą się zachowywać (przy „przejściu do granicy”).

8. Wykaż, że wypukłość funkcji zachowuje się przy zbieżności punktowej (!!).

$\forall$ [108] 9. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność funkcji f, w przypadku różniczkowalności zbadaj znak $f'(0)$.

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}(\frac{x}{n^2})$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos\frac{x}{n} - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

10. Wykaż, że (patrz przykład ze strony 111):

(a) $\zeta \in C^1((1; +\infty))$;

(b) $\zeta \in C^\infty((1; +\infty))$.

$\forall$ 11. „Oblicz” sumy szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n \cdot n}$;

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{7^n}$.

12. Znajdź $f^{(n)}(0)$:

(a) $f(x) = \frac{1}{2+3x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$, $n = 1001$.

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ dla $x \in \mathbb{R}$; $n = 999, n = 1000$.

(c) $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$ dla $x \in (-1; 1)$; $n = 100$. Wskazówka: zapisz $f(x)$ jako $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ dla pewnych $A, B \in \mathbb{R}$.

13. Funkcja $g\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ jest *kawałkami liniowa* wtw istnieją liczby $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ takie, że $a_0 = a, a_k = b$ oraz $f\,|_{[a_{j-1}; a_j]}$ jest wielomianem stopnia $\leqslant 1$ dla dowolnego $j = 1, \ldots, k$. Wykaż, że każda funkcja ciągła określona na przedziale domkniętym jest granicą jednostajną ciągu funkcji kawałkami liniowych.

[108] Przynajmniej jeden przykład.

VII Rachunek całkowy

[około 3 wykładów]

1. Całka nieoznaczona

W tym podrozdziale zajmiemy się „operacją” odwrotną do różniczkowania. Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Każdą funkcję $F : D \to \mathbb{R}$ taką, że $F' = f$ nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f. Druga nazwa na funkcję pierwotną to *całka nieoznaczona.*

⋄ Istnienie i (nie)jednoznaczność

Oczywiście nie każda funkcja f posiada funkcję pierwotną, np. łatwo sprawdzić, że nie posiada jej funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

(dlaczego?). Co więcej, nawet jeśli istnieje funkcja pierwotna jakiejś funkcji, to nie jest ona wyznaczona jednoznacznie. Na szczęście, dla funkcji określonych na przedziale ta niejednoznaczność nie jest „duża”.

Fakt. *Jeżeli I — przedział, $f : I \to \mathbb{R}$ oraz F jest funkcją pierwotną funkcji f, to $F_1 : I \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną f wtw $F_1 = F + C$ dla pewnej funkcji stałej C.*

Dowód.
Oczywiście $(F + C)' = F' = f$. Jeżeli $F_1' = f$, to $(F_1 - F)' = f - f = 0$ zatem $F_1 - F$ jest stała, bo I — przedział (patrz wniosek ze strony 84). □

Oczywiście, gdy dziedzina funkcji nie jest przedziałem, to ta niejednoznaczność może być „większa”, np. dla funkcji zadanej wzorem $\frac{1}{x}$ okreśonej na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ funkcje pierwotne to wszystkie funkcje postaci:

$$F(x) = \ln|x| + \begin{cases} c_1 & \text{dla } x < 0 \\ c_2 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Pojawia się naturalne pytanie:

„dla jakich funkcji całka nieoznaczona w ogóle istnieje?”

W następnym podrozdziale wykażemy, że odpowiedź jest pozytywna np. dla wszystkich funkcji ciągłych określonych na przedziale.

⋄ Notacja

Tradycyjne oznaczenie na funkcję pierwotną, czyli całkę nieoznaczoną, to

$$\int f(x)dx.$$

To oznaczenie ma bardzo wiele wad. Na przykład napis $\int f(x)dx$ nie oznacza jednej funkcji, tylko całą ich klasę — nie bardzo wiadomo zatem jak się tym posługiwać. Można by to na siłę uściślić i wprowadzić rozmaite operacje — np. dodawanie — dla tego typu klas funkcji. Nie będziemy jednak tu tego robić i zgodnie z tradycją będziemy raczej traktować całkę nieoznaczoną „prawie tak jak funkcję” pamiętając, że to tak naprawdę cała ich klasa. Pomimo wad, ta notacja posiada też nieco zalet, o których wspomnimy później.

⋄ Trudności z rachunkami

Jak juz wspomnieliśmy, można wykazać istnienie funkcji pierwotnej dla „dobrych” funkcji. Jednak z praktycznego — rachunkowego — punktu widzenia ważne jest pytanie:

„jak obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji zadanej elementarnym wzorem?”

Czy można zrobić to tak samo łatwo, jak w przypadku różniczkowania? Odpowiedź brzmi: **NIE**! Przypomnijmy, że w przypadku różniczkowania mieliśmy — po pierwsze — wzory na pochodną podstawowych funkcji elementarnych — a po drugie — wzory rachunkowe na pochodną sumy, złożenia i iloczynu. I to właśnie gwarantowało nam możliwość praktycznego różniczkowania dowolnie skomplikowanych funkcji elementarnych. Co zatem mamy do dyspozycji w przypadku całkowania? Właściwie tylko to, co da się wywnioskować z wyżej wspomnianych wzorów dotyczących różniczkowania, niejako poprzez ich „odwrócenie”.

⋄ Kilka „odgadniętych” całek

A zatem np. konsekwencją wzorów na pochodną podstawowych funkcji elementarnych oraz faktu ze strony 115 są umieszczone w poniższej tabeli wzory na całki. Zawiera ona wzory opisujące funkcję i (obok) ogólną postać jej funkcji pierwotnej (n, k oznaczają tu dowolną liczbę całkowitą, natomiast C, C', C_k — dowolną liczbę rzeczywistą („stałą”)).

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^α; $(x > 0, \alpha \neq -1)$ lub $(x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
x^α; $x \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}_-$	$\begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & \text{gdy } \alpha \neq -1 \\ \ln\lvert x\rvert & \text{gdy } \alpha = -1 \end{cases} + \begin{cases} C_1 & \text{dla } x < 0 \\ C_2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$
e^x; $x \in \mathbb{R}$	$e^x + C$
a^x; $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$; $x \in \mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$; $x \in \mathbb{R}$	$\sin x + C$
$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$; $x \neq n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{tg} x + C_k$ dla $x \in (k \cdot \pi - \frac{\pi}{2}; k \cdot \pi + \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$; $x \neq n \cdot \pi$	$-\operatorname{ctg} x + C_k$ dla $x \in (k \cdot \pi; (k+1) \cdot \pi)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $x \in (-1; 1)$	$\arcsin x + C$ oraz $-\arccos x + C'$
$\frac{1}{1+x^2}$; $x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} x + C$ oraz $-\operatorname{arcctg} x + C'$

⋄ „Liniowość” całkowania

Niech teraz F, G będą odpowiednio funkcjami pierwotnymi funkcji f i g. Jako konsekwencję wzoru na pochodną sumy otrzymujemy oczywiście, że $F + G$ jest funkcją pierwotną $f + g$. Podobnie, gdy $a \in \mathbb{R}$, to $a \cdot F$ jest funkcją pierwotną $a \cdot f$. W zapisie tradycyjnym fakty te przedstawia się tak:

$$\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \quad \int (a \cdot f)(x)dx = a \int f(x)dx.$$

Podkreślam jednak znów, że powyższe wzory wymagają uściśleń (a ich całkiem ścisła wersja, to właśnie zdania je poprzedzające).

⋄ Całkowanie „przez części”

Z kolei natychmiastową konsekwencją wzoru na pochodną iloczynu dwóch funkcji jest fakt poniższy.

Fakt 1 (o całkowaniu „przez części”). *Jeśli f oraz g są różniczkowalne oraz H jest funkcją pierwotną funkcji $f' \cdot g$, to $f \cdot g - H$ jest funkcją pierwotną $f \cdot g'$.*

Dowód.
$(f \cdot g - H)' = f' \cdot g + f \cdot g' - f' \cdot g = f \cdot g'$. □

Tradycyjny — nieformalny zapis tego faktu ma postać:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx.$$

◇ Całkowanie „przez podstawienie”

Wreszcie, „odwrócenie” [109] twierdzenia o pochodnej złożenia (twierdzenie V.1 punkt b)) ma postać następującą:

Fakt 2 (o całkowaniu „przez podstawienie”). *Jeżeli g jest różniczkowalna i F jest funkcją pierwotną f, to $F \circ g$ jest funkcją pierwotną do $(f \circ g) \cdot g'$* [110] .

Dowód.
$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$. □

W zapisie tradycyjnym można by to przedstawić tak:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(y)dy, \quad \text{gdzie } y = g(x). \tag{VII.1}$$

◇ Zalety „dx–ów”

I właśnie przy tym wzorze objawia się główna zaleta owego dziwacznego tradycyjnego oznaczenia funkcji pierwotnej, a szczególnie jego tajemniczego zakończenia „dx”. Ma to bezpośredni związek z innym tradycyjnym oznaczeniem — na pochodną. Wspominaliśmy już o zapisie $g' = \frac{dg}{dx}$. Można pójść jeszcze dalej — skoro $y = g(x)$, to zapiszmy nieformalnie

$$g'(x) = \frac{dy}{dx}$$

i potraktujmy powyższy zapis tak jak ułamek. Wówczas pod „$\int$” z lewej strony wzoru ((VII.1)) uzyskamy: „$f(y)\frac{dy}{dx}dx = f(y)dy$”, czyli wyrażenie znajdujące się pod „$\int$” ze strony prawej. Ta mocno podejrzana manipulacja prowadzi na szczęście do całkiem ścisłego i prawdziwego wyniku opisanego w sformułowanym przed chwilą fakcie 2. Tak więc przy praktycznych rachunkach można posługiwać się tego typu „skracaniem dx–ów”, pod warunkiem jednak, że **zachowuje się pełną świadomość** jak to skracanie zastąpić ścisłą argumentacją przy pomocy faktu o całkowaniu przez podstawienie.

◇ Czego nam brak, co mamy

Wprawę w posługiwaniu się poznanymi tu wzorami zdobędziecie Państwo na ćwiczeniach. Teraz powrócimy natomiast do pytania o całkowanie funkcji elementarnych. To, czego nam brakuje najbardziej dotkliwie, to chyba wzory na całkę iloczynu i na całkę złożenia. Zamiast tego mamy pewne szczególne namiastki. Wzór na całkowanie przez części pozwala nam na scałkowanie tylko iloczynu postaci $f \cdot g'$ i to tylko wtedy, gdy umieliśmy scałkować $f' \cdot g$. Z kolei wzór na całkowanie przez podstawienie umożliwia scałkowanie nie samego złożenia $f \circ g$ ale tylko funkcji $(f \circ g) \cdot g'$ (ale za to nie musimy umieć całkować g — wystarczy, że umiemy zrobić to dla f). Wszystko to sprawia, że całkowanie jest w praktyce znacznie trudniejsze niż różniczkowanie. Ale też **znacznie ciekawsze**! To trochę jak rozwiązywanie

[109] To inne „odwrócenie” niż wtedy, gdy mowa o *twierdzeniu odwrotnym* (czyli związanym z implikacją w stronę przeciwną niż w danym twierdzeniu).
[110] Oczywiście zakładamy, że złożenie $f \circ g$ (a zatem automatycznie też $F \circ g$) jest określone.

łamigłówek ... No i tak jak należało się spodziewać, czasem — nawet dla dość „prostych” funkcji, praktyczne scałkowanie poprzez zapisanie całki jako funkcji elementarnej bywa po prostu **niewykonalne**... Jeden z bardziej znanych przykładów to całka

$$\int e^{(x^2)} dx \ ^{111)} .$$

◇ Całkowanie funkcji wymiernych

Nie da się więc scałkować wszystkiego, co chcieliśmy. Ale coś jednak scałkować się da. Przez kilkaset (około 200) lat wymyślono wiele metod radzenia sobie z różnymi typami całek. Jeden z najważniejszych takich typów to całki z funkcji wymiernych. Możliwość ich wyliczenia jest ważna nie tylko „sama dla siebie”. Wiele innych typów całek można sprowadzić właśnie do całek z funkcji wymiernych.

Rozważmy więc funkcję wymierną $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{w(x)}{v(x)}$, gdzie w i v są wielomianami, $\deg v \geqslant 1$ oraz $D = \mathbb{R} \setminus D_0$, gdzie D_0 jest zbiorem (skończonym) wszystkich pierwiastków rzeczywistych wielomianu v. Aby wyliczyć $\int f(x)dx$ postępujemy następująco.

Etap 1. (dzielenie z resztą) Zapisujemy $f(x)$ jako $u(x) + \frac{r(x)}{v(x)}$, gdzie $w(x) = u(x) \cdot v(x) + r(x)$, u, r — wielomiany i $\deg r < \deg v$. Ponieważ wyliczenie $\int u(x)dx$ jest proste (patrz tabela) zatem dalej wystarczy zająć się $\int \frac{r(x)}{v(x)} dx$.

Etap 2. (rozkład na ułamki proste) Wielomian v można (jak wiadomo z algebry) rozłożyć na iloczyn tzw. *wielomianów nierozkładalnych* (stopnia 1 lub 2), tzn.

$$v(x) = \alpha \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - x_s)^{k_s} \cdot (p_1(x))^{l_1} \cdot \dots \cdot (p_t(x))^{l_t}, \tag{VII.2}$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_1, \dots, x_s$ — różne parami pierwiastki wielomianu v, $p_1, \dots, p_t$ — różne parami wielomiany 2-go stopnia postaci

$$p_j(x) = (x - y_j)^2 + z_j^2, \quad j = 1, \dots, t,$$

gdzie $y_j, z_j \in \mathbb{R}$ i $z_j \neq 0$ oraz $k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_t \in \mathbb{N}$ [112)].

Znany algebraiczny fakt mówi, że w tej sytuacji funkcja wymierna zadana wzorem $\frac{r(x)}{v(x)}$ (dla $\deg r < \deg v$) jest sumą pewnej liczby *ułamków prostych*, tzn. funkcji wymiernych, z których każda opisana jest wzorem postaci

$$\frac{A}{(x - x_j)^k} \quad \text{lub} \quad \frac{Ax + B}{(p_i(x))^l},$$

gdzie $A, B \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, s$, $i = 1, \dots, t$ oraz $k, l \in \mathbb{N}$, $k \leqslant k_j$ natomiast $l \leqslant l_j$. W praktyce znalezienie rozkładu na taką sumę sprowadza się łatwo do rozwiązania pewnego układu równań („liniowych”).

Etap 3. (całkowanie ułamków prostych) Pozostaje więc scałkować każdy z ułamków prostych. W pierwszym przypadku wystarczy po „podstawieniu $y = x - x_j$” zajrzeć do tabeli całek (funkcja potęgowa z wykładnikiem $-k$). Z drugim jest troszkę trudniej. Najpierw zauważmy, że

$$\frac{Ax + B}{(p_i(x))^l} = \frac{\frac{A}{2} \cdot p_i'(x)}{(p_i(x))^l} + \frac{\tilde{B}}{(p_i(x))^l}$$

111) Dowód, że $\int e^{(x^2)} dx$ nie jest „funkcją” elementarną to rzecz zupełnie **nie** trywialna ...

112) Przy czym oczywiście w rozkładzie (VII.2) część z iloczynem $(x - x_j)^{k_j}$ lub część z iloczynem $(p_j^{(x)})^{l_j}$ może się okazać „pusta”.

dla pewnego $\tilde{B} \in \mathbb{R}$ (dokładniej: $\tilde{B} = B + Ay_j$). Pierwszy z tych składników łatwo scałkować przez „podstawienie $y = p_i(x)$". Drugi przez pewne podstawienie „afiniczne" (tzn. „$y = ax+b$", ale z jakimi a, b?) łatwo sprowadzić do całki z funkcji zadanej wzorem

$$\frac{1}{(x^2+1)^l},$$

na którą można znaleźć wzór rekurencyjny po l (zadanie 3), a dla $l = 1$ całkowanie daje, z dokładnością do stałej, funkcję arctg (patrz tabela).

Przykład. Znajdź $\int \frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 3x + 2}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2} dx$ (na dziedzinie $D = \mathbb{R} \setminus D_0$, gdzie D_0 — zbiór pierwiastków rzeczywistych wielomianu z mianownika). Niech f oznacza powyższą funkcję podcałkową. Mamy dla $x \in D$

$$f(x) = x + \frac{x^3 + 3x^2 + x + 2}{(x^3 + x^2 + 2x + 2)(x+1)} = x + \frac{x^3 + 3x^2 + x + 2}{(x^2+2)(x+1)^2}.$$

Możliwe są więc następujące postaci ułamków prostych w rozkładzie drugiego składnika:

$$\frac{Ax+B}{x^2+2},\ \frac{C}{(x+1)^2},\ \frac{C'}{x+1}.$$

Zatem $D_0 = \{-1\}$ oraz dla $x \in D$

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 3x^2 + x + 2}{(x^2+2)(x+1)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{C'}{x+1} = \\ &= \frac{(Ax+B)(x+1)^2 + C(x^2+2) + C'(x^2+2)(x+1)}{(x^2+2)(x+1)^2},\end{aligned}$$

a stąd dla $x \in D$ licznik prawej i lewej strony muszą być równe, zatem równe muszą być kolejne współczynniki przy x^3, x^2, x^1, x^0, tzn.

$$\begin{aligned}1 &= A + C' \\ 3 &= B + 2A + C + C' \\ 1 &= A + 2B + 2C' \\ 2 &= B + 2C + 2C'.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc układ czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi, który łatwo rozwiązujemy i otrzymujemy rozwiązanie:

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 1,\ C' = 0$$

Stąd ostatecznie

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int x dx + \int \frac{x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{x+1} + \begin{cases} c_1 \text{ dla } x < -1 \\ c_2 \text{ dla } x > -1 \end{cases}\end{aligned}$$

gdzie c_1 i c_2 są dowolnie dobranymi stałymi.

Podsumowując, jesteśmy w stanie wyliczyć całkę z każdej funkcji wymiernej, dla której potrafimy znaleźć explicite rozkład postaci (VII.2) dla jej mianownika.

◇ Zastosowanie całek z funkcji wymiernych do innych typów całek

Jednym z typów całek, które sprowadzają się do całkowania funkcji wymiernych są całki postaci

$$\int W(\sin x, \cos x)dx,$$

gdzie W jest ilorazem dwóch wielomianów dwóch zmiennych[113)]. Wówczas dla ustalonego $n \in \mathbb{Z}$ dla $x \in ((2n-1)\pi; (2n+1)\pi)$ można użyć podstawienia

$$„t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})".$$

Nietrudno ze wzorów trygonometrycznych wyliczyć, że wówczas

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ponadto

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2}$$

(t traktujemy tu jako „funkcję zmiennej x"). W efekcie użycie całkowania przez podstawienie sprowadzi więc problem do obliczenia pewnej całki z funkcji wymiernej („zmiennej t"). Zachęcam zarówno do sprawdzenia podanych wyżej wzorów (zad. 4) oraz do szczegółowego prześledzenia tego, jak należy tu użyć **ścisłego** faktu o całkowaniu przez podstawienie.

Inny przykład zastosowania całek z funkcji wymiernej to całki zawierające tzw. *niewymierności stopnia drugiego*, tzn. wyrażenia postaci $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Warto wiedzieć, że istnieją różne podstawienia, w tym tzw. *podstawienia Eulera*, które mogą sprowadzić takie całki także do całek z pewnych funkcji wymiernych.

◇ Całka oznaczona

Na zakończenie tego podrozdziału zajmiemy się (wbrew jego tytułowi) całką **oznaczoną**. Nazwa „nieoznaczona" dla rozważanej tu dotąd całki jest być może związana z niejednoznacznością wyboru funkcji pierwotnej. W przypadku jednak gdy funkcja f jest określona na przedziale, niejednoznaczność ta — jak widzieliśmy (fakt 1, strona 116) — jest niewielka. Jeśli zatem I — przedział, $a, b \in I$ oraz funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ posiada funkcję pierwotną F, to liczbę $F(b) - F(a)$ nazywamy *całką oznaczoną* od a do b z funkcji f i zapisujemy ją symbolem

$$\int_a^b f(x)dx$$

(a zatem może jednak nazwa „nieoznaczona" wzięła się z braku owych a i b w oznaczeniu całki?). Istotne jest to, że ta definicja jest poprawna — w tym sensie, że rzeczywiście liczba powyższa zależy jedynie od f, a oraz b natomiast **nie** zależy od wyboru samej funkcji pierwotnej. Dodanie bowiem ew. stałej do funkcji F nie wpływa na wartość obliczanej różnicy.

Uwaga. Dla dowolnego $a \in I$ funkcja $\varphi : I \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $\varphi(x) = \int_a^x f(s)ds$ jest zatem funkcją pierwotną f. Ponadto $\varphi(a) = 0$.

Czasami jest wygodniej posługiwać się taką konkretną „zaczepioną w punkcie a" funkcją pierwotną f niż bliżej nie sprecyzowaną całką nieoznaczoną z f.

---

113) Wielomian dwóch zmiennych to suma skończonej liczby funkcji zadanych wzorami postaci Cx^ky^l, gdzie $C \in \mathbb{R}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ (x, y — oznaczają zmienne).

◇ Całkowanie przez części i podstawienie — ponownie

Wzory na całkowanie przez części i podstawienie, które zapisane przy użyciu symbolu całki nieoznaczonej były niezbyt ścisłe, mają swoje odpowiedniki — tym razem ścisłe „w 100%" — także dla całek oznaczonych. Bezpośrednio z definicji całki oznaczonej, z faktów 1 i 2 ze strony 116 otrzymujemy następujące rezultaty.

Zdefiniujmy symbol $[h(x)]_a^b$:

$$[h(x)]_a^b := h(b) - h(a).$$

Fakt 1 (wzór na całkowanie przez części dla całki oznaczonej). *Jeżeli I — przedział, $a, b \in I$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz g jest różniczkowalna i $f' \cdot g$ posiada funkcję pierwotną, to*

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx. \tag{VII.3}$$

Fakt 2 (wzór na całkowanie przez podstawienie dla całki oznaczonej). *Jeżeli I, J — przedziały, $a, b \in I$, $g : I \longrightarrow J$, $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz g jest różniczkowalna i f posiada funkcję pierwotną, to*

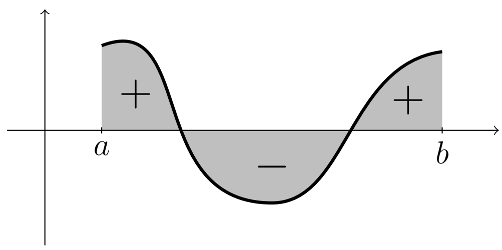
$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx. \text{ [114]} \tag{VII.4}$$

Jak się już wkrótce okaże — całka oznaczona jest nie tylko wygodna, ale ma też bardzo ważną interpretację geometryczną.

2. Całka Riemanna

◇ Pole „pod" wykresem funkcji

Zajmiemy się tu pojęciem całki zupełnie innej (przynajmniej na poziomie definicji) niż całka oznaczona i nieoznaczona zdefiniowane w poprzednim podrozdziale. Naszym celem będzie określenie dla funkcji $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ takiej liczby, której wartość w przypadku funkcji nieujemnej można by interpretować jako pole powierzchni obszaru pomiędzy wykresem f a osią „X", a w przypadku ogólnym pole to byłoby liczone z uwzględnieniem znaku „$-$" dla tych fragmentów wykresu, które są poniżej osi „X" (patrz rys. 15).



Rysunek 15. Całka Riemanna to pole między wykresem a osią X „z uwzględnieniem znaku".

Gdyby z góry założyć np. ciągłość f, sprawa byłaby dość łatwa. My jednak będziemy nieco ambitniejsi — spróbujemy podać odpowiednią definicję, która mogłaby mieć szersze zastosowanie.

[114] Może niektórych dziwi lub wręcz bulwersuje użycie po prawej stronie wzoru zmiennej x, podczas gdy w wersji „nieoznaczonej" było tam y, gdzie „$y = g(x)$" (a zatem na ogół „$y \neq x$"...), jednak tu dla całki oznaczonej ten problem już nie istnieje. Możemy użyć jako zmienną x, y, s, t i inne litery. To nie ma **żadnego** wpływu na wartość liczby, którą w efekcie otrzymujemy z prawej strony wzoru.

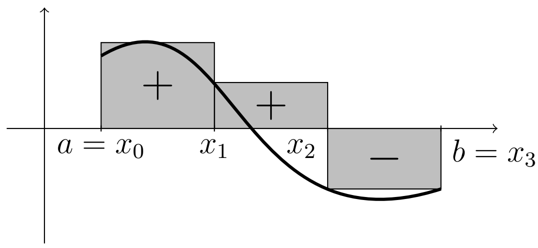
◇ Podział przedziału, suma górna, suma dolna

Potrzebne nam będzie zatem parę pomocniczych definicji i oznaczeń. *Podziałem* przedziału $[a;b]$ nazwiemy dowolny ciąg skończony $(x_0,\ldots,x_m)$ taki, że $x_0=a; x_m=b$ oraz $x_{j-1}\leqslant x_j$ dla $j=1,\ldots,m$. Takie podziały będziemy oznaczać jedną literą, np. P, a zbiór wszystkich możliwych podziałów P przedziału $[a;b]$ oznaczmy przez $\mathcal{P}$. Dla funkcji ograniczonej $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ oraz dla $P=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathcal{P}$ definiujemy *sumę górną* i *sumę dolną* dla f i P odpowiednio wzorami:

$$\hat{S}(f,P):=\sum_{j=1}^{m}(x_j-x_{j-1})\cdot\sup_{t\in[x_{j-1};x_j]}f(t);$$

$$\check{S}(f,P):=\sum_{j=1}^{m}(x_j-x_{j-1})\cdot\inf_{t\in[x_{j-1};x_j]}f(t).$$

Dzięki ograniczoności f obie sumy są poprawnie zdefiniowanymi liczbami rzeczywistymi i mają sens geometryczny najlepszego przybliżenia szukanego pola „od góry” lub odpowiednio „od dołu” przez sumę pól prostokątów (z uwzględnieniem znaku) o podstawach wyznaczonych przez podział P (patrz rysunek 16).



Rysunek 16. Suma górna.

◇ Całka górna i dolna

Nietrudno zauważyć, że biorąc „drobniejszy podział” (tj. dokładając dodatkowe punkty do danego podziału) ewentualnie możemy zmniejszyć sumę górną, a sumę dolną zwiększyć (lub pozostaną one niezmienione). Wydaje się więc, że sensownie byłoby określić szukane przez nas pole jako kres dolny zbioru sum górnych, tj.

$$\inf_{P\in\mathcal{P}}\hat{S}(f,P). \tag{VII.5}$$

Jednak czemu nie wziąć „równie dobrej” liczby, będącej kresem górnym zbioru sum dolnych, czyli

$$\sup_{P\in\mathcal{P}}\check{S}(f,P)? \tag{VII.6}$$

Ponieważ obie metody wydają się dobre, ale nie wiemy, czy prowadzą do tego samego wyniku zatem postąpimy ostrożnie: liczbę określoną wzorem (VII.5) nazwijmy *całką górną*, a wzorem (VII.6) — *całką dolną* z funkcji f. Oznaczmy je odpowiednio symbolami

$$\hat{\int}_{[a;b]}f,\quad \check{\int}_{[a;b]}f.$$

Łatwo dowieść nierówność

$$\check{\int}_{[a;b]}f\leqslant\hat{\int}_{[a;b]}f. \tag{VII.7}$$

Jeśli bowiem rozważymy dowolne podziały P_1 i P_2 przedziału $[a;b]$ to biorąc podział $\tilde{P}$ powstały przez „połączenie” P_1 i P_2 (ścisłą definicję tego „połączenia” pozostawiam Państwu …), a więc podział „drobniejszy” niż P_1 i P_2, dostajemy

$$\check{S}(f,P_1) \leqslant \check{S}(f,\tilde{P}) \leqslant \hat{S}(f,\tilde{P}) \leqslant \hat{S}(f,P_2)$$

skąd (VII.7) wynika łatwo z definicji kresów (patrz np. zad. 9). Nie ma jednak powodu, by w (VII.7) zachodziła równość bez jakiś dodatkowych założeń o f (patrz przykład z funkcją Dirichleta, niżej).

◇ Całkowalność i całka w sensie Riemanna

Naturalne wydaje się teraz dla dowolnej ograniczonej funkcji $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ przyjąć następującą definicję.

Definicja. *Funkcja f jest* ***całkowalna w sensie Riemanna*** *wtw $\hat{\int}_{[a;b]} f = \check{\int}_{[a;b]} f$. Jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna, to wspólną wartość jej całki górnej i dolnej nazywamy* ***całką Riemanna*** *funkcji f (na $[a;b]$) i oznaczamy symbolem $\int_{[a;b]} f$ lub $\int_{[a;b]} f(x)dx$.*

Klasę wszystkich funkcji całkowalnych w sensie Riemanna będziemy tu oznaczać przez $\Re$, a gdy będzie nam zależało na podkreśleniu, że chodzi o funkcję określoną na $[a;b]$, będziemy używać symbolu $\Re([a;b])$.

◇ Dwa skrajne przykłady

Zanim zajmiemy się ogólnymi wynikami dotyczącymi całkowalności i całki przyjrzyjmy się następującym — skrajnie różnym z punktu widzenia tej teorii — sytuacjom.

Przykłady.

1. Funkcja stała: $f\equiv c$, $c\in\mathbb{R}$. Wówczas niezależnie od wyboru P zachodzi $\hat{S}(f,P) = c\cdot(b-a) = \check{S}(f,P)$, więc całka górna i dolna równe są $c\cdot(b-a)$. Zatem $f\in\Re$ i $\int_{[a;b]} f(x)dx = c\cdot(b-a)$.

2. Funkcja Dirichleta. Gdy f jest obcięciem funkcji Dirichleta do przedziału $[a;b]$ (patrz przykład ze strony 61), to dla dowolnego P mamy $\hat{S}(f,P)=(b-a)$ oraz $\check{S}(f,P)=0$. Zatem $f\notin\Re$, o ile $b>a$.

◇ Całkowalność funkcji ciągłych

Czas wreszcie na jakieś „pozytywne” twierdzenie o całkowalności w sensie Riemanna.

Twierdzenie VII.1 (o całkowalności funkcji ciągłych). *Funkcja ciągła określona na przedziale domkniętym jest całkowalna w sensie Riemanna (tzn. $C([a;b])\subset\Re([a;b])$).*

Zanim przystąpimy do dowodu, wykażemy pomocny lemat. Najpierw dla dowolnego podziału $P=(x_0,\ldots,x_m)$ przedziału $[a;b]$ zdefiniujmy *średnicę podziału P*, oznaczaną przez $|P|$, jako długość najdłuższego odcinka z podziału P, tzn.

$$|P| := \max_{j=1,\ldots,m}(x_j - x_{j-1}).$$

Lemat. *Jeżeli $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła oraz $\{P_n\}$ jest ciągiem podziałów przedziału $[a;b]$, dla którego $|P_n|\to 0$, to $\hat{S}(f,P_n)-\check{S}(f,P_n)\to 0$*

Dowód (lematu).
Niech $b > a$ i $\epsilon > 0$. Na mocy jednostajnej ciągłości f (patrz tw. IV.11) wybierzmy $\delta > 0$ taką, że jeżeli $y, z \in [a; b]$ oraz $|y - z| < \delta$, to

$$|f(y) - f(z)| < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{VII.8}$$

Niech N będzie takie, że dla $n \geqslant N$ zachodzi $|P_n| < \delta$. Ustalmy dowolne $n \geqslant N$. W szczególności więc (VII.8) zachodzi dla dowolnych y i z leżących w przedziale pomiędzy sąsiednimi punktami podziału P_n. Jeżeli $P_n = (x_0, \ldots, x_m)$ oraz $j \in \{1, \ldots, m\}$, to z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów (tw. IV.10) $\sup_{x \in [x_{j-1}; x_j]} f(x) = f(y_j)$ oraz $\inf_{x \in [x_{j-i}; x_j]} f(x) = f(z_j)$ dla pewnych $y_j, z_j \in [x_{j-1}, x_j]$, przy czym ponieważ $n \geqslant N$, zatem na mocy powyższych rozważań

$$f(y_j) - f(z_j) < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

A zatem mamy

$$0 \leqslant \hat{S}(f, P_n) - \check{S}(f, P_n) = \sum_{j=1}^{m} (f(y_j) - f(z_j))(x_j - x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{m} (x_j - x_{j-1}) = \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon.$$

□

Dowód (twierdzenia VII.1).
Rozważmy jakikolwiek ciąg podziałów $\{P_n\}$ taki, że $|P_n| \to 0$ (np. P_n może być podziałem na równe części o długości $\frac{b-a}{n}$). Na mocy definicji całki górnej i dolnej oraz na mocy (VII.7) mamy oczywiście

$$\check{S}(f, P_n) \leqslant \check{\int}_{[a;b]} f \leqslant \hat{\int}_{[a;b]} f \leqslant \hat{S}(f, P_n) \tag{VII.9}$$

dla dowolnego n. A stąd

$$0 \leqslant \hat{\int}_{[a;b]} f - \check{\int}_{[a;b]} f \leqslant \hat{S}(f, P_n) - \check{S}(f, P_n),$$

więc na mocy lematu oraz twierdzenia o trzech ciągach $\hat{\int}_{[a;b]} f = \check{\int}_{[a;b]} f$ □

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia VII.1 nie jest prawdziwe, tzn. nie każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna musi być ciągła (patrz np. zad. 5). Jednak można wykazać twierdzenie, które mówi, że $f \in \Re$ wtw f jest ograniczona i jej zbiór punktów nieciągłości jest, w odpowiednio określonym sensie, „mały” [115] (przypominam także, że całkowalność w sensie Riemanna dotyczy wyłącznie funkcji określonych na przedziałach domkniętych). Przy czym „mały” jest np. dowolny zbiór skończony, ale także dowolny zbiór przeliczalny.

◇ Aproksymacja sumami Riemanna

Udowodnimy teraz przydatne twierdzenie dotyczące aproksymowania całki z funkcji ciągłej tzw. „sumami Riemanna”. Jeżeli $P = (x_0, \ldots, x_m)$ jest podziałem przedziału $[a; b]$, to *sumą Riemanna* dla f i P nazywamy dowolną liczbę, którą można przedstawić w postaci

$$\sum_{j=1}^{m} f(y_j)(x_j - x_{j-1})$$

dla pewnych $y_j \in [x_{j-1}; x_j]$, $j = 1, \ldots, m$.

Twierdzenie VII.2 (o sumach Riemanna). *Jeżeli $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $\{P_n\}_{n \geqslant n_0}$ jest ciągiem podziałów $[a; b]$ o średnicach zbieżnych do 0 oraz dla $n \geqslant n_0$ S_n jest pewną sumą Riemanna dla f i P_n, to $S_n \to \int_{[a;b]} f$.*

[115] Ściślej, „mały” to zbiór o mierze Lebesgue'a równej 0, ale o tym pojęciu powiemy dopiero w rozdziale X.

Dowód.
Na mocy definicji sumy górnej i dolnej dla f i P_n mamy oczywiście

$$\check{S}(f, P_n) \leqslant S_n \leqslant \hat{S}(f, P_n). \tag{VII.10}$$

Jednocześnie na mocy całkowalności f (z twierdzenia VII.1) i z definicji całki oraz całki górnej i dolnej (patrz np. (VII.9)) mamy też

$$\check{S}(f, P_n) \leqslant \check{\int}_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} f = \hat{\int}_{[a;b]} f \leqslant \hat{S}(f, P_n) \tag{VII.11}$$

Z (VII.10) i (VII.11) otrzymujemy $| \int_{[a;b]} f - S_n| \leqslant \hat{S}(f, P_n) - \check{S}(f, P_n)$, skąd na mocy lematu i twierdzenia o trzech ciągach uzyskujemy tezę. □

Uwaga. Twierdzenie powyższe pozostanie prawdziwe, jeśli ciągłość f zastąpimy jej całkowalnością w sensie Riemanna (dowód jednak będzie trudniejszy ...).

Warto zwrócić uwagę, że twierdzenie VII.2 daje możliwość znajdowania przybliżonych wartości całek. Niestety, bez żadnych „gwarancji" dotyczących wielkości błędu. Warto też wiedzieć, że istnieją twierdzenia, które podają oszacowania błędu przy przybliżaniu sumami Riemanna lub innymi sumami podobnego rodzaju, przy dodatkowych założeniach dotyczących np. regularności funkcji.

◇ Kilka własności całki Riemanna

Całka Riemanna posiada kilka intuicyjnie naturalnych własności, które zostały zebrane poniżej. Przyjmijmy jeszcze dla wygody następującą notację: jeżeli $f : D \to \mathbb{R}$ oraz $[a; b] \subset D$ i $f|_{[a;b]} \in \Re$, to

$$\int_{[a;b]} f := \int_{[a;b]} f|_{[a;b]} .$$

Twierdzenie VII.3 (o własnościach całki Riemanna).

1. *(liniowość) Jeżeli $f, g \in \Re([a; b])$, i $c \in \mathbb{R}$, to $c \cdot f$, $f + g \in \Re([a; b])$ oraz*

$$\int_{[a;b]} (f + g) = \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g,$$

$$\int_{[a;b]} (c \cdot f) = c \cdot \int_{[a;b]} f.$$

2. *(monotoniczność) Jeżeli $f, g \in \Re([a; b])$ oraz $\forall_{x\in[a;b]}\ f(x) \leqslant g(x)$, to*

$$\int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g.$$

3. *(addytywność względem przedziału) Jeżeli $f \in \Re([a; b])$ oraz $a \leqslant c \leqslant b$, to $f|_{[a;c]}, f|_{[c;b]} \in \Re$ oraz*

$$\int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f = \int_{[a;b]} f.$$

Punkt 2 wynika natychmiast z definicji całki górnej (lub dolnej) oraz z własności kresów. Pozostałe punkty są może nie tyle trudne, ale żmudne w dowodzie i dlatego, z konieczności, ich dowód pomijamy.

◇ Podstawe twierdzenie rachunku całkowego

Twierdzenie zwane „podstawowym twierdzeniem rachunku całkowego” (p.t.r.c.)[116), które teraz sformułujemy, ma kluczowe znaczenie dla teorii całki Riemanna. Wiąże ono bowiem całkę Riemanna z całką oznaczoną, a jednocześnie, dzięki temu związkowi, daje praktyczną możliwość obliczania wielu całek Riemanna, bez konieczności posługiwania się definicją (czy ewentualnie twierdzeniem VII.2).

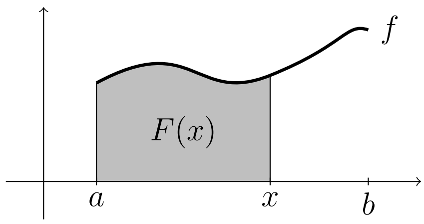
Twierdzenie VII.4 (p.t.r.c.). *Niech $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i zdefiniujmy $F : [a;b] \to \mathbb{R}$ wzorem*

$$F(x) = \int_{[a;x]} f(t)dt$$

dla $x \in [a;b]$. Wówczas F jest funkcją pierwotną funkcji f.

Wniosek. *Jeżeli $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ — ciągła, to $\int_{[a;b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.*

Dowód (wniosku).
Z twierdzenie VII.4 i z definicji całki oznaczonej mamy $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \int_{[a;b]} f - \int_{[a;a]} f = \int_{[a;b]} f(x)dx$. □



Rysunek 17. Sens geometryczny liczby $F(x)$ z tw. VII.4.

Dowód (twierdzenia VII.4).
Niech $x_0 \in [a;b)$ i niech $\epsilon > 0$. Ponieważ f jest ciągła w x_0, zatem dobierzemy $\delta > 0$ takie, że $x_0 + \delta < b$ oraz dla $t \in [a;b]$ spełniających $|t - x_0| < \delta$ zachodzi

$$f(x_0) - \epsilon < f(t) < f(x_0) + \epsilon$$

Jeżeli zatem $0 < h < \delta$, to dla $t \in [x_0; x_0 + h]$ nierówności powyższe zachodzą, więc na mocy twierdzenia VII.3 pkt. 2 możemy „scałkować je stronami” i korzystając z przykładu 1 ze strony 123 otrzymujemy

$$h(f(x_0) - \epsilon) \leqslant \int_{[x_0;x_0+h]} f(t)dt \leqslant h(f(x_0) + \epsilon). \tag{VII.12}$$

Z drugiej strony, iloraz różnicowy dla F można na mocy twierdzenia VII.3 pkt. 3 zapisać następująco:

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[x_0;x_0+h]} f(t)dt.$$

Zatem dzięki (VII.12), dla $0 < h < \delta$ mamy

$$f(x_0) - \epsilon \leqslant \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0) + \epsilon.$$

Wykazaliśmy więc, że $F'_+(x_0) = f(x_0)$ i analogicznie dowodzi się, że $F'_-(x_0) = f(x_0)$ dla $x \in (a;b]$. □

---
116) Niektórzy nazywają je: „podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego” — i właściwie słusznie...

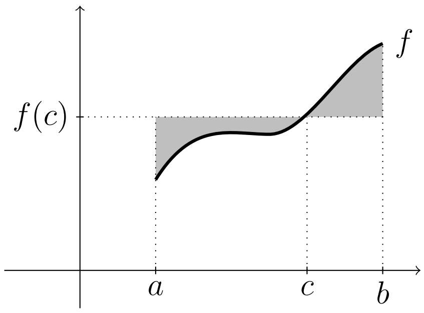
◇ Twierdzenie o wartości średniej

Pewna grupa twierdzeń dotyczących całkowania nosi wspólną nazwę „twierdzenia o wartości średniej” (tym razem — dla całek). Zajmiemy się tu tylko najprostszym z nich. Zakładamy, że $b > a$.

Twierdzenie VII.5 (o wartości średniej). *Jeżeli* $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, to istnieje* $c \in (a;b)$ *takie, że*

$$\int_{[a;b]} f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Uwaga. Geometryczny sens tego twierdzenia jest taki, że dla pewnej wartości $f(c)$ funkcji f pole prostokąta o podstawie na odcinku $[a;b]$ i wysokości $f(c)$ pokrywa się z polem pomiędzy osią X a wykresem f (patrz rysunek 18).



Rysunek 18. Dobór c w tw. VII.5 powinien być taki, by zaznaczone pola miały równe wartości.

Dowód.
Jeśli F — funkcja z twierdzenia VII.4, to na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej (tw. V.4) oraz na mocy twierdzenia VII.4 mamy

$$\frac{\int_{[a;b]} f(x)dx}{b-a} = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c)$$

dla pewnego $c \in (a;b)$. □

3. Całki niewłaściwe

◇ Jak całkować funkcje określone nie na domkniętych przedziałach

Całkowanie w sensie Riemanna było „z definicji” wykonalne tylko dla funkcji całkowalnych w sensie Riemanna. A zatem, w szczególności, dziedzina całkowanej funkcji musiała być przedziałem domkniętym (więc — między innymi — o skończonej długości), a sama funkcja — ograniczona. Obecnie pokażemy jak można rozszerzyć pojęcie całki tak, by objąć także niektóre przypadki, gdy powyższe warunki spełnione nie są. Posłuży do tego właśnie pojęcie całki niewłaściwej.[117)] Sam pomysł definicji jest bardzo prosty i w swojej istocie bardzo przypomina pomysł, który posłużył przy definicji sumy szeregu. Niech $f : [a;b) \to \mathbb{R}$ gdzie $b > a$, przy czym $b = +\infty$ lub $b \in \mathbb{R}$. W obu sytuacjach całka Riemanna z f nie jest poprawnie zdefiniowana. Załóżmy jednak, że

$$\forall_{r \in [a;b)}\ f|_{[a;r]} \in \Re. \tag{VII.13}$$

[117)] Proszę nie mylić z całką nieoznaczoną!

Definicja. *Jeżeli istnieje* $\lim_{r\to b-}\int_{[a;r]} f$*, to granicę tę nazywamy* ***całką niewłaściwą*** *z* f *(po przedziale* $[a;b)$*) i oznaczamy ją symbolem*

$$\int_a^b f(x)dx.$$ [118)]

Mówimy, że powyższa całka (niewłaściwa) jest ***zbieżna*** *wtw granica ta istnieje i jest skończona.*[119)]

◇ Całki niewłaściwe I i II rodzaju oraz niewłaściwe „lewo/prawo–stronnie" i „mieszane"

Tradycyjnie, gdy $b = +\infty$ mówi się o całce niewłaściwej *I rodzaju*, a gdy $b \in \mathbb{R}$ — *II rodzaju*. Opisana tu sytuacja dotyczy „niewłaściwości prawostronnej", tzn. sytuacji gdy f nie jest określona w punkcie b — prawym końcu dziedziny. Całkiem analogicznie postępuje się w przypadku „niewłaściwości lewostronnej", tzn. gdy $f : (b; a] \to \mathbb{R}$ (należy wówczas zastąpić „$b-$" przez „$b+$", „$[a; r]$" przez „$[r; a]$", „$\int_a^b$" przez „$\int_b^a$" oraz „$[a; b)$" przez „$(b; a]$").

Można też zdefiniować pojęcie całek niewłaściwych „mieszanych", służących obliczaniu „całki" z funkcji określonych na przedziałach obustronnie otwartych, albo — co gorsza — przedziałów pozbawionych pewnych punktów (skończonej liczby). Tu tej definicji nie podamy (patrz jednak zad. 14).

◇ Pozorna niewłaściwość

Jeżeli $b \in \mathbb{R}$ i $f : [a; b) \to \mathbb{R}$ przedłuża się do funkcji $\tilde{f} : [a; b] \to \mathbb{R}$ takiej, że $\tilde{f} \in \Re$, to łatwo sprawdzić (zad. 13), że $\int_a^b f(x)dx$ jest zbieżna, a przy tym $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a;b]} \tilde{f}(x)dx$.

◇ Kilka przykładów

Przy użyciu wniosku z p.t.r.c. (tw. VII.4) i definicji całki niewłaściwej łatwo możemy wyliczyć wiele konkretnych całek niewłaściwych.

Przykłady.

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ („lewostronnie niewłaściwa") jest dla $\alpha > 0$ zbieżna wtw $\alpha < 1$ oraz wówczas równa jest $\frac{1}{1-\alpha}$ (patrz rys. 19)

2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ („prawostronnie niewłaściwa") jest dla $\alpha > 0$ zbieżna wtw $\alpha > 1$ oraz wówczas równa jest $\frac{1}{\alpha-1}$ (patrz rys. 20).

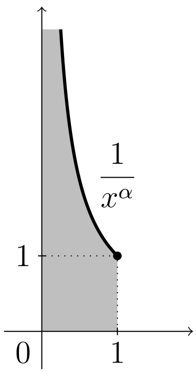
3. $\int_{-\infty}^0 e^x dx = -\int_0^1 \ln(x)dx = 1$. Pierwsza z równości jest przy tym intuicyjnie jasna ze względu na symetrię wykresów obu rozważanych funkcji (patrz rys. 21).

◇ Dwa kryteria zbieżności

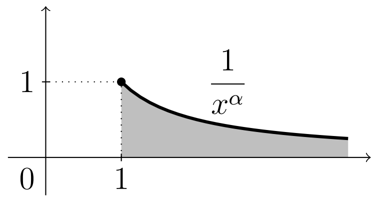
Teoria całek niewłaściwych posiada wiele analogii do teorii szeregów — można było się tego spodziewać już na podstawie samej definicji. Zilustrujemy to przy pomocy dwóch kryteriów zbieżności całek niewłaściwych.

[118)] A zatem tak jak całkę oznaczoną, co nie powinno prowadzić do nieporozumień. Niemniej, lepszym może oznaczeniem na całkę niewłaściwą byłoby „$\int_{[a;b)} f(x)dx$". Nie bedziemy się jednak zbytnio przeciwstawiać tradycji.

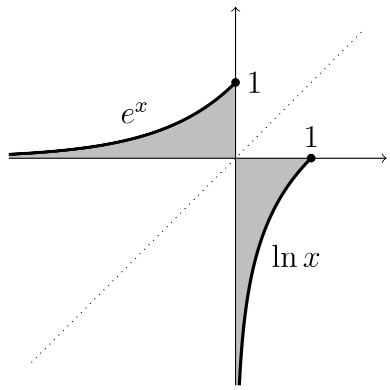
[119)] W wypadku przeciwnym (granica nie istnieje lub jest równa $+\infty$ lub $-\infty$) mówimy, że całka jest *rozbieżna*.



Rysunek 19. Geometryczny sens całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ to pole nieograniczonego obszaru częściowo tylko zaznaczonego tu...



Rysunek 20. ... i podobnie dla $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$.



Rysunek 21. Zakreskowane pola powierzchni są równe.

Kryterium 1 (porównawcze). *Załóżmy, że* $f_1, f_2 : [a;b) \to \mathbb{R}$ *i obie funkcje spełniają warunek* (VII.13)*. Jeśli dla dowolnego* $x \in [a;b)$

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x),$$

oraz $\int_a^b f_2(x)dx$ *jest zbieżna, to* $\int_a^b f_1(x)dx$ *też jest zbieżna oraz* $\int_a^b f_1(x)dx \leqslant \int_a^b f_2(x)dx$ *.*

Dowód.

Niech $F_j(r) := \int_{[a;r]} f_j(x)dx$ dla $r \in [a;b)$, $j = 1, 2$. Na mocy twierdzenia VII.3 funkcje F_1 i F_2 są rosnące oraz $0 \leqslant F_1(r) \leqslant F_2(r)$ dla dowolnego r. Zatem teza wynika natychmiast z twierdzenia o granicach jednostronnych funkcji monotonicznych (tw. IV.7) i z twierdzenia o zachowaniu nierówności przy przejściu granicznym (tw. IV.5). □

Drugie kryterium dotyczy jedynie całek niewłaściwych I-go rodzaju.

Kryterium 2 (Dirichleta). *Jeżeli* $f, g : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ *oraz*

1. *f spełnia* (VII.13) *(z $b = +\infty$) i istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$\forall_{r\in[a;+\infty)} \left|\int_{[a;r)} f(x)dx\right| < M;$$

2. *g jest malejąca i $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$,*

to $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *jest zbieżna.* **B.D.**

Oczywiście analogiczne twierdzenia zachodzą także dla całek „lewostronnie niewłaściwych". Przykłady zastosowań powyższych kryteriów do badania zbieżności konkretnych całek niewłaściwych pozostawiamy na ćwiczenia (patrz — zadania do tego rozdziału).

Zadania do Rozdziału VII

$\forall$ 1. Oblicz poniższe całki oznaczone i nieoznaczone. W punktach b), d), f), g) przy stosowaniu twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie przedstaw „dwa” rozwiązania: jedno z użyciem nieformalnego chwytu „$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx$” i drugie — całkowicie formalne i ścisłe (ze szczegółowym wypisaniem postaci funkcji, do których stosowane jest twierdzenie o c.p.p.).

(a) $\int x^3 \ln x dx$, $x > 0$

(b) $\int \operatorname{tg} x dx$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

(c) $\int_{-100}^{1000} e^{(2x+1)} dx$

(d) $\int_0^1 x^3 \sqrt{7 + x^4} dx$

(e) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$

(f) $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$, $x \neq -1$

(g) $\int \frac{x^4}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(h) $\int \frac{1}{1+x^2+x^4} dx$, $x \in \mathbb{R}$

(i) $\int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+e^t+1} dt$

(j) $\int \frac{1}{1+\cos x}$, $x \in (-\pi; \pi)$

(k) $\int_0^x e^s \sin(3s) ds$

(l) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos x} dx$ (Uwaga: wynik musi być $> 0 \ldots$)

(m) $\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}} dx$, $x > 0$

(n) $\int_1^e \ln x dx$

(o) $\int |x| dx$, $x \in \mathbb{R}$

(p) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

(q) $\int_0^\pi \sin x e^x dx$

(r) $\int \frac{2y}{(y-3)^2(y^2+3)} dy$, $y > 3$

(s) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

(t) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

(u) $\int_{-1}^1 \sin(x^3) dx$

(v) $\int_4^9 \frac{t-1}{\sqrt{t+1}} dt$

(w) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

(x) $\int_0^1 \frac{s}{1+s^4} ds$ (Wskazówka: podstaw „$y = s^2$”).

$\forall$ [120]) 2. Dla $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ określamy:

- *długość wykresu* f, o ile f jest klasy C^1, wzorem

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx;$$

[120]) Przynajmniej po jednym przykładzie na każdy z trzech wzorów

- *pole powierzchni obrotowej* powstałej przez obrót wykresu f (zawartego w płaszczyźnie XY) wokół osi X w przestrzeni XYZ, o ile f jest klasy C^1, wzorem

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx;$$

- *objętość bryły obrotowej* ograniczonej powyższą powierzchnią obrotową i płaszczyznami „$x=a$”, „$x=b$”, o ile f jest ciągła, wzorem

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

W oparciu o powyższe wzory oblicz:

(a) długość okręgu o promieniu r,

(b) objętość kuli o promieniu r,

(c) pole powierzchni sfery o promieniu r,

(d) objętość walca obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h,

(e) pole powierzchni bocznej walca obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h,

(f) objętość stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h,

(g) pole powierzchni bocznej stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h.

$\forall$ 3. Niech $I_n(x) := \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n}dt$ dla $n \in \mathbb{N}$. Znajdź wzór rekurencyjny na funkcje I_n (nie wymagający użycia całek).

4. Wyprowadź wzory związane z podstawieniem trygonometrycznym „$t = tg(\frac{x}{2})$” podane na wykładzie (strona 120).

$\forall$ 5. Wykaż, że funkcja $\chi : [-1;1] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 \text{ dla } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemanna (choć nie jest ciągła ...).

$\forall$ 6. Znajdź granice ciągów zadanych poniższymi wzorami, wykorzystując twierdzenie o sumach Riemanna (twierdzenie VII.2).

(a) $\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^n k^\alpha$, dla $\alpha \geqslant 0$,

(b) $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

7. Niech $f : I \to \mathbb{R}$, gdzie I — przedział oraz f posiada funkcję pierwotną. Wykaż, że dla dowolnych $a, b, c \in I$ zachodzi $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

8. Wykaż, że jeżeli $f, g \in C([a;b])$, $b > a$ oraz $f(x) < g(x)$ przy dowolnym $x \in (a;b)$, to $\int_{[a;b]} f(x)dx < \int_{[a;b]} g(x)dx$.

9. Znajdź $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_n^{n+7} \frac{\sin x}{x}dx$.

$\forall$ 10. Wykaż, że jeżeli $f_n, f \in \Re([a;b])$ oraz $f_n \rightrightarrows f$, to

$$\int_{[a;b]} f_n \to \int_{[a;b]} f.$$

$\forall$ 11. Zbadaj zbieżność poniższych całek niewłaściwych:

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}+x^2} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

(c) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$

(d) $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+\frac{1}{2}} dx$

(e) $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx$

(f) $\int_0^{+\infty} x^{17} e^{-\sqrt{x}} dx$

(g) $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$

(h) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(i) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} dx$

(j) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$

(k) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx$.

12. Oblicz $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$.

13. Wykaż, że jeżeli $\tilde{f} : [a;b] \to \mathbb{R}$ i $\tilde{f} \in \Re$ oraz $f = \tilde{f}\,|_{[a;b)}$ to $\int_a^b f(x)dx$ jest zbieżna oraz równa się $\int_{[a;b]} \tilde{f}(x)dx$.

14. Zdefiniujemy całkę niewłaściwą *mieszaną* dla $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$). Zakładamy, że dla dowolnych a', b' takich, że $a < a' < b' < b$ zachodzi $f\,|_{[a';b']} \in \Re$. Niech $c \in (a;b)$. Mówimy, że $\int_a^b f(x)dx$ istnieje wtw istnieją $\int_a^c f(x)dx$ oraz $\int_c^b f(x)dx$ oraz ich suma jest określona. W tej sytuacji $\int_a^b f(x)dx$ określamy jako powyższa sumę. Wykaż, że definicja ta (istnienie i wartość całki) nie zależy od wyboru $c \in (a,b)$.

15. Zbadaj zbieżność (tzn. istnienie i skończoność) całki niewłaściwej mieszanej (patrz zad. 14):

(a) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$, w zależności od $a, \alpha \in \mathbb{R}$

(b) $\int_{-\infty}^a \frac{1}{(a-x)^\alpha} dx$, w zależności od $a, \alpha \in \mathbb{R}$

(c) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}} \cdot (\pi - x)^\alpha} dx$, w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$.

16. Zaproponuj sformułowanie „kryterium asymptotycznego dla całek niewłaściwych” wzorując się na sytuacji znanej z teorii szeregów. Udowodnij tak sformułowane kryterium.

17. Udowodnij następujące „kryterium całkowe zbieżności szeregów”: *Jeżeli* $f : [n_0; +\infty) \to [0; +\infty)$ *jest malejąca i ciągła, to* $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ *jest zbieżna wtw* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ *jest zbieżny.*

$\forall$ [121] 18. Wykorzystaj powyższe kryterium jako alternatywną metodę badania zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ oraz $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ dla $\alpha > 0$.

[121] Przynajmniej jeden z dwóch przykładów.

VIII Ciągłość funkcji wielu zmiennych. Przestrzenie metryczne

[około 2 wykładów]

Niniejszy rozdział jest pierwszym spośród rozdziałów dotyczących funkcji wielu zmiennych. Powiemy tu, między innymi, o uogólnieniu kilku pojęć znanych z poprzednich rozdziałów dla przypadku „jednowymiarowego” , takich jak granica ciągu, granica funkcji, ciągłość, na przypadek „wielowymiarowy”. A skoro i tak będziemy uogolniać, to rozszerzymy nieco dalej swoje „horyzonty” i wprowadzimy te pojęcia dla sytuacji jeszcze ogólniejszej. Mianowicie w dowolnych *przestrzeniach metrycznych.*

1. Przestrzenie metryczne

⋄ Odległość pomiędzy punktami — metryka

Gdy wprowadzaliśmy we wcześniejszych rozdziałach pojęcie granicy ciągu liczbowego oraz związane z tym pojęcia takie jak granica funkcji, czy ciągłość, widoczne było, że zasadniczą rolę pełniło tu coś co nazywaliśmy *odległością* pomiędzy liczbami, mającą dla liczb x i y wartość równą

$$|x - y|.$$

Wydaje się więc, że moglibyśmy bez większych trudności uogólnić powyższe pojęcia na przypadki ciągów o wyrazach z innych zbiorów niż tylko $\mathbb{R}$ lub funkcji działających pomiędzy takimi zbiorami, o ile potrafilibyśmy w jakiś sposób mierzyć odległość pomiędzy dwoma elementami zbiorów.

Zacznijmy zatem od problemu mierzenia odległości. I tak jak to się typowo czyni w matematyce, podejdziemy do tego w sposób abstrakcyjny. Tzn. nie będziemy na razie rozważać konkretnych zbiorów i sposobów mierzenia w nich odległości, lecz założymy, że mamy pewien zbiór X oraz funkcję

$$\rho : X \times X \to [0; +\infty)$$

mającą pełnić rolę odległości (tzn. dla $x, y \in X$ odległość pomiędzy x a y ma być równa $\rho(x, y)$) i sformułujemy minimalne warunki jakie funkcja ta powinna spełniać, aby mogła się do celu takiego nadawać. Taka abstrakcyjna odległość nosi nazwę *metryki.*

Definicja. *ρ jest **metryką** wtw*

1) *(niezdegenerowanie)* $\forall_{x,y \in X}\ (\rho(x, y) = 0 \iff x = y)$;

2) *(symetria)* $\forall_{x,y \in X}\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) *(nierówność trójkąta)* $\forall_{x,y,z \in X}\ \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Gdy ρ jest metryką, to parę (X, ρ) nazywamy *przestrzenią metryczną* (czasem mówimy tak też na sam zbiór X, gdy jasne jest jaka metryka w X została wybrana).

Mimo, iż takie abstrakcyjne pojęcie odległości dopuszcza rozmaite „dziwne” przykłady, nie zanadto zgodne z przyzwyczajeniami niektórych osób do tego, co potocznie odległością bywa nazywane, okazuje się, że powyższa definicja zawiera akurat te warunki, które wystarczają do sensownego uogólnienia wspomnianych przez nas wcześniej pojęć. Tymi uogólnieniami zajmiemy się w dalszych podrozdziałach, teraz natomiast przyjrzyjmy się kilku mniej lub bardziej konkretnym metrykom.

◇ Metryka euklidesowa w $\mathbb{R}^d$

Najważniejszy dla nas w tym semestrze przykład metryki to standardowo stosowana, znana Państwu ze szkoły, *metryka euklidesowa* w $\mathbb{R}^d$ (znana przynajmniej dla $d = 2$ i 3). Dla $x, y \in \mathbb{R}^d$ zadana jest ona wzorem

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{d}(x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{VIII.1}$$

gdzie $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_d)$ [122]. W szczególności dla $d = 1$ otrzymujemy tu wspomnianą wcześniej odległość $\rho(x,y) = |x - y|$.

Taka odległość jest nam „najbliższa", bo wzór (VIII.1) opisuje zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa (użytym $d-1$ razy) po prostu „zwykłą" (tzn. właśnie euklidesową ...) długość odcinka (lub inaczej — długość wektora) łączącego x i y. Inaczej mówiąc zachodzi

$$\rho(x,y) = \|x - y\|,$$

gdzie $\|\ \|$ jest *normą* euklidesową w $\mathbb{R}^d$ (oznaczoną na GAL–u jako $\|\ \|_2$) zadaną wzorem

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{VIII.2}$$

I choć, jak Państwo wiecie, jest wiele różnych norm zadanych w $\mathbb{R}^d$, ten symbol $\|\ \|$ będzie na naszym wykładzie z Analizy Matematycznej na ogół (ale np. poza przykładem niżej opisanym) oznaczał właśnie normę euklidesową (niezależnie od wartości d). Pozostaje nam zatem sprawdzić, że ρ tu zdefiniowane jest metryką. Warunki 1) i 2) definicji są w tym przypadku oczywiste. Pozostaje do sprawdzenia 3). Ale na mocy wykazanej na GAL–u nierówności trójkąta dla normy euklidesowej

$$\rho(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

czyli 3) zachodzi. A zatem $(\mathbb{R}^d, \rho)$ jest przestrzenią metryczną. Warto też wspomnieć, że gdy rozważamy nie cały zbiór $\mathbb{R}^d$, ale dowolny $D \subset \mathbb{R}^d$ i rozważymy $\tilde{\rho} := \rho|_{D\times D}$, to $\tilde{\rho}$ będzie oczywiście metryką w D (mówimy wtedy, że $(D, \tilde{\rho})$ jest podprzestrzenią metryczną[123] przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}^d, \rho)$).

◇ Metryka indukowana przez normę

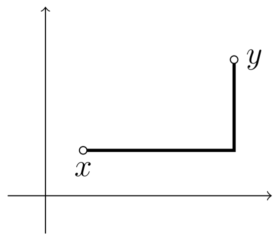
Sytuację opisaną w przykładzie 1 można uogólnić na dowolną *przestrzeń unormowaną* $(X, \|\ \|)$, tzn. przestrzeń liniową X (nad ciałem $K = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) z zadaną normą $\|\ \|$. Przypominam (znów z GAL–u) — funkcja $\|\ \| : X \to [0; +\infty)$ jest *normą*[124] wtw

i) (niezdegenerowanie) $\forall_{x\in X}\ (\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0)$,

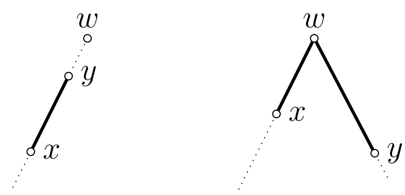
[122] Uwaga! Jak widać stosujemy tu nieco inną notację od tej stosowanej w semestrze zimowym na wykładzie z GAL–u. $\mathbb{R}^d$ nie oznacza teraz zbioru macierzy o 1 kolumnie i d-wierszach lecz po prostu iloczyn kartezjański $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$, tj. d-„egzemplarzy" zbioru $\mathbb{R}$. Elementy $\mathbb{R}^d$ oznaczamy tu jedną literą (bez strzałki nad nią) i na ogół dla $x \in \mathbb{R}^d$ oraz $j \in \{1, \ldots, d\}$ symbol x_j oznacza j–tą współrzędną x. $\mathbb{R}^d$ będziemy też traktować jako przestrzeń liniową (nad $\mathbb{R}$, z naturalnymi działaniami „po współrzędnych") i jej elementy będą wektorami, co nie zmieni sposobu naszej notacji.

[123] Analogicznie konstrukcję metryki ograniczonej do podzbioru zbioru X można oczywiście przeprowadzić dla każdej przestrzeni metrycznej (X, ρ).

[124] Czasami słowa „norma" (nad)używa się także w odniesieniu do funkcji, które mogą osiągnąć wartość $+\infty$. Tak było np. w rozdziale VII gdy określaliśmy normę funkcji — dla funkcji f nieograniczonej zachodziło $\|f\| = +\infty$. Przy takim rozszerzeniu pojęcia normy podane tu warunki definicji wymagałyby jednak pewnej modyfikacji (warunek 2)).



Rysunek 22. Metryka miejska



Rysunek 23. Metryka kolejowa

ii) (jednorodność) $\forall_{\lambda\in K}\ \forall_{x\in X}\ \|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$,

iii) (nierówność trójkąta) $\forall_{x,y\in X}\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

A zatem możemy określić $\rho : X\times X \to [0;+\infty)$ wzorem

$$\rho(x,y) = \|x-y\| \tag{VIII.3}$$

i ρ tak zadane będzie metryką w X: warunek 1) wynika z i), warunek 2) z ii) (dla $\lambda = -1$) a warunek 3) z iii) (tak jak w pow. przykładzie z metryką euklidesową). Mówimy wtedy, że metryka ρ jest indukowana przez normę $\|\ \|$.

Np. gdy rozważymy $\mathbb{R}^2$ z normą $\|\ \|_1$ zadaną wzorem $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ to otrzymamy tzw. *metrykę miejską*, której nazwa bierze się stąd, że odległość „w niej" mierzona odpowiada najkrótszej drodze pomiędzy punktami, którą trzeba przebyć poruszając się wyłącznie wzdłuż kierunków prostopadłych osi współrzędnych (patrz rys. 22), co odpowiada sieci ulic w „idealnym" mieście.

Inny przykład metryki indukowanej przez normę, to metryka zadana wzorem (VIII.3) przez normę „supremum" $\|f\|_\infty := \sup_{s\in S}|f(s)|$ z rozdziału VI rozważaną w przestrzeni $l^\infty(S)$ złożonej ze wszystkich funkcji f ograniczonych, $f : S \to \mathbb{R}$ (ew. $\mathbb{C}$), gdzie S jest pewnym ustalonym zbiorem.

Istnieją jednak także inne metryki, czasem dość „dziwne", które nie pochodzą od zadanej normy.

◇ Metryka kolejowa

Rozważmy płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ i ustalony jej punkt w —„węzeł kolejowy". Odległość pomiędzy x a y liczona jest następująco: jeżeli oba punkty leżą na tej samej półprostej o początku w punkcie w, to $\rho(x,y)$ jest długością („euklidesową") odcinka xy, w przeciwnym przypadku $\rho(x,y)$ jest sumą długości odcinków xw i wy. Odpowiada to drodze przebywanej przy użyciu „idealnej" promienistej sieci kolejowej z punktem węzłowym w. Sprawdzenie, że jest to metryka pozostawiam Państwu (patrz zad. 1).

◇ Metryka dyskretna

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Metrykę dyskretną w X określamy wzorem

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \neq y \\ 0 & \text{gdy } x = y. \end{cases}$$

I tu dowód (prościutki), że mamy do czynienia z metryką pozostaje dla Państwa (patrz zadanie 2).

2. Zbiory otwarte i domknięte. Zbieżność ciągów

Wprowadzone przez nas pojęcie metryki pozwala na wyróżnienie dwóch podstawowych typów zbiorów — zbiorów otwartych i domkniętych. Zaczniemy jednak od czegoś bardziej geometrycznego...

◇ Kula

Niech ρ będzie metryką w zbiorze X. Wzorując się na geometrycznej terminologii zaczerpniętej z $\mathbb{R}^3$ określamy najpierw *kulę* (otwartą) o środku $a \in X$ i promieniu $r \geqslant 0$ w X wzorem:

$$K(a,r) := \{x \in X : \rho(a,x) < r\}.$$

◇ Zbiory otwarte, domknięte, ograniczone

Abstrakcyjne pojęcie kuli pozwoli nam na określenie w sposób dość chyba naturalny pojęcia otwartości zbioru, a to z kolei, pozwoli nam zdefiniować domkniętość.

Definicja. *Zbiór $U \subset X$ jest* ***otwarty*** *(w X) wtw $\forall_{x\in U}\ \exists_{r>0}\ K(x,r) \subset U$. Zbiór $F \subset X$ jest* ***domknięty*** *(w X) wtw $X \setminus F$ jest otwarty.*

Pojęcie kuli pozwala też mówić o ograniczoności zbiorów. Mianowicie $B \subset X$ jest *ograniczony* wtw jest zawarty w pewnej kuli, tzn.

$$\exists_{a\in X, r\in\mathbb{R}_+}\ B \subset K(a,r).$$

Podkreślmy od razu, że nie każdy zbiór musi być otwarty lub domknięty oraz że otwartość i domkniętość nie wykluczają się wzajemnie. Np. X oraz $\emptyset$ są zarówno otwarte jak i domknięte.

W przypadku znanej nam dobrze przestrzeni metrycznej $\mathbb{R}$ zbiorami otwartymi są np. wszystkie przedziały otwarte, a domkniętymi — wszystkie przedziały domknięte, choć istnieje wiele różnych zbiorów otwartych, czy domkniętych nie będących przedziałami. Przedziały „otwarto-domknięte” nie są (wbrew nazwie) ani otwarte, ani domknięte. Każda kula (otwarta) jest w przestrzeni metrycznej zbiorem otwartym (patrz zad. 3). W każdej przestrzeni metrycznej zbiór jednopunktowy jest domknięty (patrz zad. 3). W skrajnie „dziwnej” przestrzeni dyskretnej każdy podzbiór jest jednocześnie otwarty i domknięty (patrz zad. 2). Na szczęście w bliskiej naszym sercom przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^d$ sytuacja jest całkiem odmienna.

Fakt 1. *Jedynymi podzbiorami $\mathbb{R}^d$, które są jednocześnie otwarte i domknięte* [125] *są $\emptyset$ i $\mathbb{R}^d$* [126] *.*

◇ Algebra zbiorów otwartych i domkniętych

Obie klasy — zbiorów otwartych i domkniętych mają ważne algebraiczne (w znaczeniu działań na zbiorach) własności.

Fakt 2. *Suma dowolnej rodziny i przecięcie skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Suma skończonej rodziny i przecięcie dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.*

---

[125] W sensie metryki euklidesowej — taki wybór uznajemy za umowny w tym i dalszych rozdziałach i nie będziemy o tym przypominać. Wszelkie odstępstwa od tej umowy będą wyraźnie zaznaczane.

[126] Przestrzenie metryczne o tej własności co opisana tu własność $\mathbb{R}^d$ noszą nazwę *spójnych*.

Dowód.
Niech $U_i \subset X$, U_i — otwarte dla wszystkich $i \in I$, gdzie I — pewien zbiór indeksów. A zatem gdy $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, to $x \in U_{i_0}$ dla pewnego $i_o \in I$, więc $K(x,r) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ dla pewnego $r > 0$ — stąd $\bigcup_{i\in I} U_i$ — otwarty.

Gdy $x \in \bigcap_{i\in I} U_i$, to dla wszystkich $i \in I$ mamy: $x \in U_i$, a zatem $K(x, r_i) \subset U_i$ dla pewnego $r_i > 0$. Skoro I — skończony, to $r := \min\{r_i : i \in I\} > 0$. Jednocześnie $K(x,r) \subset K(x,r_i) \subset U_i$ dla każdego i, skąd $K(x,r) \subset \bigcap_{i\in I} U_i$, co dowodzi otwartości zbioru $\bigcap_{i\in I} U_i$. Teza dla zbiorów domkniętych wynika teraz natychmiast ze wzorów de Morgana. □

W szczególności zatem dowolny zbiór skończony jest domknięty (w każdej przestrzeni metrycznej) jako skończona suma zbiorów jednopunktowych.

Warto jeszcze wspomnieć, że w matematyce rozważa się także ogólniejsze przestrzenie niż przestrzenie metryczne, mianowicie *przestrzenie topologiczne*. Tam pojęciem „pierwotnym" jest właśnie rodzina zbiorów otwartych (zwana topologią), a powyższy fakt (w części dot. zbiorów otwartych) zawiera podstawowe dwa aksjomaty dotyczące tej rodziny.

⋄ Granica w przestrzeni metrycznej

Tak jak już zapowiadaliśmy w przestrzeniach metrycznych można zdefiniować pojęcie granicy ciągu:

Definicja. *Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ elementów X jest **zbieżny** do $g \in X$ wtw*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{n\geqslant N}\ \rho(x_n, g) < \epsilon.$$

Jak więc widać uogólnienie tego pojęcia z przypadku ciągów liczbowych polega po prostu na zastąpieniu napisu „$|x_n - g|$" napisem „$\rho(x_n, g)$". Podobnie jak było to dla ciągów liczbowych będziemy używali wymiennie symboli $x_n \to g$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = g$ i g będziemy nazywali *granicą* ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$. Podkreślmy, że rozważamy tu tylko $g \in X$, nie mamy bowiem ogólnie rzecz biorąc żadnych odpowiedników $+\infty$ i $-\infty$. Tak jak wcześniej, ciąg *zbieżny* oznacza zbieżny do pewnego $g \in X$.

⋄ Sprowadzanie do ciągów liczbowych

Łatwo zauważyć, że zachodzi

$$x_n \to g \quad wtw \quad \rho(x_n, g) \to 0 \qquad \text{(VIII.4)}$$

Fakt ten pozwala więc sprowadzić badanie zbieżności w przestrzeni metrycznej X do badania zbieżności zwykłego ciągu liczbowego $\{\rho(x_n, g)\}$ (o ile wiemy, jaka miałaby być ewent. granica g). Jednak w najważniejszym dla nas przypadku — przestrzeni euklidesowej sprawa jest jeszcze prostsza. Umówmy się najpierw co do notacji: gdy rozważamy ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ o wyrazach w $\mathbb{R}^d$, to $(x_n)_j$ będzie oznaczać j–tą współrzędną punktu x_n, czyli $x_n = ((x_n)_1, \ldots, (x_n)_d)$.

Fakt 3. *Zbieżność w $\mathbb{R}^d$ jest zbieżnością „po współrzędnych", tzn. $x_n \to g$ wtw dla każdego $j = 1, \ldots, d$ zachodzi*

$$(x_n)_j \to g_j.$$

Dowód.
Mamy $\|x_n - g\| \geqslant |(x_n)_j - g_j| \geqslant 0$ więc „$\Rightarrow$" wynika z twierdzenie o 3 ciągach i z (VIII.4). Z drugiej strony (VIII.4) daje też „$\Leftarrow$", gdyż $\|x_n - g\| = (\sum_{j=1}^d ((x_n)_j - g_j)^2)^{\frac{1}{2}}$. □

Przykład.

$$(\frac{1}{n}, \sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{n}) \to (0, 1, 1).$$

◇ Jedyność granicy

Po tych wstępnych rozważaniach warto chyba zadać następujące pytanie związane z definicją zbieżności:

> *Po co zakładaliśmy, że metryka ρ musi spełniać aż tyle warunków, skoro przy definicji zbieżności nie odegrały one żadnej roli?*

Otóż przy samej definicji może nie odegrały, ale aby ta definicja spełniała nasze naturalne oczekiwania, granica (o ile istnieje) powinna być wyznaczona jednoznacznie.

Fakt 4. *Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej ma tylko jedną granicę.*

Dowód.
Załóżmy, że $x_n \to g$ i $x_n \to g'$. Zatem na mocy warunków 2) i 3) definicji metryki oraz (VIII.4) mamy

$$0 \leqslant \rho(g, g') \leqslant \rho(g, x_n) + \rho(x_n, g') = \rho(x_n, g) + \rho(x_n, g') \to 0$$

skąd $\rho(g, g') = 0$ na mocy twierdzenia o trzech ciągach. Czyli dzięki warunkowi 1) definicji metryki $g = g'$. □

Zauważmy, że w powyższym dowodzie zostały użyte wszystkie trzy warunki z definicji metryki!

◇ O domkniętości — inaczej

Okazuje się, że pojęcie zbieżności ciągów może posłużyć do sformułowania tzw. „ciągowej definicji" domkniętości zbioru — odzwierciedlającej chyba lepiej niż definicja pierwotna związek z nazwą „domknięty".

Fakt 5. *Zbiór $F \subset X$ jest domknięty wtw dla dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n \geqslant n_0}$ o wyrazach w F, jeżeli $x \in X$ i zachodzi $x_n \to x$, to $x \in F$.* **B.D.**

Dowód tego faktu pozostawiam jako zadanie dla Państwa (zad. 9). Oznacza on, że domkniętość zbioru to „możliwość przechodzenia do granicy z przynależnością do tego zbioru".

◇ Twierdzenia Bolzano–Weierstrassa i o zupełności w wersji dla $\mathbb{R}^d$

Przyjęte przez nas bardzo ogólne warunki z definicji metryki pozwoliły co prawda wykazać jednoznaczność granicy, ale nie pozwalają ogólnie uzyskać bardzo wielu analogów twierdzeń znanych nam z teorii ciągów liczbowych. Na szczęście jednak spora ich część jest prawdziwa w przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^d$. Oto dwa z nich.

Twierdzenie VIII.1 (Bolzano–Weierstrassa). *Każdy ciąg ograniczony*[127] *w $\mathbb{R}^d$ posiada podciąg zbieżny.*

Dowód.
Jeżeli $\{x_n\}_{n \geqslant n_0}$ jest ograniczony, to oczywiście każdy z ciągów $\{(x_n)_j\}_{n \geqslant n_0}$ dla $j = 1, \ldots, d$ jest także ograniczony. Dzięki tw. Bolzano–Weierstrassa dla ciągów liczbowych znajdziemy zatem taki ściśle rosnący ciąg indeksów $\{k_n^{(1)}\}$, że $(x_{k_n^{(1)}})_1 \to g_1$ dla pewnego $g_1 \in \mathbb{R}$. Znaleźliśmy więc podciąg ciągu $\{x_n\}$, który jest „zbieżny na pierwszej współrzędnej". Możemy postąpić analogicznie, wybierając podciąg tego znalezionego już podciągu „zbieżny na drugiej współrzędnej" [128] i nie stracimy przy tym zbieżności na współrzędnej 1–szej. Jednocześnie podciąg podciągu jest też podciągiem, zatem kontynuując to postępowanie, po d krokach uzyskamy podciąg zbieżny na każdej współrzędnej, a więc zbieżny na mocy faktu 3. □

---

[127] Ciąg o wyrazach w przestrzeni metrycznej jest ograniczony wtw zbiór jego wyrazów jest ograniczony.
[128] Pozostawiam Czytelnikom sformułowanie pojęcia „zbieżności na j–tej współrzędnej".

Z drugiej strony, w dowolnej przestrzeni metrycznej ciąg zbieżny musi być ograniczony (patrz zad. 7).

Twierdzenie VIII.2 (o zupełności). *Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ o wyrazach w $\mathbb{R}^d$ jest zbieżny wtw*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{m,n\geqslant N}\ \rho(x_m,x_n)<\epsilon\ ^{129)}\ .$$

Dowód pominiemy, gdyż jest on niemal identyczny z dowodem tego twierdzenia dla przypadku skalarnego (tw. II.7). Warto tylko zauważyć, że prostsza implikacja, tj. „$\Rightarrow$” zachodzi nie tylko w $\mathbb{R}^d$, ale w dowolnej przestrzeni metrycznej.

◇ Zwartość

Zdefiniujemy jeszcze tzw. zbiory *zwarte*. W przypadku podzbiorów $\mathbb{R}^d$ zbiór jest *zwarty* wtw jest domknięty i ograniczony. Ogólnie definicja jest inna (patrz przypis niżej). Z faktu 5 i twierdzenia VIII.1 otrzymujemy następujący wynik.

Wniosek. *Jeżeli $K\subset\mathbb{R}^d$ jest zwarty, to każdy ciąg o wyrazach w K posiada podciąg zbieżny do granicy z K* [130] .

Co więcej nietrudno również wykazać implikację przeciwną (patrz zad. 10).

Przykładem zbioru zwartego jest każdy przedział domknięty w $\mathbb{R}$. Zbiorami, które można uznać za wielowymiarowe analogi przedziałów domkniętych są „kostki domknięte”, czyli $\{x\in\mathbb{R}^d:\ \forall_{j=1,\dots,d}\ a_j\leqslant x_j\leqslant b_j\}$, gdzie $a_1,\dots,a_d,b_1\dots,b_d\in\mathbb{R}$ oraz „kule domknięte”, czyli $\{x\in\mathbb{R}^d:\|a-x\|\leqslant r\}$, gdzie $a\in\mathbb{R}^d$, $r\in[0;+\infty)$. Jedne i drugie są zbiorami zwartymi.

3. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych

◇ Granica i ciągłość funkcji w przestrzeniach metrycznych

Obecnie zajmiemy się głównie granicą i ciągłością funkcji określonych w $D\subset\mathbb{R}^k$ o wartościach w $\mathbb{R}^l$. Ponieważ jednak zarówno definicje, jak i część wyników dają się sformułować ogólnie — dla przestrzeni metrycznych, zatem załóżmy, że mamy dwie przestrzenie metryczne (X,ρ_X), (Y,ρ_Y), podzbiór $D\subset X$ oraz funkcję $f:D\to Y$. Poniższa definicja jest przeniesieniem na bardziej abstrakcyjny grunt znanych Państwu definicji z rodziału IV. Jest to więc zarazem uogólnienie jak i przypomnienie.

Definicja.

- *Punkt $a\in X$ jest* ***punktem skupienia*** *zbioru D (przypominam skrót „p. s.”) wtw istnieje ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ elementów zbioru $D\setminus\{a\}$ taki, że $x_n\to a$.*
- *Niech a — p. s. D oraz niech $g\in Y$. Wówczas $\lim\limits_{x\to a}f(x)=g$, czyli g jest* ***granicą*** *f* ***w punkcie*** *a wtw dla dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ elementów $D\setminus\{a\}$ takiego, że $x_n\to a$ (w sensie ρ_X) zachodzi $f(x_n)\to g$ (w sensie ρ_Y).*
- *Niech $a\in D$. Funkcja f jest* ***ciągła w (punkcie)*** *a wtw dla dowolnego ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ elementów D takiego, że $x_n\underset{\rho_X}{\longrightarrow}a$* [131] *zachodzi $f(x_n)\underset{\rho_Y}{\longrightarrow}f(a)$.*

---

[129] Jak nietrudno się domyślić warunek ten stanowi definicję *ciągu Cauchy'ego* w dowolnej przestrzeni metrycznej. Jednocześnie te przestrzenie metryczne, w których zbieżność jest równoważna warunkowi Cauchy'ego, tak jak w tw. VIII.2, nazywane są przestrzeniami *zupełnymi*.

[130] Teza tego wyniku stanowi jednocześnie definicję zwartości w przypadku ogólnym.

[131] Zamiast pisać, że chodzi o zbieżność w sensie metryki ρ, w przypadku gdyby mogła powstać ewentualnie niejasność o jaką chodzi metrykę, będziemy czasem pisać „$\underset{\rho}{\rightarrow}$” zamiast samej strzałki „$\rightarrow$”.

- *Funkcja f jest* ***ciągła*** *wtw jest ciągła w każdym $a \in D$.*

Podane tu definicje granicy i ciągłości w punkcie to tzw. *wersje Heinego*. Podobnie jak dla przypadku skalarnego równoważne im są odpowiednie *wersje Cauchy'ego*. Np. dla ciągłości w punkcie a ma ona postać:

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ (\rho_X(x,a)<\delta \Rightarrow \rho_Y(f(x),f(a))<\epsilon).$$

Również związek ciągłości z granicą jest analogiczny jak w przypadku skalarnym, tzn. gdy $a \in D$ i a jest p. s. D, to f jest ciągła w a wtw

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

◇ Granice iterowane

W przypadku funkcji określonych na podzbiorach $\mathbb{R}^d$ można oprócz „zwykłej" (zdefiniowanej w tym podrozdziale) granicy funkcji rozważać także tzw. *granice iterowane*. Np. dla funkcji dwóch zmiennych będą to granice następujące

$$\lim_{x_2\to a_2}\lim_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x_1\to a_1}\lim_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)$$

(o ile mają one sens i istnieją). Należy tu podkreślić, że związki pomiędzy istnieniem (też wartością) dla poszczególnych granic iterowanych oraz dla „zwykłej" granicy f w $a=(a_1,a_2)$ (można ją zapisać symbolem $\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1,x_2)$) są bardzo luźne — patrz zadania 13 i 14.

◇ Najprostsze funkcje ciągłe wielu zmiennych

Oczywiście funkcje stałe są zawsze ciągłe. W przypadku funkcji wielu zmiennych ważny przykład funkcji ciągłych to funkcje „współrzędne", tzn. $\mathbb{x}_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dla $j=1,\ldots,d$ zadane dla $x \in \mathbb{R}^d$ wzorem

$$\mathbb{x}_j(x) = x_j$$

(ich ciągłość wynika np. z faktu 3 str. 137).

◇ Algebraiczne operacje na funkcjach ciągłych

Aby móc w praktyce sprawdzać ciągłość rozmaitych funkcji, z którymi będziemy mieli do czynienia, bez konieczności każdorazowego odwoływania się do definicji ciągłości, wygodnie będzie nam używać poniższych dwóch faktów. Pierwszy z nich dotyczy funkcji pomiędzy dowolnymi przestrzeniami metrycznymi i jest natychmiastową konsekwencją definicji (Heinego).

Fakt 1. *Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

Zanim sformułujemy kolejny wynik przyjmijmy następujące oznaczenie dotyczące funkcji o wartościach w $\mathbb{R}^d$. Jeżeli $f : X \to \mathbb{R}^d$ to dla $j=1,\ldots,d$ przez f_j będziemy oznaczać „j–tą funkcję współrzędną" funkcji f, tj. funkcję z X w $\mathbb{R}$ zadaną dla $x \in X$ wzorem

$$f_j(x) = (f(x))_j,$$

a zatem $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_d(x))$.

Fakt 2.
(i) Funkcja $f : X \to \mathbb{R}^d$ jest ciągła wtw dla każdego $j=1,\ldots,d$ funkcja f_j jest ciągła.
(ii) Suma, różnica, iloczyn, iloraz[132] *funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych jest funkcją ciągłą.*

[132] Oczywiście przy założeniu, że iloraz ten ma sens, tzn., że nie występuje „dzielenie przez 0".

Dowód.
Część (i) wynika natychmiast z faktu 3 str. 137, a część (ii) z twierdzenia o rachunkowych własnościach granicy (dla ciągów liczbowych — tw. II.1). □

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadana wzorem

$$f(x) = (x_1x_2 + x_3, (|x_1| + 1)^{(x_2-x_3)})$$

jest ciągła. Mamy bowiem $f_1 = \mathbb{x}_1 \cdot \mathbb{x}_2 + \mathbb{x}_3$, $f_2 = \exp\circ((\mathbb{x}_2 - \mathbb{x}_3) \cdot (g \circ \mathbb{x}_1))$, gdzie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana jest wzorem $g(t) = \ln(|t|+1)$, czyli ciągłość f wynika z faktu 1 i faktu 2 oraz z ciągłości funkcji exp, g i $\mathbb{x}_j$.

Oczywiste jest też, że obcięcie funkcji ciągłej do podzbioru jej dziedziny jest funkcją ciągłą.

⋄ Otwartość/domkniętość zbiorów a ciągłość funkcji

Okazuje się, że ciągłość jest bardzo blisko związana z pojęciem otwartości (także domkniętości) zbiorów. Mianowicie dla funkcji określonych na przestrzeni metrycznej ciągłość oznacza dokładnie zachowywanie otwartości (równoważnie — domkniętości) zbiorów przy braniu przeciwobrazów zbiorów. Przypomnijmy tu, że dla $f : D \to Y$ *przeciwobraz* zbioru $A \subset Y$ względem funkcji f oznaczany jest przez $f^{-1}(A)$ (uwaga! nie należy tego mylić z analogicznie oznaczanym obrazem A względem funkcji odwrotnej do f, która może nawet w ogóle nie istnieć...) oraz

$$f^{-1}(A) := \{x \in D : f(x) \in A\}.$$

Twierdzenie VIII.3. *Dla funkcji $f : D \to Y$ następujące warunki są równoważne:*
(i) f jest ciągła;
(ii) dla dowolnego zbioru otwartego U w Y istnieje zbiór otwarty V w X taki, że $f^{-1}(U) = D \cap V$;
(iii) dla dowolnego zbioru domkniętego F w Y istnieje zbiór domknięty H w X taki, że $f^{-1}(F) = D \cap H$.[133)]

Nie będziemy tu dowodzić implikacji (ii) ⇒ (i) ani (iii) ⇒ (i). Ograniczymy się do dowodu (i) ⇒ (ii) skąd (i) ⇒ (iii) wynika natychmiast ze wzorów de Morgana oraz zachowania działań na zbiorach przy braniu przeciwobrazu względem funkcji.

Dowód ((i) ⇒ (ii)).
Zakładamy, że f — ciągła i niech U — otwarty w Y. Dla dowolnego $x \in f^{-1}(U) \subset D$ mamy $f(x) \in U$ zatem wybierzmy $\epsilon_x > 0$ taki, że

$$K(f(x), \epsilon_x) \subset U.$$

Stąd korzystając z ciągłości f w x wybierzmy takie $\delta_x > 0$, że dla dowolnego $x' \in D$ jeżeli $\rho_X(x, x') < \delta_x$, to $f(x') \in U$. Powyższe oznacza dokładnie, że

$$K(x, \delta_x) \cap D \subset f^{-1}(U). \tag{VIII.5}$$

Niech zatem

$$V := \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} K(x, \delta_x)$$

133) Zbiory postaci $D \cap V$ i $D \cap H$ gdzie V — otwarty w X, H — domknięty w X, to dokładnie wszystkie zbiory otwarte lub — odpowiednio — domknięte w przestrzeni metrycznej D z metryką ρ_X ograniczoną do D. A zatem w punkcie (ii) można po prostu mówić o otwartości $f^{-1}(U)$ **w** D a w (iii) o domkniętości $f^{-1}(F)$ **w** D.

— jest to zbiór otwarty w X jako suma kul otwartych. Ponadto mamy $f^{-1}(U) \subset V \cap D$, bo dla każdego $x \in f^{-1}(U)$ oczywiście $x \in K(x, \delta_x)$. Z drugiej strony na mocy (VIII.5) mamy też

$$V \cap D = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} (K(x, \delta_x) \cap D) \subset f^{-1}(U).$$

□

Wniosek. *Niech $f : D \to Y$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas*
a) jeśli D jest otwarty w X oraz U otwarty w Y, to $f^{-1}(U)$ jest otwarty w X;
b) jeżeli D jest domknięty w X oraz F domknięty w Y, to $f^{-1}(F)$ jest domknięty w X.

Dowód.
Wynika to natychmiast z tw. VIII.1 oraz z tego, że przecięcie dwóch zbiorów otwartych (domkniętych) jest zbiorem otwartym (domkniętym). □

Powyższy wniosek przydaje się często jako szybki sposób dowodzenia otwartości lub domkniętości zbiorów zadanych przy pomocy pewnych równości bądź nierówności.

Przykład. Zbiór $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} : x_1^2 < x_2\}$ jest otwarty (w $\mathbb{R}^2$) ponieważ $A_1 = f^{-1}(U)$ dla $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$, $f(x) = x_1^2 - x_2$, $U = (-\infty; 0)$.

Zbiór $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0 \text{ i } x_1^2 - x_2^2 = 7\}$ jest domknięty (w $\mathbb{R}^2$) ponieważ $A_2 = f^{-1}(F_1) \cap g^{-1}(F_2)$, gdzie $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1$, $g(x) = x_1^2 - x_2^2$, $F_1 := [0; +\infty)$, $F_2 = \{7\}$.

◇ Osiąganie kresów na zbiorach zwartych

Jednym z ważnych zadań, którymi się wkrótce zajmiemy będzie znajdowanie kresów funkcji wielu zmiennych (będzie to też jeden z celów rachunku różniczkowego wielu zmiennych, który jest tematem następnego rozdziału). Podobnie jak było to w przypadku jednej zmiennej, zadanie takie jest stosunkowo łatwe, gdy funkcja swój kres osiąga. Stąd niezwykle ważną rolę pełni następujące uogólnienie twierdzenia IV.10.

Twierdzenie VIII.4 (Weierstrassa, o osiąganiu kresów). *Jeżeli $K \subset \mathbb{R}^d$ jest niepustym zbiorem zwartym oraz $f : K \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to f osiąga swoje kresy, tzn. istnieją $m, M \in K$ takie, że $f(m) = \inf_{x \in K} f(x)$ oraz $f(M) = \sup_{x \in K} f(x)$. W szczególności f jest ograniczona.*

Dowód.
Dowód ten jest analogiczny do dowodu tw. IV.10 — bierzemy $x_n \in K$ takie, że $f(x_n) \to \inf_{x \in K} f(x)$ i korzystając z wniosku ze strony 139 [134] wybieramy podciąg $\{x'_n\}$ ciągu $\{x_n\}$ taki, że $x'_n \to m$ dla pewnego $m \in K$ mamy zatem $f(x'_n) \to f(m)$ z ciągłości f, a jednocześnie $f(x'_n) \to \inf_{x \in K} f(x)$ skąd $f(m) = \inf_{x \in K} f(x)$. Analogicznie postępujemy dla sup. □

◇ Ekstrema lokalne

Na zakończenie tego rozdziału sformułujmy definicję *ekstremów lokalnych*, czyli punktów osiągania „lokalnych kresów", dla funkcji skalarnej f określonej na podzbiorze D przestrzeni metrycznej X.

Definicja. *Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ posiada w $a \in D$* ***maksimum (minimum)*** *lokalne wtw*

$$\exists_{r>0} \forall_{x \in K(a,r) \cap D} \; f(x) \leqslant f(a) \quad (f(x) \geqslant f(a)).$$

Jest to zatem całkiem naturalne uogólnienie pojęcia, które znaliśmy dla funkcji zmiennej rzeczywistej. Badanie ekstremów lokalnych będzie jednym z naszych głównych celów w następnym rozdziale.

---

[134] Jak widać z tego dowodu twierdzenie to można uogólnić na funkcje ciągłe określone na zbiorach zwartych w dowolnych przestrzeniach metrycznych — patrz przypis do przywołanego tu wniosku.

Zadania do Rozdziału VIII

$\forall$ [135] 1. Wykaż, że określona w przykładzie 3 ze strony 135 metryka kolejowa spełnia warunki metryki. Naszkicuj kulę o środku a i promieniu 1 w przypadku gdy a) $a = w$; b) $a \neq w$.

$\forall$ 2. Wykaż, że określona w przykładzie 4 ze strony 135 metryka dyskretna spełnia warunki metryki. Opisz $K(a, r)$ w przestrzeni metrycznej z tą metryką w zależności od r. Wykaż, że każdy podzbiór jest w tej przestrzeni metrycznej otwarty i domknięty zarazem.

$\forall$ 3. Wykaż, że w dowolnej przestrzeni metrycznej każda kula otwarta o promieniu $r > 0$ jest zbiorem otwartym, a każdy zbiór jednopunktowy zbiorem domkniętym.

4. Wykaż, że podzbiór U przestrzeni metrycznej jest otwarty wtw U jest sumą pewnej rodziny kul otwartych w tej przestrzeni.

$\forall$ 5. Znajdź przykład pokazujący, że a) suma dowolnej rodziny zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym; b) przecięcie dowolnej rodziny zbiorów otwartych nie musi być zbiorem otwartym.

6. Przy użyciu wzorów de Morgana (dla rachunku zbiorów) uzupełnij szczegółami dowód drugiej części faktu 2 ze strony 136.

$\forall$ 7. Wykaż, że w przestrzeni metrycznej każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

$\forall$ 8. Zbadaj zbieżność (i ew. znajdź granicę) ciągu o wyrazach $(\sqrt[n]{n^{100} + 7^n - 6^n}, (1-\frac{1}{n})^{(n^2)}) \in \mathbb{R}^2$ w następujących przestrzeniach metrycznych

   (a) $\mathbb{R}^2$ (czyli „zwykłej $\mathbb{R}^2$”, czyli $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową);
   (b) $\mathbb{R}^2$ z metryką miejską;
   (c) $\mathbb{R}^2$ z metryką kolejową z węzłem $w = (0, 0)$;
   (d) $\mathbb{R}^2$ z metryką kolejową z węzłem $w = (7, 0)$;
   (e) $\mathbb{R}^2$ z metryką dyskretną.

$\forall$ 9. Wykaż fakt 5 ze str. 138, tzn. równoważność definicji domkniętości i „ciągowej definicji” domkniętości.

10. Wykaż, że jeżeli $K \subset \mathbb{R}^d$ jest taki, że każdy ciąg o wyrazach w K posiada podciąg zbieżny do elementu z K, to K jest domknięty i ograniczony (a więc zwarty).

11. Niech X będzie przestrzenią metryczną z metryką ρ i niech $a \in X$. Określmy $g : X \to \mathbb{R}$ wzorem $g(x) = \rho(a, x)$. Czy g musi być ciągła?

$\forall$ [136] 12. Znajdź wszystkie punkty skupienia poniższych zbiorów w $\mathbb{R}^d$:

   (a) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\}$;
   (b) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Z}\}$;
   (c) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$;
   (d) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1\}$;
   (e) $\{(\frac{1}{n}, \sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{n!}) \in \mathbb{R}^3 : n \in \mathbb{N}\}$.

---

[135] Jako domowe.
[136] Przynajmniej 2 przykłady.

13. Wykaż, że jeżeli $a \in \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ i istnieje $r > 0$ takie, że $K(a,r) \setminus \{a\} \subset D$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ i $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, dla x_1 d.b. a_1 istnieje $\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)$ oraz dla x_2 d.b. a_2 istnieje $\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2)$, to

$$\lim_{x_2\to a_2}\lim_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2) = \lim_{x_1\to a_1}\lim_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2) = c.$$

$\forall$ 14. Zbadaj istnienie i ew. wartość granicy oraz obu granic iterowanych funkcji f w punkcie $(0,0)$ dla poniższych przykładów $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{dla } x \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } x = (0,0); \end{cases}$

(b) $f(x) = x_1 \cdot \mathbb{D}(x_2)$, gdzie $\mathbb{D}$ oznacza funkcję Dirichleta.

$\forall$ [137] 15. Wyjaśnij szczegółowo w oparciu o odpowiednie fakty z wykładu, dlaczego funkcje zadane poniższymi wzorami są ciągłe:

(a) $\left(\log_{(x_1^2+2)}(x_2^2+2), (x_1^2+1)^{\left((x_2^2+1)^{x_1}\right)}\right)$, $x \in \mathbb{R}^2$;

(b) $(x_1+x_2+x_3, x_1\cdot x_2\cdot x_3, x_1^{(x_2^{x_3})}, \log_{x_1}(x_2+x_3), 0)$, $x \in (1;+\infty)^3$.

$\forall$ [138] 16. Zbadaj ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} w(x) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

gdy $w(x)$ dla $x \neq 0$ zadane jest wzorem

(a) $\frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2+(x_1-x_2)^2}$, $d = 2$;

(b) $\frac{x_1x_3+x_2x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $d = 3$;

(c) $\frac{x_1^2x_2}{x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2}$, $d = 2$;

(d) $\frac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}$, $d = 2$.

17. Wykaż, że każda funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła, gdy w X rozważamy metrykę dyskretną.

$\forall$ [139] 18. Dla każdego z poniższych podzbiorów $\mathbb{R}^d$ rozstrzygnij czy jest on domknięty, otwarty, ograniczony, zwarty (w dwóch pierwszych sprawach użyj najlepiej wniosku ze strony 142 oraz faktu 1 ze strony 136)

(a) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > x_2\}$;

(b) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 3 \geqslant e^{(x_1-x_2)}\}$;

(c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : e^{(x_1+x_2^2)} = \ln \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\}$;

(d) $\{x \in \mathbb{R}^3 : \sin(\sin(\cos(x_1\cdot x_2))) = \sin(\sin(x_1+x_2))\cdot x_2;\ x_1 \geqslant -1,\ x_2 \leqslant 1\}$;

(e) $\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\} : \frac{1}{(x_1-1)^2+x_2^2} < \frac{1}{(x_2-1)^2+x_1^2},\ x_1 < x_2\}$.

$\forall$ 19. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = \frac{1}{x}\}$. Udowodnij, że A jest domknięty korzystając z „ciągowej definicji” domkniętości (fakt 5 str. 138). Wyjaśnij dlaczego nie można tu w sposób bezpośredni wykorzystać wniosku ze str. 142.

[137] Przynajmniej 1 przykład.
[138] Przynajmniej 2 przykłady, w tym c).
[139] Przynajmniej 2 przykłady.

IX Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

[około 5 wykładów]

W tym rozdziale zobaczymy, w jaki sposób można uogólnić pojęcie pochodnej funkcji jednej zmiennej o wartościach rzeczywistych na przypadek funkcji wielu zmiennych o wartościach wektorowych, tzn. funkcji z $D \subset \mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^k$. Sporo uwagi poświęcimy funkcjom skalarnym (tj. $k = 1$) — a szczególnie problemom związanym ze znajdowaniem ich ekstremów. Wbrew tytułowi rozdziału zaczniemy jednak od sytuacji niejako przeciwnej, mianowicie od funkcji jednej zmiennej ($m = 1$) ale o wartościach wektorowych ($k \geqslant 1$).

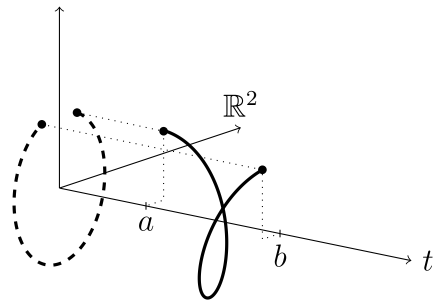
1. Funkcje wektorowe 1–nej zmiennej

◇ Motywacje fizyczne

Funkcje zmiennej rzeczywistej o wartościach wektorowych to obiekty, z którymi miewamy do czynienia bardzo często w różnych zastosowaniach matematyki — szczególnie w fizyce. Wówczas zmienna to najczęściej czas „t”, a wartością funkcji może być np. położenie poruszającego się punktu w przestrzeni — wtedy $f(t) \in \mathbb{R}^d$, gdzie $d = 3$ (ewentualnie też 2 lub 1, gdy chodzi o ruch „płaski” lub na prostej). Gdy będziemy chcieli opisać ruch nie jednego, ale n punktów, wartości funkcji będą już wektorami z $\mathbb{R}^{n \cdot d}$.

◇ Przedstawienia graficzne, krzywe

W przypadku, gdy dziedziną f jest przedział domknięty $[a; b]$ i f jest ciągła, funkcja taka bywa często nazywana *krzywą*. Jednak nie należy mylić obrazu $f([a; b])$ funkcji f, który też potocznie bywa nazywany „krzywą”, z samą funkcję f, która jest oczywiście czymś więcej — dwie różne funkcje (krzywe) mogą mieć ten sam obraz. Jak więc wyobrażać sobie taką funkcję? Gdy $d = 2$, można ewentualnie posługiwać się wykresem (patrz rysunek 24).



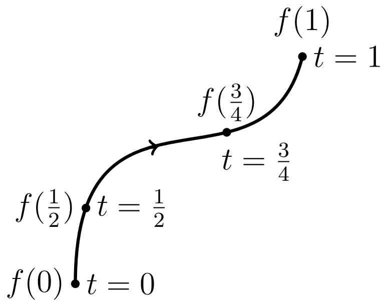
Rysunek 24. Wykres krzywej (linia ciągła) i jej obraz (linia przerywana).

Inny, nieco prostszy sposób, to traktowanie f jako „ruchu wzdłuż jej obrazu” (patrz rysunek 25).

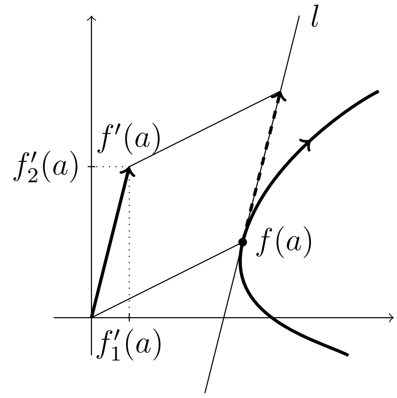
◇ Pochodna funkcji wektorowej

Uogólnienie pojęcia pochodnej na tego typu funkcje jest sprawą bardzo prostą. Niech $f : D \to \mathbb{R}^k$, czyli $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$, gdzie wszystkie funkcje współrzędne $f_j : D \to \mathbb{R}$ to już dobrze nam znane funkcje skalarne jednej zmiennej oraz niech $a \in D \subset \mathbb{R}$. Wówczas, jak łatwo się domyślić, f jest *różniczkowalna* w a wtw każda ze współrzędnych funkcji f_j jest różniczkowalna w a i gdy tak jest, to *pochodną* f *w punkcie* a nazywamy wektor

$$(f_1'(a), \ldots, f_k'(a)),$$



Rysunek 25. Samą krzywą można sobie wyobrażać także jako poruszanie się wzdłuż jej obrazu.



Rysunek 26. Wektor styczny $f'(a)$ i prosta styczna l.

który oznaczamy $f'(a)$, czyli tak samo jak w przypadku funkcji skalarnych. Inne oznaczenia to tradycyjne $\frac{df}{dx}(a)$ oraz $\dot{f}(a)$ (to ostatnie szczególnie często używane jest w sytuacjach fizycznych, gdy zmienna ma interpretację czasu). A więc pochodna w punkcie jest wektorem z $\mathbb{R}^k$.

◇ Interpretacja geometryczno–fizyczna i prosta styczna

Tak rozumiana pochodna ma swój dobrze chyba znany sens geometryczno-fizyczny. Mianowicie po „zaczepieniu" wektora $f'(a)$ w punkcie $f(a)$ uzyskamy punkt leżący na tzw. *prostej stycznej* do *trajektorii* — czyli do obrazu f — w punkcie $f(a)$. Wszystkie wektory postaci $\lambda f'(a)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ to *wktory styczne* (w tym sam $f'(a)$). Ponadto długość tego wektora, czyli $\|f'(a)\|$ to skalarna prędkość poruszania się wzdłuż trajektorii (czyli ta wartość, którą odczytujemy na liczniku, gdy poruszamy się np. autem i $f(t)$ oznacza np. nasze położenie w chwili t). Sam wektor $f'(a)$ to tzw. „wektor prędkości". A zatem, jeśli tylko $f'(a) \neq 0$, to l — prosta styczna wspomniana wyżej jest zbiorem punktów zadanym następująco:

$$l = \{f(a) + tf'(a) \in \mathbb{R}^k : t \in \mathbb{R}\}.$$

◇ Kłopoty z analogiami...

Można oczywiście pytać o to jakie twierdzenia dotyczące pochodnej przenoszą się z przypadku skalarnego na przypadek wektorowy. Zauważmy jednak, że bardzo wiele własności znanych nam dla funkcji skalarnych po prostu nie ma sensu w przypadku $k > 1$. Tak np. jest z monotonicznością, czy z pojęciem ekstremum lokalnego. Ale czy jest np. prawdziwe twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej w wersji „wektorowej" (tu zarówno założenia, jak i teza mają sens)? Moglibyśmy odpowiedniego punktu „pośredniego" c szukać osobno dla każdej spośród funkcji współrzędnych f_j. Do nich przecież twierdzenie Lagrange'a stosuje się, jako że są one skalarne. Jednak nie ma żadnego powodu by to c było takie samo dla wszystkich j ... Nie powinno więc dziwić, że na to pytanie odpowiedź jest negatywna (choć nie był to dowód, jednak odpowiedni przykład nietrudno znaleźć — patrz zad. 2).

◇ Oszacowanie zamiast równości

Na szczęście, można udowodnić rozmaite „namiastki" tw. Lagrange'a, które pozwalają uzyskiwać różne oszacowania dotyczące przyrostu funkcji na podstawie oszacowań „wielkości" pochodnej. Oto jedna z nich.

Fakt. *Jeżeli* $f : [a;b] \to \mathbb{R}^k$ *jest klasy* C^1 [140], *to*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_{[a;b]} \|f'(t)\| dt \leqslant (b-a) \cdot \sup_{t \in [a;b]} \|f'(t)\|.$$

Aby to udowodnić posłużmy się lematem. Najpierw oznaczenie: dla $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}^k$ takiej, że $\varphi_j \in \Re$ dla wszystkich $j = 1, \ldots, k$ przyjmujemy

$$\int_{[a;b]} \varphi(t) dt := (\int_{[a;b]} \varphi_1(t) dt, \ldots, \int_{[a;b]} \varphi_k(t) dt).$$

Lemat. *Dla* φ *j.w. zachodzi*

$$\| \int_{[a;b]} \varphi(t) dt \| \leqslant \int_{[a;b]} \|\varphi(t)\| dt.$$

B.D.

Dowód (faktu).
Na mocy twierdzenia VII.4 mamy $f_j(b) - f_j(a) = \int_{[a;b]} f_j'(t) dt$ dla $j = 1, \ldots, m$, skąd

$$f(b) - f(a) = \int_{[a;b]} f'(t) dt,$$

a zatem pierwsza nierówność wynika z lematu, a druga z własności „monotoniczności" całki Riemanna. □

Zauważmy, że pierwsza nierówność z powyższego faktu ma bardzo dobrze zrozumiały sens fizyczny. Całka $\int_{[a;b]} \|f'(t)\| dt$ to bowiem po prostu „długość trasy" przebytej przez punkt poruszający się w sposób opisany funkcją f („droga = prędkość »skalarna«· czas", gdy ta prędkość skalarna jest stała, ogólnie jednak trzeba użyć całki ...). A jest przecież dość oczywiste, że długość przebytej trasy jest nie mniejsza niż odległość położenia końcowego $f(b)$ od początkowego $f(a)$, czyli właśnie $\|f(b) - f(a)\|$.

2. Metody różniczkowania funkcji wielu zmiennych

◇ Wnętrze, otoczenie, odcinek

Dziedziny rozważanych tu funkcji będą podzbiorami $\mathbb{R}^m$, wprowadzimy więc dla nich kilka pojęć i oznaczeń analogicznych niektórym wcześniej już poznanym pojęciom, dotyczącym podzbiorów $\mathbb{R}$. Jeśli $D \subset \mathbb{R}^m$, to a jest *punktem wewnętrznym* D wtw $K(a, \epsilon) \subset D$ dla pewnego $\epsilon > 0$. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru D nazywamy *wnętrzem* D i oznaczamy

$$\operatorname{Int} D.$$

Otoczeniem punktu $a \in \mathbb{R}^m$ nazywamy dowolny otwarty podzbiór $U \subset \mathbb{R}^m$ taki, że $a \in U$. *Odcinek* łączący punkt a z punktem b, tzn. zbiór $\{a + t(b-a) : t \in [0;1]\}$ oznaczać będziemy przez $[a;b]$ [141].

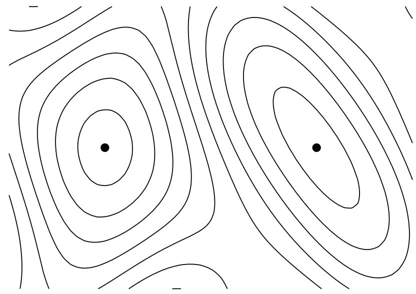
---

[140] Tzn. każda z funkcji f_j jest klasy C^1.

[141] Niestety w przypadku $m = 1$ mamy tu pewną kolizję oznaczeń, bowiem np. $[1;0]$ to wg. wcześniejszych oznaczeń $\emptyset$, a nie odcinek łączący liczby 0 i 1. Stosowniejsze byłoby więc używane wcześniej w $\mathbb{R}$ oznaczenie $[a?b]$. Jednak liczę, że uda się uniknąć nieporozumień — to oznaczenie stosować będziemy jedynie dla konkretnych $m > 1$ lub dla „ogólnych" m.

⋄ Jak zobaczyć funkcję wielu zmiennych?

Jak wyobrażać sobie funkcje wielu zmiennych? Jeśli ograniczymy się do przypadku funkcji skalarnej dwóch zmiennych, można odwołać się do przedstawień graficznych. Jedna możliwość to wykres, będący w tym przypadku czymś w rodzaju 2 wymiarowej powierzchni w $\mathbb{R}^3$ (oczywiście dla odpowiednio „regularnych" funkcji), albo „mapy plastycznej", w której wysokość n.p.m., odpowiada wartości funkcji w odpowiednim punkcie z płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ będącym rzutem prostopadłym na „podstawę" mapy. Inny — płaski sposób — to odwołanie się do „mapy" poziomic funkcji, czyli obrazu z zaznaczonymi zbiorami, na których funkcja przyjmuje pewne ustalone wartości (rys. 27). By przedstawienie takie było pełniejsze należy jeszcze przy każdej z poziomic zaznaczyć odpowiadającą jej wartość funkcji.



Rysunek 27. Poziomice funkcji mogą przypominać to, co często widzimy na mapie fizycznej obszarów górzystych.

⋄ Definicja pochodnej cząstkowej

Zaczniemy od najprostszego chyba sposobu różniczkowania funkcji wielu zmiennych. Polega on na tym, że jedną ze zmiennych traktujemy jako zmienną po której będziemy różniczkować (— po prostu, w sensie znanym nam dla funkcji jednej zmiennej), a pozostałe traktujemy jak parametry (stałe). Niech więc $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^m$ i $a \in D$. Oznaczmy $D_a^j := \{t \in \mathbb{R} : (a_1, \ldots \underset{j}{t} \ldots, a_m) \in D\}$ [142)] oraz

$$f_a^j : D_a^j \to \mathbb{R}, \qquad f_a^j(t) = f(a_1, \ldots, \underset{j}{t} \ldots, a_m).$$

W szczególności $a_j \in D_a^j$. Jeżeli f_a^j posiada pochodną w punkcie a_j, to nazywamy ją *pochodną cząstkową f w punkcie a po j–tej zmiennej* (ew. po „x_j", lub inaczej, w zależności od przyjętych oznaczeń zmiennych). Tradycyjne oznaczenie to

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a),$$

choć zamiast $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ będziemy często używać też krótszych oznaczeń: $\partial_{x_j} f$ lub po prostu $\partial_j f$. Tak więc $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_{x_j} f(a) = \partial_j f(a) = (f_a^j)'(a_j)$.

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = e^{x_1} \cdot x_2^3$. Wówczas $\partial_1 f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = e^{x_1} \cdot x_2^3$, $\partial_2 f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 3e^{x_1} x_2^2$.

Oczywiście, jeżeli funkcja f posiada skończoną pochodną cząstkową po x_j w każdym punkcie a podzbioru $\tilde{D} \subset D$, to możemy rozważać funkcję $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$. Zwróćmy uwagę na to, że mimo iż w definicji pochodnej cząstkowej różniczkuje się „po jednej zmiennej", to

[142)] Gdzie $(a_1, \ldots \underset{j}{t} \ldots, a_m)$ to punkt powstały z a przez zastąpienie a_j przez t.

$\partial_j f$ jest funkcją m–zmiennych, tak samo jak funkcja f (nie należy mylić funkcji $\partial_j f$ z $(f_a^j)'$, argumentem funkcji $\partial_j f$ jest bowiem punkt $a \in \mathbb{R}^m$, w którym ta pochodna cząstkowa jest liczona, a nie tylko jego j–ta współrzędna a_j).

◇ „Nieprzyjemny" przyklad

Niech

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x_1 = 0 \text{ lub } x_2 = 0 \\ 0 & \text{wpp.}^{143)} \end{cases}.$$

Funkcja ta nie jest ciągła w punkcie 0 (= (0,0)). Jednak oczywiście $\partial_1 f(0) = \partial_2 f(0) = 0$. A zatem z istnienia i skończoności obu pochodnych cząstkowych f w jakimś punkcie nie wynika nawet ciągłość f w tym punkcie ...

Jak więc widać z powyższego przykładu, różniczkowanie cząstkowe może nie być zbyt dobrym analogiem różniczkowania funkcji jednej zmiennej ... Mimo to jednak okazuje się ono całkiem wystarczającym narzędziem w pewnych sytuacjach.

◇ Pochodna cząstkowa a ekstrema lokalne

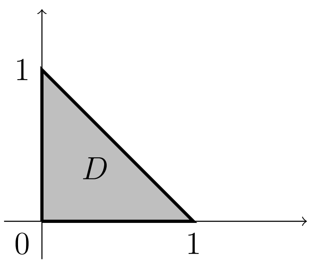
Tak jest np. dla warunku koniecznego na ekstrema (tzn. maksima lub minima) lokalne.

Twierdzenie IX.1 (o ekstremach lokalnych). *Jeżeli $a \in \operatorname{Int} D$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ posiada w punkcie a ekstremum lokalne i istnieje $\partial_j f(a)$, to $\partial_j f(a) = 0$.*

Dowód.
Z założeń twierdzenia wynika, że dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$ liczba a_i jest punktem wewnętrznym D_a^i oraz f_a^i posiada ekstremum lokalne w a_i. Tak jest więc w szczególności dla $i = j$, ale f_a^j posiada pochodną w a_j i $(f_a^j)'(a_j) = \partial_j f(a)$. Zatem na mocy twierdzenia o ekstremach lokalnych dla funkcji jednej zmiennej (tw. V.2 + przypis do niego) mamy $\partial_j f(a) = 0$. □

Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, twierdzenie to pozwala w wielu sytuacjach znajdować kresy funkcji.

Przykład. Niech $f(x, y) = xy(1-x-y)$ i niech $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$ (patrz rysunek 28). Znajdziemy kresy funkcji f rozważanej w zbiorze D. Zauważmy najpierw, że na mocy wniosku ze strony 142 zbiór D jest domknięty i oczywiście jest ograniczony, a zatem jest zwarty. Ponadto f jest ciągła, zatem oba kresy są osiągane w D na mocy twierdzenia Weierstrassa (tw. VIII.4). W każdym z punktów, gdzie są one osiągane funkcja f posiada w szczególności ekstremum lokalne. Taki punkt może albo należeć do $\operatorname{Int} D$, albo do „brzegu" D, tj. do $D \setminus \operatorname{Int} D$ [144]. Łatwo sprawdzić, że $\operatorname{Int} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, x + y < 1\}$.



Rysunek 28. W tym przykładzie D to „pełen trójkąt".

[143] Tzn. „w przeciwnym przypadku".
[144] W przypadku zbiorów domkniętych (i tylko takich) jest to ogólna definicja tzw. *brzegu* zbioru.

Na mocy twierdzenia IX.1, punkt (x, y) z wnętrza D, w którym f posiada ekstremum musi spełniać dwa warunki:

$$\partial_x f(x, y) = y(1 - x - y) - xy = 0,$$
$$\partial_y f(x, y) = x(1 - x - y) - xy = 0,$$

czyli $1 - 2x - y = 0 = 1 - 2y - x$ (bo $x, y \neq 0$), skąd $x = y = \frac{1}{3}$. Czyli kres, jeżeli osiągany jest we wnętrzu D, może być tylko w punkcie $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, w którym f ma wartość $\frac{1}{27}$. Natomiast w każdym punkcie brzegu D funkcja f ma wartość $0 < \frac{1}{27}$. Stąd kres górny nie może być osiągany na brzegu, jest więc osiągany w $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ i podobnie kres dolny nie może być osiągany w $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, jest więc osiągany na brzegu. A stąd $\sup_{x \in D} f(x) = \frac{1}{27}$, $\inf_{x \in D} f(x) = 0$.

Należy jednak zwrócić uwagę na to, że w istotny sposób skorzystaliśmy tu z wiedzy, że oba te kresy są w D osiągane!

⋄ Algebraiczne własności pochodnych cząstkowych

Oczywiście dla pochodnych cząstkowych obowiązują analogiczne jak dla pochodnej jednej zmiennej własności „arytmetyczne" dotyczące sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Co będzie natomiast, gdy złożymy funkcję m zmiennych f z funkcją (też ew. wielu zmiennych) wewnętrzną g o wartościach w $\mathbb{R}^m$ i założymy, że zarówno f jak i funkcje współrzędne g_j posiadają wszystkie pochodne cząstkowe odpowiednio w $g(a)$ i a? Czy to pozwala stwierdzić istnienie pochodnych cząstkowych złożenia $f \circ g$ w a? I jaki ew. wzór tu obowiązuje? Niestety, bez dodatkowych założeń, odpowiedź na pytanie o istnienie jest negatywna! To kolejny znak wskazujący na „słabość" różniczkowania cząstkowego. Wzór na pochodne cząstkowe złożenia, który można uzyskać przy dodatkowych założeniach nosi nazwę *reguły łańcuchowej*. Zajmiemy się nim dopiero przy omawianiu trzeciego z kolei sposobu różniczkowania funkcji wielu zmiennych ...

⋄ Funkcje klasy C^1

Ważną klasę stanowią te funkcje f, dla których $\partial_i f$ istnieją i mają skończone wartości w każdym punkcie dziedziny D oraz $\partial_i f$, jako funkcje określone na D, są ciągłe dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$. Nazywamy je funkcjami klasy C^1 (lub piszemy $f \in C^1(D)$). Dzięki temu, że w „typowych sytuacjach" umiemy zarówno wyliczyć pochodne cząstkowe, jak i zbadać ich ciągłość (patrz rozdział VIII), także stwierdzenie, że F jest klasy C^1 nie powinno sprawiać większych trudności. Można (trochę nieściśle) stwierdzić, że wszystkie funkcje, które zadają się „jednolitymi" wzorami przy użyciu zwykłych działań i składania z użyciem wyłącznie różniczkowalnych funkcji „elementarnych" jednej zmiennej oraz funkcji współrzędnych $\mathbb{x}_j$ to funkcje klasy C^1. Np. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem:

$$\frac{\ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1) \cdot \sin(x_1 \cdot x_2 \cdot \cos(x_3))}{e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}}.$$

W szczególności, nietrudno wykazać, że funkcja klasy C^1 określona na otwartej dziadzinie D jest ciągła. Wkrótce wykażemy jednak wynik znacznie silniejszy (patrz tw. IX.3).

⋄ Różniczkowanie cząstkowe w przypadku wektorowym

Różniczkowanie cząstkowe można też w analogiczny sposób zdefiniować dla funkcji o wartościach wektorowych (tj. w $\mathbb{R}^d$). Należy wówczas jedynie pochodną $(f_a^j)'(a_j)$ funkcji (wektorowej tym razem) f_a^j w punkcie a_j, która pojawia się w definicji $\partial_j f(a)$, rozumieć tak jak to zostało określone w podrozdziale IX.1. A zatem wprowadzone tu definicje pochodnych cząstkowych, czy klasy C^1 oraz odpowiednie oznaczenia rozszerzamy w ten właśnie sposób na przypadek funkcji z $D \subset \mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^k$. Oczywiście ma miejsce wzór $\partial_j f(a) = (\partial_j f_1(a), \ldots, \partial_j f_k(a))$.

◇ Pochodna kierunkowa

Kolejny, nieco bardziej „zaawansowany” sposób różniczkowania funkcji wielu zmiennych, to *różniczkowanie kierunkowe*, tzn. „w kierunku ustalonego wektora”. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{R}^k$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^m$, natomiast o punkcie a, w którym będziemy „różniczkować”, założymy dla wygody więcej niż przy okazji pochodnych cząstkowych: będziemy zakładać, że a należy do wnętrza D ($a \in \operatorname{Int} D$). Ponadto niech v będzie dowolnym wektorem z $\mathbb{R}^m$ — będzie to „kierunek różniczkowania” [145]. Zauważmy, że aby opisać zachowanie się funkcji f obciętej do prostej przechodzącej przez a o kierunku wyznaczonym przez v [146] (ściślej, do przecięcia tej prostej z dziedziną D) można posłużyć się pomocniczą funkcją φ_v jednej zmiennej, zadaną wzorem

$$\varphi_v(t) := f(a + tv).$$

Ponieważ $a \in \operatorname{Int} D$, zatem φ_v jest poprawnie określona w pewnym otoczeniu $t = 0$ i jest to funkcja o wartościach w $\mathbb{R}^k$, tak jak f (oczywiście, φ_v wyznaczona jest nie tylko przez v, lecz także przez f oraz a).

Definicja. *Jeżeli istnieje $\varphi_v'(0)$, to nazywamy ją **pochodną kierunkową** funkcji f **w punkcie** a **w kierunku** v oraz oznaczamy przy pomocy dowolnego spośród symboli*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a), \quad \partial_{\vec{v}} f(a) \text{ lub } \partial_v f(a).$$

◇ Związki z pochodnymi cząstkowymi

Nietrudno zauważyć, że pochodna kierunkowa w kierunkach „osi współrzędnych” ma bliski związek z pochodnymi cząstkowymi. Oznaczamy przez e_j j–ty wektor bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^m$, tj. $(e_j)_i = 1$ dla $i = j$ oraz $(e_j)_i = 0$ dla $i \neq j$.

Fakt. *Gdy $a \in \operatorname{Int} D$, wówczas o ile istnieje jedna z pośród pochodnych $\frac{\partial f}{\partial \vec{e_j}}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, to istnieje też druga i zachodzi*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e_j}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Dowód.
Mamy $\varphi_{e_j}(t) = f(a + te_j) = f(a_1, \ldots a_j \underset{j}{+} t \ldots, a_m) = f_a^j(t + a_j)$, stąd $\frac{\partial f}{\partial \vec{e_j}}(a) = \varphi_{e_j}'(0) = (f_a^j)'(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ (przy czym te równości należy czytać w kolejności odpowiedniej do kierunku implikacji, którą dowodzimy). □

Jednak z istnienia wszystkich pochodnych cząstkowych nie wynika wcale istnienie pochodnych kierunkowych we wszystkich kierunkach.

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie taka, jak w przykładzie 2 ze strony 149. Wówczas $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = 0$, ale dla $v \neq re_j$, $r \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, nie istnieje skończona pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0)$ ponieważ φ_v jest nieciągła w 0.

A zatem rzeczywiście „różniczkowalność we wszystkich kierunkach” to coś istotnie lepszego, niż tylko „różniczkowalność cząstkowa”. Okazuje się jednak, że to ciągle jeszcze dość mało …W szczególności ta „lepsza” różniczkowalność wciąż jeszcze nie gwarantuje nawet ciągłości funkcji! Odpowiedni przykład znajdziecie Państwo w zadaniach (patrz zad. 6).

[145] Choć tak naprawdę, ta nazwa byłaby dobra gdybyśmy ograniczyli się do wektorów długości 1, które można utożsamiać z „kierunkowymi”, bez tego założenia to coś więcej niż tylko kierunek …

[146] Gdy $v = 0$, to otrzymujemy tylko sam punkt a zamiast prostej.

◇ Najlepszy sposób różniczkowania...

Jak widzieliśmy, wprowadzone dotąd dwie metody uogólnienia pojęcia pochodnej funkcji jednej zmiennej na przypadek wielu zmiennych, choć dość naturalne i łatwo zrozumiałe, okazały się jednak „słabe” z analitycznego punktu widzenia. Np., istnienie i skończoność w danym punkcie tak uogólnionych pochodnych nie gwarantowało nawet ciągłości funkcji w tym punkcie.

Poznamy tu pojęcie tzw. *różniczki* [147)] funkcji wielu zmiennych, które można uznać za najwłaściwsze uogólnienie pochodnej funkcji jednej zmiennej — nie ma ono bowiem mankamentu wspomnianego wyżej, a ponadto teoria z nim związana zawiera uogólnienie wielu ważnych elementów teorii znanej nam z „wymiaru 1”. Niestety jednak pojęcie to jest nieco trudniejsze od dwóch poprzednio omawianych.

◇ Różniczka funkcji 1–nej zmiennej

Aby definicja różniczki stała się bardziej zrozumiała, zacznijmy od następującego przeformułowania definicji skończonej pochodnej funkcji skalarnej 1-zmiennej: liczba p jest pochodną funkcji f w punkcie a wtw

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-p\cdot h}{h}=0$$

W liczniku, oprócz „przyrostu funkcji” $f(a+h)-f(a)$ pojawia się wyrażenie $p\cdot h$, czyli — z punktu widzenia „przyrostu argumentów” h — wyrażenie liniowe od h. Zamiast więc myśleć o samej liczbie p (pochodnej f w punkcie a) możemy równie dobrze myśleć o funkcji liniowej[148)] (inaczej: przekształceniu liniowym) $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$L(h)=p\cdot h$$

— to przekształcenie liniowe L nazywamy w przypadku funkcji skalarnej *różniczką* funkcji f *w punkcie* a. Inaczej mówiąc różniczka f w punkcie a, to takie przekształcenie liniowe $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}[f(a+h)-f(a)-L(h)]=0, \tag{IX.1}$$

tzn. „w pobliżu” $h=0$ wartość $L(h)$ przybliża przyrost $f(a+h)-f(a)$ z dokładnością „wyższego rzędu” niż h [149)] .

◇ Przypadek wielu zmiennych

Warunek (IX.1) stanowi dla nas podpowiedź jak należy zdefiniować różniczkę dla funkcji wielu zmiennych.

Rozważmy $f:D\to\mathbb{R}^k$, gdzie $D\subset\mathbb{R}^m$ oraz $a\in\operatorname{Int}D$. Te założenia obowiązywać będą w całym bieżącym rozdziale.

Definicja. *Przekształcenie liniowe* $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ *jest* ***różniczką*** f *w punkcie* a *wtw*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}[f(a+h)-f(a)-L(h)]=0. \tag{IX.2}$$

[147)] Używana bywa też nazwa *różniczka zupełna*, a także, po prostu, *pochodna*.

[148)] Proszę nie mylić z potoczną nazwą „liniowa” oznaczającą *de facto* funkcję afiniczną, tj. zadaną wzorem $cx+d$.

[149)] Tzn. z dokładnością do $o(h)$ przy $h\to 0$.

Różniczkę f w punkcie a oznaczamy przez $Df(a)$ [150] . O funkcji f mówimy, że jest **różniczkowalna w punkcie** a wtw $Df(a)$ istnieje, oraz **różniczkowalna**, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in D$.

⋄ To samo nieco inaczej

Czasami wygodnie jest zapisać warunek (IX.2) w równoważny mu następujący sposób:

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + r(x-a) \tag{IX.3}$$

dla pewnej funkcji r określonej w pewnym otoczeniu 0, spełniającej

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} r(h) = 0 \tag{IX.4}$$

(tak jak dla $m = 1$, warunek ten oznaczamy w skrócie: $r(h) = o(h)$ przy $h \to 0$). A zatem można powiedzieć, że L jest różniczką f w punkcie a wtedy, gdy f w pobliżu a przybliża się z dokładnością do $o(x-a)$ przez $f(a) + L(x-a)$, czyli w szczególności przez pewną funkcję afiniczną, której część liniową stanowi L.

⋄ Jedyność różniczki

By oznaczenie $Df(a)$ było sensowne, należałoby najpierw sprawdzić, że istnieje co najwyżej jedna różniczka f w punkcie a. Załóżmy więc, że L i $\tilde{L}$ są obie takimi różniczkami. Wówczas na mocy (IX.2) dla L i $\tilde{L}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{\|h\|}(L-\tilde{L})(h) = \frac{1}{\|h\|}(L(h) - \tilde{L}(h)) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

W szczególności dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ możemy użyć powyższego, rozważając ciąg $\{h_n\}$ postaci $h_n = \frac{1}{n}x$, a zatem z liniowości L i $\tilde{L}$

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\|x\|}(L-\tilde{L})(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{\|x\|}(L-\tilde{L})(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

skąd $\frac{1}{\|x\|}(L-\tilde{L})(x) = 0$ (gdyż nie zależy od n), czyli $(L-\tilde{L})(x) = 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^m$, tzn. $L = \tilde{L}$.

⋄ Trochę niewygodne oznaczenia

Ponieważ $Df(a)$ jest przekształceniem (czyli funkcją) z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^k$, zatem trzeba zdecydować jak oznaczać jego wartość na wektorze $h \in \mathbb{R}^m$. Niestety, nie jest to zbyt wygodne, ale użyjemy w tej sytuacji oznaczenia

$$Df(a)(h) \quad \text{lub} \quad (Df(a))(h).$$

Tymczasem samo Df (bez „(a)”) może być używane do oznaczania różniczki f traktowanej jako nowa funkcja określona w tych punktach a, w których $Df(a)$ istnieje. Wartości tej funkcji to już elementy nie $\mathbb{R}^k$, lecz zbioru przekształceń liniowych z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^k$!

---

[150] Niektórzy oznaczają ją też $f'(a)$ zamiast $Df(a)$, co prowadzi do pewnego (niedużego) zamieszania w przypadku jednej zmiennej. Liczę, że stosowane tu przez nas oznaczenie różniczki „D” nie będzie się myliło z „D” oznaczającym tu także dziedzinę funkcji ...

◇ Zgodność dla jednej zmiennej

Jak widzieliśmy ze wstępu przed definicją, w przypadku funkcji jednej zmiennej (oraz punktów wewnętrznych dziedziny) różniczkowalność w rozumieniu wcześniejszym (z rozdziału V) jest tym samym, co tu zdefiniowana. Ponadto dla f różniczkowalnej w a zachodzi

$$\forall_{h\in\mathbb{R}}\ Df(a)(h) = f'(a)\cdot h.$$

◇ Kilka różniczek

Spróbujmy przy użyciu samej tylko definicji zbadać różniczkowalność i znaleźć różniczki dla kilku prostych funkcji.

Przykłady.

1. Funkcja stała f jest oczywiście różniczkowalna w każdym punkcie wewnętrznym a swej dziedziny i $Df(a) = 0$ (tu 0 rozumiemy jako zerowe przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^k$ dla odp. m i k). Mamy bowiem $f(a+h) = f(a)$ dla wszystkich h w otoczeniu 0.

2. Niech $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas $(DA)(x) = A$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$, bowiem z liniowości A mamy

   $$A(x+h) - A(x) - A(h) = 0$$

   dla dowolnych $x, h \in \mathbb{R}^m$.

3. Powyższy przykład można nieco rozszerzyć. Jeżeli $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ jest przekształceniem afinicznym, tzn. zadanym wzorem $f(x) = Ax + b$, gdzie $b \in \mathbb{R}^k$ oraz A — jak wyżej, to $(Df)(x) = A$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^m$.

4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1x_2$. Spróbujmy odgadnąć jaka jest wartość $Df(a)$ dla ustalonego $a \in \mathbb{R}^2$. Mamy:

   $$f(a+h) - f(a) = (a_1+h_1)(a_2+h_2) - a_1a_2 = a_1h_2 + a_2h_1 + h_1h_2.$$

   Wiemy, że różniczka $Df(a)$ powinna być taką funkcją liniową, że po jej odjęciu od powyższego przyrostu pozostaje część „rzędu wyższego” niż h. Musimy więc przyrost ten zapisać jako sumę „części liniowej” (różniczki) i wyrażenia typu $o(h)$. W naszym przypadku naturalnym kandydatem na tę częsc liniową, czyli różniczkę, wydaje się być składnik zadany wzorem $a_1h_2 + a_2h_1$. Spróbujmy zatem sprawdzić, czy funkcja liniowa $\mathbb{R}^2 \ni h \to a_1h_2 + a_2h_1 \in \mathbb{R}$ „nadaje się” jako $Df(a)$, tzn. sprawdźmy czy h_1h_2 będące ową „pozostałą częścią przyrostu”jest typu $o(h)$. Mamy:

   $$|\frac{1}{\|h\|}h_1h_2| = \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = |h_1|\cdot\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leqslant |h_1|,$$

   skąd $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}h_1h_2 = 0$, a zatem rzeczywiście $Df(a)(h) = a_1h_2 + a_2h_1$.

Zauważmy, że we wszystkich rozważanych powyżej przykładach skorzystaliśmy z jedyności różniczki.

⋄ Różniczkowalność a ciągłość

Jak zapowiadaliśmy, tak rozumiana różniczkowalność gwarantuje automatycznie ciągłość funkcji.

Twierdzenie IX.2 (o ciągłości funkcji różniczkowalnej). *Jeżeli f jest różniczkowalna w a, to f jest ciągła w a.*

Dowód.
Na mocy (IX.3), (IX.4) mamy $f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + r(x-a)$, gdzie $\lim_{x\to a} r(x-a) = \lim_{x\to a} \|x-a\| \left(\frac{1}{\|x-a\|} r(x-a)\right) = 0$. Mamy ponadto

$$\lim_{x\to a} Df(a)(x-a) = \lim_{h\to 0} Df(a)(h) = Df(a)(0) = 0,$$

gdyż $Df(a)$ jest funkcją ciągłą jako przekształcenie liniowe (wynika to natychmiast np. z faktu 2 strona 140 i znanej Państwu z GAL–u ogólnej postaci funkcji liniowych). Stąd $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, czyli f jest ciągła. □

⋄ Różniczka a pochodne kierunkowe i cząstkowe

Okazuje się także, że wprowadzone przez nas pojęcie różniczkowalności jest „silniejsze" niż obie wcześniejsze „niedoszłe" definicje. A ściślej, ma miejsce wynik następujący.

Fakt. *Jeżeli f jest różniczkowalna w a, to dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^m$ pochodna kierunkowa f w punkcie a w kierunku v istnieje oraz*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = Df(a)(v), \tag{IX.5}$$

w szczególności istnieją wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ dla $j = 1, \ldots, m$ oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = Df(a)(e_j). \tag{IX.6}$$

Dowód.
Musimy wykazać, że $\varphi_v'(0)$ istnieje i jest równa $Df(a)(v)$, gdzie $\varphi_v(t) := f(a+tv)$ dla $t \in \mathbb{R}$ z pewnego otoczenia liczby 0. Gdy $v = 0$ jest to oczywiste (mamy 0 po obu stronach). Niech więc $v \neq 0$ i $t \neq 0$. Wówczas na mocy (IX.3) oraz liniowości różniczki

$$\frac{1}{t}(\varphi_v(t) - \varphi_v(0)) = \frac{1}{t}[Df(a)(tv) + r(tv)] = \frac{1}{t}[tDf(a)(v) + |t|\|v\|\frac{r(tv)}{\|tv\|}] = Df(a)(v) + \frac{|t|}{t}\|v\|\frac{r(tv)}{\|tv\|},$$

skąd $\varphi_v'(0) = Df(a)(v) + \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\|v\|\frac{r(tv)}{\|tv\|} = Df(a)(v)$, gdyż $\frac{|t|}{t}$ jest ograniczoną funkcją zmiennej $t \neq 0$ oraz zachodzi (IX.4). Dowodzi to pierwszej części faktu, a druga część wynika z pierwszej oraz z faktu ze strony 151. □

Z powyższego wyniku w szczególności, że pochodna kierunkowa w a funkcji **różniczkowalnej** w punkcie a zależy w sposób liniowy od kierunku różniczkowania, tzn. przekształcenie

$$\mathbb{R}^m \ni v \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) \in \mathbb{R}^k$$

jest liniowe (równe jest po prostu $Df(a)$). Gdy zamiast różniczkowalności, założymy tylko, że f posiada w każdym kierunku pochodną kierunkową w punkcie a, to takiej liniowej zależności od kierunku nie mamy powodu oczekiwać.

◇ Macierz Jacobiego

W przypadku jednej zmiennej pochodna była obiektem bardzo prostym — liczbą. Tymczasem różniczka funkcji wielu zmiennych to obiekt dość skomplikowany — przekształcenie liniowe ... Jak się tym w praktyce posługiwać? Na szczęście, jak zapewne pamiętają Państwo jeszcze z wykładu z GAL–u, każde przekształcenie liniowe L z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^k$ posiada swoją bardzo wygodną reprezentację w formie znacznie chyba bardziej „namacalnej" niż samo L. Chodzi oczywiście o reprezentację macierzową — w postaci macierzy przekształcenia L. Tu, mówiąc o macierzy przekształcenia L zawsze będziemy mieli na myśli jego macierz w bazach standardowych. Taka reprezentacja pozwala na jednoznaczne zakodowanie L przy pomocy $k \cdot m$ liczb — wyrazów tej macierzy. Macierz ta ma m kolumn i k wierszy i jak wiadomo, jej j–ta kolumna utworzona jest z wektora $L(e_j)$, gdzie e_j jest j–tym wektorem bazy standardowej w $\mathbb{R}^m$. A zatem wzór (IX.6) pozwala na sformułowanie następującego wniosku.

Wniosek. *Jeżeli f jest różniczkowalna w a, to macierz przekształcenia liniowego $Df(a)$ jest taką macierzą $k \times m$, której j–ta kolumna utworzona jest z wektora $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, tzn. jej miejsce w i–tym wierszu oraz j–tej kolumnie równe jest $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ [151], dla $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$.*

Macierz przekształcenia $Df(a)$ nazywana bywa **macierzą Jakobiego** (f w punkcie a). Oznaczać ją będziemy $MJf(a)$. A zatem $MJf(a) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,m}}$, tzn.

$$MJf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Gdy $m = k$, to $MJf(a)$ jest macierzą kwadratową i definiujemy **jakobian** f w punkcie a wzorem

$$Jf(a) := \det Df(a) = \det MJf(a).$$

◇ Niektóre przypadki szczególne

Przyjrzyjmy się pewnym szczególnym sytuacjom, mianowicie funkcjom skalarnym i funkcjom jednej zmiennej.

- **k=1**, czyli f jest funkcją o wartościach liczbowych — wówczas $MJf(a)$ ma jeden wiersz, który utożsamiamy po prostu z wektorem z $\mathbb{R}^m$. Wektor ten nazywany jest **gradientem** (f w punkcie a) i oznaczany jest najczęściej $\operatorname{grad} f(a)$, lub $\nabla f(a)$ [152]. A zatem w tym przypadku:

$$MJf(a) = \operatorname{grad} f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)) \in \mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^{1,m} \quad ^{153)}.$$

- **m=1**, czyli f jest funkcją jednej zmiennej (o wartościach wektorowych — w $\mathbb{R}^k$) — wówczas $MJf(a)$ ma jedną kolumnę, która jest po prostu transpozycją wektora pochodnej $f'(a)$ wprowadzonego w podrozdziale 1. A zatem wówczas

$$MJf(a) = (f'(a))^T = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_k'(a) \end{pmatrix}.$$

[151] Przypomnijmy, że f_i to i–ta funkcja współrzędna funkcji f, tzn. $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k$.
[152] Proszę nie mylić jednak ∇ z Δ, który to znaczek używany jest m.in. do oznaczania tzw. Laplasjanu ...
[153] Tym razem „$\approx$" oznacza utożsamienie $\mathbb{R}^m$ z macierzami rzeczywistymi $1 \times m$.

- **m=k=1**, czyli f jest zwykłą funkcją skalarną jednej zmiennej — wówczas mamy macierz 1×1:
$$MJf(a) = (f'(a)).$$

◇ A ogólnie...

W przypadku dowolnych m i k można myśleć o $MJf(a)$ jako o macierzy, której kolejne wiersze to gradienty kolejnych funkcji $f_1, \dots, f_k$ w punkcie a.

Przykład. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1x_2, x_1 + x_2)$. Wówczas

$$MJf(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Jf(x) = x_2 - x_1.$$

Zauważmy, że według przyjętej przez nas definicji, by mówić o macierzy Jakobiego f w punkcie a powinniśmy zakładać, że f jest w a różniczkowalna. Jednak właściwie dla wypisania tej macierzy wystarczą nam same pochodne cząstkowe f w a, które mogą istnieć nawet bez różniczkowalności.

◇ Ekstrema lokalne ponownie

Inna konsekwencja wzoru (IX.6) dotyczy ekstremów lokalnych funkcji.

Wniosek. *Jeżeli $a \in \operatorname{Int} D$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w a i posiada w a ekstremum lokalne, to $Df(a) = 0$, czyli* $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

Dowód.
Z twierdzenia o ekstremach lokalnych (tw. IX.1) i z (IX.6) mamy $\operatorname{grad} f(a) = MJf(a) = 0$, skąd $Df(a) = 0$. □

◇ Klasa C^1 a różniczkowalność

Jak widzieliśmy, gdy ma się do dyspozycji wyłącznie definicję, praktyczne sprawdzanie dla konkretnych funkcji, że są one różniczkowalne, wcale nie jest sprawą łatwą. A zatem, choć różniczkowalność jest, jak powiedzieliśmy, pojęciem „znacznie lepszym" niż istnienie pochodnych cząstkowych, za to wydaje się, że jest znacznie mniej praktyczna. Istnienie pochodnych cząstkowych sprawdzało się bowiem w „typowych" sytuacjach bardzo prosto. Na szczęście, wcale jednak nie jest tak źle, jak mogło się wydawać. W „typowych" sytuacjach można się bowiem posłużyć następującym ważnym rezultatem.

Twierdzenie IX.3 (o różniczkowalności dla klasy C^1). *Jeśli $f : D \to \mathbb{R}^k$ jest klasy C^1 oraz $a \in \operatorname{Int} D$, to f jest różniczkowalna w punkcie a.* **B.D.**

A zatem choć samo istnienie pochodnych cząstkowych do różniczkowalności nie wystarczało, to jednak ich ciągłość już tę różniczkowalność gwarantuje! W efekcie pozwala to bez trudu uzyskać różniczkowalność wszystkich funkcji zadanych elementarnymi wzorami.

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1e^{x_2}$. Mamy $\partial_1 f(x) = e^{x_2}$, $\partial_2 f(x) = x_1e^{x_2}$ — a zatem $\partial_1 f$ i $\partial_2 f$ są ciągłe (patrz fakty 1 i 2 ze strony 140). Czyli f jest klasy C^1, co dzięki powyższemu twierdzeniu daje różniczkowalność f.

◇ Algebraiczne własności różniczkowania

Jak należało się spodziewać, klasa funkcji różniczkowalnych posiada także w przypadku funkcji wielu zmiennych naturalne własności algebraiczne.

Twierdzenie IX.4 (o własnościach rachunkowych różniczki).

1. *Suma funkcji różniczkowalnych jest różniczkowalna. Co więcej, jeżeli* $f, g : D \to \mathbb{R}^k$ *są różniczkowalne w* $a \in D$*, to* $f+g$ *jest różniczkowalna w* a *oraz* $D(f+g)(a) = D(f)(a) + D(g)(a)$.

2. *Iloczyn funkcji różniczkowalnej skalarnej i funkcji różniczkowalnej wektorowej jest różniczkowalny. Jeśli* $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $g : D \to \mathbb{R}^k$ *są różniczkowalne w* $a \in D$*, to* $f \cdot g$ *jest różniczkowalna w* a [154)] .

3. *Złożenie funkcji różniczkowalnych jest różniczkowalne. Co więcej jeśli* $f : D \to D' \subset \mathbb{R}^k$ *jest różniczkowalna w* $a \in D$ *oraz* $g : D' \to \mathbb{R}^l$ *jest różniczkowalna w* $f(a)$*, to* $g \circ f$ *jest różniczkowalna w* a *oraz*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a). \tag{IX.7}$$

Dowód powyższego twierdzenia pozostawiam jako zadanie. Najlepiej zacząć od p. 3. — patrz zadanie 24. Punkty 1. i 2. można dowodzić niezależnie, ale ciekawszy jest dowód z użyciem punktu 3. — patrz zadanie 25.

◇ Reguła łańcuchowa

Twierdzenie to ma także swój analog dotyczący klasy C^1 (patrz zadanie 26). Bardzo ważnym wnioskiem z p. 3. twierdzenia IX.4 jest wzór na pochodne cząstkowe złożenia, zwany też *regułą łańcuchową*.

Wniosek. *Przy założeniach punktu 3. twierdzenia IX.4 zachodzi*

$$MJ(g \circ f)(a) = MJg(f(a)) \cdot MJf(a), \tag{IX.8}$$

gdzie „·" po prawej stronie powyżej oznacza mnożenie macierzy. W szczególności, gdy $l = 1$*, ma miejsce następujący wzór*

reguła łańcuchowa:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_s}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_s}(a),$$

czyli

$$\partial_s (g \circ f)(a) = \sum_{j=1}^{k} \partial_j g(f(a)) \cdot \partial_s f_j(a), \tag{IX.9}$$

gdzie $s = 1, \ldots, m$.

Dowód.

Wzór (IX.8) to natychmiastowa konsekwencja wzoru (IX.7) oraz faktu, że macierz złożenia przekształceń liniowych, to iloczyn ich macierzy. Z kolei wzór (IX.9) otrzymamy z (IX.8) stosując wzór na wyrazy iloczynu macierzy. □

Podkreślmy, że na ogół nie wolno zamieniać kolejności mnożenia macierzy po prawej stronie (IX.8) (nawet gdyby miało to sens ...).

Wzór (IX.9) może być łatwiejszy do zapamiętania, gdy będziemy myśleć o funkcji wewnętrznej f jako o pewnej „zamianie zmiennych" z x na y i użyjemy nieformalnego tradycyjnego zapisu „$f_j(x) = y_j$" w związku z czym zamiast $\frac{\partial f_j}{\partial x_s}$ napiszemy „$\frac{\partial y_j}{\partial x_s}$". Jeżeli jeszcze

[154)] Tu wzór na $D(f \cdot g)(a)$ pomijamy, ale patrz zadanie 25.

pominiemy „oczywiste" punkty w których różniczkujemy, to otrzymamy tradycyjny zapis tego wzoru

$$\frac{\partial g}{\partial x_s} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_s}.$$

Traktując napisy z prawej strony jak ułamki, po prawej stronie otrzymamy właśnie to co po lewej, choć (niestety ...) już k razy, a nie tylko jeden raz ...

Przykład. Niech $g(y) = y_1 \cdot y_2^2$, $y \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x^2, 3x)$, $x \in \mathbb{R}$. Mamy

$$(g \circ f)(x) = x^2 \cdot (3x)^2 = 9x^4.$$

W szczególności $(g \circ f)'(1) = 36$. Ten sam wynik możemy uzyskać stosując regułę łańcuchową:

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(1) = \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(1) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(1)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x}(1) &= y_2^2\,|_{y=(1,3)} \cdot 2 + (2y_1 \cdot y_2)\,|_{y=(1,3)} \cdot 3 \\ &= 9 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 9 = 36.\end{aligned}$$

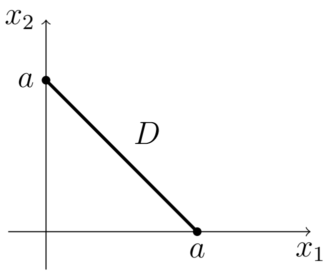
3. Ekstrema warunkowe

Tytułowe *ekstrema warunkowe*, nazywane też przez innych *ekstrema związane*, to ekstrema lokalne funkcji określonych na pewnych szczególnych podzbiorach $\mathbb{R}^d$.

W poprzednim podrozdziale sformułowaliśmy (i to dwukrotnie) pewne warunki konieczne na ekstremum funkcji wielu zmiennych (patrz twierdzenie IX.1 i wniosek ze strony 157). Były to warunki, które (podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej) działały jedynie w przypadku, punktów wewnętrznych. W praktyce jednak często mamy do czynienia z sytuacją, gdy funkcja jest określona na zbiorze, który w ogóle nie posiada punktów wewnętrznych. Rozważmy dla przykładu następujący prosty problem:

> *Jaki jest największy możliwy iloczyn dwóch liczb nieujemnych, których suma jest równa a ($a > 0$)?*

Spróbujmy problem ten potraktować, jako zadanie dotyczące funkcji dwóch zmiennych x_1 i x_2 odpowiadających powyższym dwóm liczbom. A zatem nasza funkcja to $f : D \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = x_1 \cdot x_2$, gdzie $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 = a\}$.



Rysunek 29. Badamy funkcję określoną na zbiorze D „cienkim" w $\mathbb{R}^2$ — na odcinku.

Oczywiście, pierwsza — podstawowa obserwacja jest taka, że f jest ciągła, a D — zwarty (jest to odcinek „z końcami" — patrz rys. 29), zatem dzięki twierdzeniu Weierstrassa (tw. VIII.4) mamy pewność, że f osiąga swą największą wartość. Oznacza to, że problem powyższy jest w ogóle poprawnie postawiony (posiada rozwiązanie). Ponadto, w punkcie, w którym f osiąga tę największą wartość funkcja posiada w szczególności ekstremum lokalne. Jednak $\operatorname{Int} D = \emptyset$! Wcześniejsze kryteria są więc tu całkowicie bezużyteczne (także dlatego, że tu nie mamy pochodnych cząstkowych funkcji f mimo, że wzór na f jest „całkiem elegancki" — jednak to dziedzina jest „zła"...). Jak zatem rozwiązać ten problem?

◇ Metoda parametryzacji

Jeden ze sposobów jest Państwu z pewnością dobrze znany i w tym przypadku wiąże się z wyborem prostszego modelu matematycznego dla tego problemu: po co bowiem rozważać funkcję dwóch zmiennych, skoro można było od razu użyć funkcji jednej zmiennej ...? Poniższy opis potraktujmy jako ilustrację ogólnej metody postępowania w podobnych sytuacjach (na ogół bardziej złożonych).

Chcemy znaleźć jakąś „parametryzację"(czyli opis) zbioru D przy pomocy mniejszej liczby zmiennych, tzn. tu funkcję ciągłą $\varphi : \tilde{D} \to D$, gdzie $\varphi(\tilde{D}) = D$ oraz $\tilde{D}$ ma już „duże" wnętrze, ale w przestrzeni niższego wymiaru (— niższego niż liczba zmiennych dla f). Dla naszego przykładu wymiar ten będzie niższy niż 2, czyli $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^1$. Ogólnie, może się to nie udać „globalnie", czyli dla całego D, ale może dać się podzielić D na takie „kawałki", na których parametryzację uda się znaleźć. W naszym przypadku jednak łatwo wskazać nawet wiele różnych „globalnych" parametryzacji zbioru D, np. „$x_2 = a - x_1$", czyli ściślej: $\varphi : [0; a] \to D$, $\varphi(t) = (t, a - t)$, dla $t \in \tilde{D} = [0; a]$ — takie φ można nazwać „parametryzacją przy pomocy pierwszej współrzędnej". Gdy mamy jakąś parametryzację $\varphi : \tilde{D} \to D$ oraz f posiada ekstremum lokalne w $x_0 \in D$ i $\varphi(t_0) = x_0$, to dzięki ciągłości φ funkcja

$$\tilde{f} := f \circ \varphi$$

posiada ekstremum lokalne (tego samego typu) w t_0. W praktyce, by do badania funkcji f użyć rachunku różniczkowego, będziemy potrzebować nie tylko ciągłości, ale też różniczkowalności φ. W naszym wypadku $\tilde{f}(t) = f(t, a - t) = t \cdot (a - t)$ — to łatwa do zbadania funkcja jednej zmiennej — osiąga ekstremum lokalne na końcach przedziału: $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(a) = 0$ oraz wewnątrz — w punkcie $\frac{a}{2}$, $\tilde{f}(\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4}$. Stąd rozwiązaniem naszego zadania jest wartość $\frac{a^2}{4}$.

Idea tego postępowania polega na tym, że zamiast rozważać f określoną na D, które jako podzbiór $\mathbb{R}^m$ jest zbiorem „cienkim" (w każdym razie o pustym wnętrzu) — intuicyjnie — zbiorem „wymiaru" niższego niż m, rozważamy funkcję $\tilde{f} := f \circ \varphi$ określoną już na $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^l$, gdzie l — to właśnie ten „wymiar" zbioru D, $l < m$ i $\tilde{D}$ ma już „duże" wnętrze. Do $\tilde{f}$ możemy zatem próbować stosować poznane wcześniej metody szukania ekstremów przy pomocy pochodnych cząstkowych (o ile istnieją). W tym prostym przykładzie pochodna cząstkowa to po prostu zwykła pochodna — funkcja bowiem miała tylko jedną zmienną.

◇ Metoda mnożników Lagrange'a

Opiszemy teraz inną metodę, która pozwala rozwiązać nasze zadanie bez potrzeby szukania parametryzacji. Metoda ta będzie oparta na twierdzeniu, które za chwilę sformułujemy. Aby jednak treść tego twierdzenia była od razu bardziej zrozumiała, zapowiemy pewne rzeczy, które będą się w nim pojawiać. Zauważmy najpierw, że w rozważanym przez nas przypadku funkcję f określiliśmy tylko na zbiorze D, choć jak widzieliśmy można było rozszerzyć ją do bardzo „eleganckiej" funkcji zadanej na znacznie większym zbiorze — np. na całym $\mathbb{R}^2$ (zachowując wzór $x_1 \cdot x_2$). W poniższym twierdzeniu funkcja f będzie zatem określona na pewnym zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^m$, jednak ekstrema będziemy badać nie dla niej, lecz — tak jak w rozważanym przykładzie — dla jej obcięcia do pewnego „cienkiego" podzbioru M zbioru U. Zauważmy, że badany wcześniej zbiór D można rozbić na sumę dwóch następujących podzbiorów: $D_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0, x_1 + x_2 = a\}$ oraz $D_2 = \{(a, 0), (0, a)\}$. Zbiór D_2 to „brzeg" [155], który badać można osobno. Jeśli ograniczymy się do badania funkcji na D_1, to w tym konkretnym przypadku wygodnie byłoby rozważyć $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0\}$ oraz

[155] Uwaga — **nie** jest to jednak tzw. *brzeg topologiczny* zbioru, o którym my co prawda nie mówiliśmy, ale z którym to pojęciem możecie się Państwo spotkać ...

$M = D_1 := \{x \in U : x_1 + x_2 = a\}$. Wymóg otwartości U jest istotny — dlatego nie mogliśmy wybrać jako M całego D.

Powyższe M jest podzbiorem zbioru U opisanym pewnym równaniem — czyli *warunkiem* (— stąd tytułowe ekstremum *warunkowe*). W języku fizycznym mówi się też, że zostały nałożone pewne *więzy* (— stąd ekstremum *związane*). W praktyce tych równań może być więcej — powiedzmy k, gdzie $1 \leqslant k < m$. Każde równanie można zapisać używając osobnej funkcji skalarnej, albo można wszystkie razem opisać jedną funkcją wektorową $F : U \to \mathbb{R}^k$ (jej składowe F_j opisują poszczególne równania). W naszym przypadku $k = 1$ i biorąc F zadane wzorem $F(x) = x_1 + x_2$ możemy zapisać, że $M = \{x \in U : F(x) = c\}$, gdzie tu $c = a$. Zbiór tej postaci to *poziomica* funkcji wektorowej F, czyli przecięcie k poziomic funkcji skalarnych $F_1, \ldots, F_k$. Sformułujmy zatem zapowiadane twierdzenie.

Twierdzenie IX.5 (o mnożnikach Lagrange'a). *Załóżmy, że U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$, funkcje $f : U \to \mathbb{R}$, $F : U \to \mathbb{R}^k$, gdzie $1 \leqslant k < m$, są klasy C^1 oraz $c \in \mathbb{R}^k$. Niech $M := \{x \in U : F(x) = c\}$. Jeżeli funkcja $f|_M$ posiada ekstremum lokalne w $x_0 \in M$ oraz*

$$\operatorname{rank} MJF(x_0) = k, \quad ^{156)} \tag{IX.10}$$

to istnieją $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \operatorname{grad} F_j(x_0). \tag{IX.11}$$

B.D.

Tezę powyższego twierdzenia można sformułować inaczej tak:

wektor $\operatorname{grad} f(x_0)$ *jest kombinacją liniową wektorów* $\operatorname{grad} F_1(x_0), \ldots, \operatorname{grad} F_k(x_0)$.

Współczynniki $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ będące współczynnikami w tej kombinacji liniowej nazywane są *mnożnikami Lagrange'a* (choć czasem tą nazwą określa się liczby $-\lambda_j$). Założenie (IX.10), które może Państwa nieco niepokoić, to warunek, który gwarantuje, że „w pobliżu x_0" M ma „wymiar" równy $m - k$, albo inaczej, że równania opisane funkcjami $F_1, \ldots, F_k$ są „niezależne w pobliżu x_0". Należy pamiętać o tym warunku!

◇ Jak to działa w praktyce

Zobaczmy teraz jak działa to twierdzenie w naszym konkretnym zadaniu sformułowanym na początku podrozdziału.

Przykład (metoda mnożników Lagrange'a). Już przed twierdzeniem określiliśmy U i F, M i c, przypominamy jeszcze, że $f : U \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 \cdot x_2$. Oczywiście U jest otwarty oraz F i f klasy C^1. Mamy $MJF(x) = \operatorname{grad} F(x) = (1, 1)$ zatem (IX.10) zachodzi dla dowolnego $x_0 \in M$. Załóżmy teraz, że w $x \in M$ funkcja $f|_M$ posiada ekstremum lokalne. Zatem z powyższego twierdzenia istnieje $\lambda_1 = \lambda \in \mathbb{R}$ takie, że spełnione są równania

$$\begin{cases} x_2 = \lambda \\ x_1 = \lambda \\ x_1 + x_2 = a. \end{cases} \tag{IX.12}$$

156) Przypominam (z GAL–u), że rank oznacza *rząd* — w tym wypadku rząd macierzy Jakobiego funkcji F w punkcie a.

Dwa pierwsze, to równania skalarne uzyskane „na obu współrzędnych" wektorowej równości (IX.11), a trzecie to równanie opisujące przynależność x do M. Mamy więc układ 3 równań z 3 niewiadomymi: x_1, x_2, λ. Ponadto mamy nierówności

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0, \end{cases} \tag{IX.13}$$

związane z tym, że $x \in U$. Rozwiązujemy to łatwo: uzyskujemy z równań $2\lambda = a$ skąd $x_1 = x_2 = \lambda = \frac{a}{2}$ (nierówności są spełnione, bo $a > 0$), czyli jedynie w punkcie $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ funkcja $f|_M$ może (choć nie musi) posiadać ekstremum. Aby więc zakończyć rozwiązanie wystarczy osobno zbadać wartości f w obu punktach zbioru D_2 — tam jednak f osiąga wartość 0 i korzystając z tego co już wykazaliśmy przedtem, tj. że f osiąga gdzieś w D swoje kresy, widzimy, że kres górny osiągany jest w $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ i wynosi $\frac{a^2}{4}$.

Przy bardziej złożonych zadaniach rozwiązywanie układu równań może być trudniejsze i często trzeba w istotny sposób wykorzystać także nierówności, które mogą się pojawić w związku z warunkami opisującymi zbiór otwarty U. Jednak zawsze mamy tę samą liczbę równań co niewiadomych! Równań jest bowiem $m + k$ (m współrzędnych gradientów z tezy twierdzenia IX.5, oraz k równań na przynależność do M) i niewiadomych $m+k$ (m — liczba współrzędnych punktu x oraz k — liczba mnożników Lagrange'a).

4. Różniczkowanie a odwracalność

W twierdzeniu „o własnościach rachunkowych różniczki" (tw. IX.4) nic nie wspomnieliśmy o różniczkowalności funkcji odwrotnej. Okazuje się, że dla funkcji wielu zmiennych prawdziwe jest twierdzenie podobne do twierdzenia znanego nam dla jednej zmiennej, kiedy to dla różniczkowalności funkcji f^{-1} wystarczała *de facto* różniczkowalność f, ciągłość f^{-1} [157] oraz fakt, że $f'(x) \neq 0$. W pewnym sensie jednak zasadniczy był tu ostatni warunek, który zamienia się w przypadku wielu zmiennych w swoje naturalne uogólnienie[158]

$$Jf(x) \neq 0, \tag{IX.14}$$

czyli warunek odwracalności przekształcenia liniowego $Df(x)$ (lub, w „języku macierzowym", $\det MJf(x) \neq 0$, czyli istnienia $(MJf(x))^{-1}$).

◇ Lokalna odwracalność

Zanim jednak sformułujemy twierdzenie o różniczkowaniu funkcji odwrotnej zajmiemy się niejako odwróceniem tego problemu, tzn. odwracalnością funkcji spełniającej warunek (IX.14). I choć spełnienie warunku (IX.14) nawet na całej dziedzinie i nawet z dodatkowymi założeniami dotyczącymi regularności funkcji **nie** gwarantuje wcale odwracalności funkcji (patrz np. zad. 30), to jednak można uzyskać coś, co nazywane bywa *lokalną odwracalnością*.

Twierdzenie IX.6 (o lokalnym odwracaniu[159]). *Jeżeli U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$, $f : U \to \mathbb{R}^d$ jest funkcją klasy C^1 oraz $x_0 \in U$ jest taki, że*

$$Jf(x_0) \neq 0, \tag{IX.15}$$

to istnieje $r > 0$, takie, że $V := f(K(x_0, r))$ jest zbiorem otwartym, $\tilde{f} := f|_{K(x_0,r)}$ jest odwracalna jako funkcja z $K(x_0, r)$ w V oraz $\tilde{f}^{-1}$ jest klasy C^1. **B.D.**

[157] Patrz — ostatnie zdanie dowodu tw. V.1.c).

[158] Choć nie jedyne uogólnienie. Innym byłby np. warunek $Df(x) \neq 0$, który jednak nie jest tu dobrym wyborem...

[159] Używana bywa też nazwa „twierdzenie o funkcji odwrotnej", jednak ta sama nazwa używana jest do wielu zupełnie różnych twierdzeń...

W szczególności $\tilde{f}$ z tezy twierdzenia jest *dyfeomorfizmem* (klasy C^1), tzn. odwracalną funkcją klasy C^1 taką, że odwrotna do niej też jest klasy C^1. Zapowiadane twierdzenie o różniczkowaniu funkcji odwrotnej będzie właśnie konsekwencją powyższego twierdzenia.

◇ O funkcjach uwikłanych prawie nic...

Zanim jednak je sformułujemy, warto też wspomnieć, że inną jego ważną konsekwencją jest tzw. *twierdzenie o funkcji uwikłanej*, którego tu nie będziemy szczegółowo formułować. Zamiast tego wspomnę jedynie, że dotyczy ono rozwiązywania równań (także układów równań) typu

$$F(a, x) = 0,$$

gdzie x — niewiadoma (lub niewiadome) oraz a — parametr (lub parametry) w taki sposób, aby rozwiązanie $x(a)$ zadane było „lokalnie" jako „dobra" funkcja (np. funkcja kl. C^1) od parametru a.

◇ Różniczkowanie funkcji odwrotnej

Twierdzenie IX.7 (o różniczkowaniu funkcji odwrotnej). *Jeżeli U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$ oraz $f : U \to W \subset \mathbb{R}^d$ jest odwracalną funkcją klasy C^1, taką że dla dowolnego $x \in U$ zachodzi* (IX.14)*, to W jest otwarty, f^{-1} jest klasy C^1 oraz dla dowolnego $x \in W$ zachodzi*

$$Df^{-1}(x) = (Df(f^{-1}(x)))^{-1} \quad \textit{czyli} \quad MJf^{-1}(x) = (MJf(f^{-1}(x)))^{-1}. \tag{IX.16}$$

Dowód.
Rozważmy dowolny $a \in W$. Niech $x_0 = f^{-1}(a)$ i niech r, V, $\tilde{f}$ będzie dobrane do x_0 tak jak w tw. IX.6. W szczególności zatem $a \in V = f(K(x_0, r)) \subset W$, zatem ze względu na dowolność a i otwartość V zbiór W też jest otwarty. Ponadto dla dowolnego $y \in V$ mamy $f^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(y)$, czyli $f^{-1}|_V = \tilde{f}^{-1}$, zatem $f^{-1}|_V$ jest klasy C^1, skąd f^{-1} jest klasy C^1, dzięki otwartości V i dowolności a. Pozostaje wykazać (IX.16). Mamy $f \circ f^{-1} = I_W$, gdzie I_W — funkcja identycznościowa na W, tzn. $I_W(x) = x$ dla $x \in W$. Dla dowolnego $x \in W$ funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w x, jak już wykazaliśmy. Także (z założenia) f jest różniczkowalna w $f^{-1}(x)$, a zatem z tw. IX.4 pkt. 3 mamy

$$Df(f^{-1}(x)) \circ Df^{-1}(x) = DI_W(x) = I,$$

gdzie I — przekształcenie identycznościowe na $\mathbb{R}^d$, skąd natychmiast dostajemy (IX.16). □

Na zakończenie tego podrozdziału zauważmy tylko, że w tym twierdzeniu przyjęliśmy nieco inne założenia niż w przypadku jednowymiarowym, mianowicie założenie o tym, że f jest klasy C^1. Zrobiliśmy tak jednak ze względu na łatwość dowodu, choć prawdziwe jest także twierdzenie z ciągłością f^{-1} i różniczkowalnością f zamiast założenia, że f jest klasy C^1.

5. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

◇ Kłopoty z definicją

Jak różniczkować wielokrotnie funkcje wielu zmiennych?

Pytanie to wydaje się trudniejsze niż w przypadku jednej zmiennej z następujących powodów. Pochodna funkcji jednej zmiennej była funkcją także jednej zmiennej o wartościach tego samego typu, co wartości funkcji wyjściowej. Gdy f jest funkcją m zmiennych o wartościach w $\mathbb{R}^k$, to jej różniczka w każdym punkcie x nie jest już elementem $\mathbb{R}^k$. A zatem Df można traktować jako funkcję zależną od x (czyli też m zmiennych), ale już o zupełnie innych wartościach — w zbiorze przekształceń liniowych z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^k$. Dwukrotne różniczkowanie f musiałoby więc polegać na jednokrotnym różniczkowaniu takiej dziwnej dość funkcji Df. Wydaje się to trudne, albo raczej skomplikowane, szczególnie gdy pomyślimy o jeszcze wyższych różniczkach niż druga...

Na ogół jednak postępuje się trochę inaczej — zamiast różniczkować tak zawiłą funkcję Df rozpatruje się funkcje $x \rightsquigarrow Df(x)(h) \in \mathbb{R}^k$ przy ustalonych h. Dla wszystkich $h \in \mathbb{R}^m$ są to funkcje m zmiennych, ale już o wartościach w $\mathbb{R}^k$, tak jak wyjściowa funkcja f. Jeśli przy każdym wyborze h taka funkcja — oznaczmy ją jako $D_h f$ — jest w punkcie x różniczkowalna, to mówimy, że f jest *dwukrotnie różniczkowalna* w x, a *drugą różniczką* w x nazywamy przekształcenie $D^2f(x) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ zadane dla $h^{(1)}$, $h^{(2)} \in \mathbb{R}^m$ wzorem

$$D^2f(x)(h^{(1)}, h^{(2)}) := D(D_{h^{(1)}}f)(x)(h^{(2)}).$$

Kontynuując takie postępowanie można zdefiniować rekurencyjnie n–krotną różniczkowalność i n–tą różniczkę $D^nf(x)$ funkcji f w punkcie x, która — jak łatwo się przekonać — będzie określona na $(\mathbb{R}^m)^n$ i będzie przekształceniem n–liniowym (tzn. liniowym ze względu na każdą ze zmiennych wektorowych $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$ przy ustalonych pozostałych). Jak widać jest to trochę skomplikowane, ale (na szczęście...) nie będziemy tym pojęciem posługiwać się dalej — podaję to jedynie w celach „informacyjnych”.

⋄ Wyższe pochodne cząstkowe

Znacznie prostsze pojęciowo są tzw. *wyższe pochodne cząstkowe*. Jak pamiętamy pochodna cząstkowa $\partial_{x_j}f$ była funkcją tego samego typu co f (tyle samo zmiennych, taki sam typ wartości). A zatem wyższe pochodne cząstkowe można łatwo określić rekurencyjnie, podobnie jak określało się wyższe pochodne funkcji jednej zmiennej, a jedyna różnica jest taka, że kolejne różniczkowania mogą być „po rozmaitych zmiennych”. Jeżeli $f : D \to \mathbb{R}^k$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^m$ to jej pochodną rzędu n w punkcie x po zmiennych kolejno: $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$, gdzie $j_1, \ldots, j_n \in \{1, \ldots, m\}$, oznaczamy (o ile istnieje) którymkolwiek z symboli

$$\partial_{x_{j_n}\ldots x_{j_1}}f(x), \quad \partial_{j_n,\ldots,j_1}f(x), \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n}\ldots\partial x_{j_1}}(x).$$

A ścisła definicja rekurencyjna jest taka:

Jeżeli $a \in D$ oraz dla pewnego $r > 0$ pochodna cząstkowa $\partial_{j_n,\ldots,j_1}f(x)$ istnieje i jest skończona w dowolnym $x \in D_{a,r} := K(a, r) \cap D$ oraz $j_{n+1} \in \{1, \ldots, m\}$, to

$$\partial_{j_{n+1},j_n,\ldots,j_1}f(a) := \partial_{j_{n+1}}(\partial_{j_n,\ldots,j_1}f)(a),$$

o ile pochodna cząstkowa po j_{n+1} z prawej strony powyższego wzoru istnieje.

⋄ Jest ich (za)wiele...

A zatem może być aż m^n różnego typu pochodnych cząstkowych rzędu n. Np. gdy $m = 2$ i $n = 2$ mogą pojawiać się 4 takie pochodne:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a),$$

a przy $m = 3$ i $n = 2$ będzie ich już aż 9.

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 e^{x_2}$. Wówczas

$\partial_{x_1}f(x) = e^{x_2}$, $\partial_{x_2}f(x) = x_1e^{x_2}$, $\partial_{x_1x_1}f(x) = 0$, $\partial_{x_2x_2}f(x) = x_1e^{x_2}$, $\partial_{x_2x_1}f(x) = e^{x_2}$, $\partial_{x_1x_2}f(x) = e^{x_2}$.

W powyższym przykładzie zwraca uwagę fakt, że w każdym punkcie x zachodzi równość

$$\partial_{x_1x_2}f(x) = \partial_{x_2x_1}f(x).$$

◇ Jednak nie tak wiele

Okazuje się, że nie jest to przypadek. I choć taka sytuacja nie zachodzi zawsze, to jednak, jak zobaczymy za chwilę, tak jest dla funkcji „dostatecznie regularnych”. Najpierw musimy określić czym ma być owa regularność. Będzie to uogólnienie na wyższe rzędy pojęcia klasy C^1. Mianowicie $f : D \to \mathbb{R}$ jest *klasy* C^n (zapisujemy to także: $f \in C^n(D)$) wtw istnieją jej wszystkie[160)] pochodne cząstkowe do rzędu n - włącznie i są one funkcjami ciągłymi na D.

Twierdzenie IX.8. *Jeżeli f jest klasy C^n to dla dowolnego $x \in \operatorname{Int} D$ wartość $\partial_{j_1,\ldots,j_n} f(x)$ nie zależy od kolejności liczb $j_1, \ldots, j_n$.*

B.D.

◇ Wygodniejsza notacja

A zatem w przypadku takim jak w twierdzeniu można uprościć nieco notację służącą do zapisu pochodnych cząstkowych — nie jest bowiem ważne w jakiej kolejności różniczkujemy, ważne jedynie ile razy różniczkujemy po danej zmiennej. W takiej sytuacji stosowany jest zatem najczęściej jeden spośród następujących zapisów:

$$\partial^\alpha f(x), \quad \partial_{x_1^{\alpha_1}\ldots x_m^{\alpha_m}} f(x), \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots x_m^{\alpha_m}}(x)\ ^{161)},$$

gdzie α to tzw. *multiindeks*, czyli element $(\mathbb{N} \cup \{0\})^m$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ oraz α_j jest liczbą różniczkowań po zmiennej x_j. A zatem np. dla funkcji klasy C^2 i punktu wewnętrznego x z dziedziny f mamy

$$\partial^{(1,1)} f(x) = \partial_{x_1^1 x_2^1} f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^1 \partial x_2^1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x)$$

(przy czym dwie pierwsze równości to tylko wynik użycia różnych oznaczen na to samo, a dwie kolejne to konsekwencja twierdzenia IX.8).

◇ Kłopotliwa wygoda?

Jednak aby korzystać w pełni z powyższej wygody trzeba najpierw wiedzieć, że funkcja jest klasy C^n... Korzystanie do tego celu tylko z definicji byłoby tu mało sensowne. By sprawdzić bowiem np. że $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, musielibyśmy i tak wyliczyć m. in. obie te pochodne cząstkowe i sprawdzić ciągłość każdej z nich, więc ich równość byłaby zapewne jasna i tak, bez twierdzenia IX.8... Na szczęście prawdziwy jest poniższy fakt dotyczący operacji na funkcjach klasy C^n.

Fakt. *Jeżeli f i g są funkcjami klasy C^n określonymi na zbiorach otwartych, to ich suma, różnica, iloczyn, iloraz oraz złożenie (o ile dana operacja jest określona) jest także klasy C^n. Jeżeli ponadto f jest odwracalna i ma różniczkę $Df(x)$ odwracalną w każdym punkcie dziedziny funkcji f, to f^{-1} jest klasy C^n.*

Nietrudny dowód indukcyjny tego faktu pomijamy. Dzięki niemu, by sprawdzić np., że funkcja trzech zmiennych zadana wzorem $f(x) = e^{x_1 \ln(1+x_2^2+x_3^2)}$ jest klasy C^n wystarczy sprawdzić, że są takimi funkcje trzech zmiennych: $\mathbb{x}_1$, $\mathbb{x}_2$, $\mathbb{x}_3$ oraz jednej zmiennej: exp i ln — a to jest oczywiste przy dowolnym n.

Warto jeszcze wspomnieć, że jeżeli f jest klasy C^n, to jest różniczkowalna n–krotnie w sensie, o którym wspomnieliśmy w dygresji na początku tego rozdziału, w każdym punkcie z wnętrza swej dziedziny. Stanowi to uogólnienie znanego nam już wcześniej wyniku dla $n = 1$ (tw. IX.3).

---

160) Tzn. wszystkie ze wspomnianych wcześniej $m^{n'}$ możliwych dla wszystkich $n' \leqslant n$.

161) Ponadto najczęściej pomija się w drugim i trzecim z tych zapisów te zmienne, dla których $\alpha_j = 0$ np. $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2}(x) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^1 \partial x_2^0 \partial x_3^2}(x)$.

6. Pochodne cząstkowe rzędu 2 i ekstrema lokalne

Spośród pochodnych cząstkowych wyższych rzędów najważniejsze będą dla nas pochodne rzędu 2. Powodem tego jest pewne ważne kryterium dające warunki dostateczne na ekstrema lokalne funkcji.

◇ Warunek dostateczny na ekstrema dla jednej zmiennej

Zanim sformułujemy to kryterium, opiszemy sytuację, jaka ma miejsce dla jednej zmiennej.

Twierdzenie IX.9. *Jeżeli $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} D$ oraz f jest dwukrotnie różniczkowalna w a, przy czym $f'(a) = 0$ i $f''(a) \neq 0$, to*

(i) *jeżeli $f''(a) > 0$, to f ma minimum lokalne w a;*

(ii) *jeżeli $f''(a) < 0$, to f ma maksimum lokalne w a.*

Wynik ten nietrudno udowodnić w oparciu o wzór Taylora z resztą Peano (patrz np. zadanie 30). Nie pojawił się on dotąd, ponieważ nie ma zbyt istotnego praktycznego zastosowania. W przypadku bowiem funkcji jednej zmiennej, w „typowych” problemach, rozpoznaje się ekstrema łatwiej poprzez badanie przedziałów monotoniczności, do czego wystarcza na ogół pierwsza pochodna.

◇ „Znak drugiej pochodnej” dla wielu zmiennych

Dla wielu zmiennych jednak nie mamy pojęcia monotoniczności, a zatem wynik w stylu powyższego mógłby okazać się narzędziem przydatnym. Powstaje zatem pytanie:

Jak powinny wyglądać analogi założeń „$f'(a) = 0$”, „$f''(a) < 0$” i „$f''(a) > 0$”?

Z pierwszym z nich sprawa jest prosta — zastąpimy go warunkiem $Df(a) = 0$, czyli $\operatorname{grad} f(a) = 0$, a więc warunkiem znanym już nam jako konieczny dla ekstremum w punkcie wewnętrznym. By poradzić sobie z drugim warunkiem wprowadzimy najpierw następujące oznaczenia. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} D$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^m$ i f jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu a. Zdefiniujmy macierz $Hf(a)$ o wymiarach $m \times m$:

$$Hf(a) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1,\ldots,m}$$

(przypominam, że w powyższej notacji i to numer wiersza, a j — kolumny). Macierz ta nazywana jest *macierzą Hessego* (funkcji f w punkcie a).

Jak można wykazać, jest to macierz wspominanej we wcześniejszych dygresjach drugiej różniczki $D^2 f(a)$. Przypomnijmy, że druga różniczka $D^2 f(a)$ jest w szczególności formą dwuliniową, a pojęcie macierzy formy dwuliniowej poznaliście Państwo na wykładach z GAL–u.

Na mocy twierdzenia IX.8 macierz ta jest symetryczna, (więc hermitowska). Dla takich macierzy znacie Państwo (oczywiście dzięki wykładom z GAL–u) pojęcia *dodatniej* i *ujemnej określoności*, a także *nieokreśloności*, odpowiadające analogicznym pojęciom dla formy dwuliniowej wyznaczonej przez tę macierz. I właśnie te dwa pierwsze pojęcia użyte w odniesieniu do macierzy Hessego posłużą nam za analogi warunków $f''(a) > 0$ i $f''(a) < 0$.

◇ Kryterium dla m–zmiennych

Twierdzenie IX.10 (o warunkach dostatecznych na ekstrema lokalne). *Załóżmy, że f jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $a \in \operatorname{Int} D$ oraz że $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Wówczas*

(i) *jeżeli $Hf(a)$ jest dodatnio określona, to f ma minimum lokalne w a;*

(ii) *jeżeli $Hf(a)$ jest ujemnie określona, to f ma maksimum lokalne w a;*

(iii) *jeżeli $Hf(a)$ jest nieokreślona, to f nie posiada ekstremum lokalnego w a.*

B.D.

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić (podobnie jak dla $m = 1$) przy użyciu odp. wersji wzoru Taylora dla wielu zmiennych. My jednak nie będziemy nawet podawać postaci wielomianu Taylora dla m zmiennych, choć warto wiedzieć, że wzór Taylora poznany dla jednej zmiennej ma także swoje wielowymiarowe uogólnienie.

Uwagi.

1. Sytuacja (iii) nie miała swego odpowiednika dla $m = 1$. A to dlatego, że macierz 1×1 nie może być nieokreślona.
2. Pamiętajmy, że przypadki (i), (ii), (iii) nie wyczerpują wszystkich możliwości — macierz $Hf(a)$ może być jeszcze *półokreślona* (dodatnio lub ujemnie)[162] i w tym przypadku twierdzenie nie rozstrzyga o istnieniu lub nieistnieniu ekstremum. Odpowiada to sytuacji, gdy $f''(a) = 0$ dla $m = 1$.
3. Ekstrema lokalne z p. (i) i (ii) twierdzenia są nawet *ścisłe* (inaczej *właściwe*), tzn. w pewnym otoczeniu punktu a wartość $f(a)$ osiągana jest **tylko** w punkcie a.
4. Twierdzenie to daje nam pewne warunki **dostateczne** na ekstrema lokalne. Stanowi ono zatem ważne uzupełnienie twierdzenia IX.1, dającego jedynie warunki konieczne (przy odpowiednich założeniach), które są zresztą częścią pojawiających się tu warunków dostatecznych.

◇ Określoność macierzy — metoda Sylwestera

Aby ułatwić Państwu praktyczne korzystanie z twierdzenia IX.10 przypomnijmy następujacy algebraiczny fakt pomocnych przy badaniu określoności macierzy.

Niech A będzie macierzą rzeczywistą symetryczną o wymiarach $m \times m$.

Fakt 1 (kryterium Sylwestera).

- *A jest dodatnio określona wtw* $\forall_{k=1,\ldots,m}\ \det A^{(k)} > 0$,
- *A jest ujemnie określona wtw* $\forall_{k=1,\ldots,m}\ (-1)^k \det A^{(k)} > 0$,

gdzie $A^{(k)}$ jest macierzą powstałą z A przez skreślenie kolumn i wierszy o numerach większych niż k.

Powyższy wynik poznaliście Państwo już, być może, na wykładzie z GAL–u.

[162] Tzn. określona nieujemnie (odpow.: niedodatnio) ale **nie** określona dodatnio (odpow.: ujemnie).

$\diamond$ Metoda wartości własnych

Do sformułowania kolejnego wyniku potrzebne nam będzie pojęcie wartości własnej macierzy. Liczba $\lambda \in \mathbb{C}$ jest *wartością własną* macierzy A (tu nie musi być ona symetryczna) wtw λ jest pierwiastkiem równania (tzw. *równania charakterystycznego*)

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Łatwo wykazać, że lewa strona powyższego równania jest wielomianem m–tego stopnia względem λ — jest to tzw. *wielomian charakterystyczny* macierzy A. Zatem macierz może mieć co najwyżej m różnych wartości własnych zespolonych, a licząc je „z krotnościami", jako pierwiastków powyższego wielomianu, jest ich dokładnie m. Można też wykazać, że dla A — hermitowskich wszystkie one są liczbami rzeczywistymi.

Fakt 2.

- *A jest dodatnio określona wtw wszystkie wartości własne A są dodatnie*[163)],
- *A jest ujemnie określona wtw wszystkie wartości własne A są ujemne,*
- *A jest nieokreślona wtw istnieje dodatnia wartość własna A i ujemna wartość własna A.*

$\diamond$ Negatywne kryterium dla parzystego wymiaru

Nietrudno wykazać, że iloczyn wszystkich wartości własnych A liczonych z w.w. krotnościami równy jest $\det A$. Otrzymujemy stąd wniosek, będący bezpośrednią konsekwencją ostatniej części powyższego faktu.

Wniosek. *Jeżeli m jest parzyste oraz* $\det A < 0$*, to A jest nieokreślona.*

Dowód.
Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ będą wartościami własnymi A wypisanymi z krotnościami. Zatem $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_m$, czyli $\lambda_j \neq 0$ dla każdego j. Gdyby wszystkie λ_j były dodatnie, to $\det A$ byłby dodatni. Gdyby wszystkie były ujemne, to także mielibyśmy $\det A > 0$ ze względu na parzystość m. Stąd istnieją λ_i i λ_j różnych znaków. $\square$

$\diamond$ Pewne przykładowe zadanie

Zobaczmy jak można zastosować opisaną tu teorię w konkretnej sytuacji.

Przykład. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + a x_1 x_2$. Spróbujemy wyznaczyć wszystkie ekstrema lokalne tej funkcji w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$. Sprawdzimy więc warunek konieczny $\operatorname{grad} f(x) = 0$ na to, by w x było ekstremum lokalne. Mamy

$$\partial_{x_1} f(x) = 2x_1 + a x_2, \ \ \partial_{x_2} f(x) = 2x_2 + a x_1,$$

otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 + a x_2 & = 0 \\ a x_1 + 2x_2 & = 0. \end{cases}$$

Ponieważ macierz tego układu (lewej strony) to $B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$ i $\det B = 4 - a^2$ zatem, dla $a \neq \pm 2$ układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = 0$ (tj. $x_1 = x_2 = 0$). Gdy $a = 2$, to

163) Przypomnijmy, że dodatnie tzn. > 0, nie tylko $\geqslant 0$.

rozwiązaniem jest cała prosta l_2 o równaniu $x_2 = -x_1$, a gdy $a = -2$, to rozwiązaniem jest prosta l_{-2} o równaniu $x_2 = x_1$.

Teraz policzmy $Hf(x)$. Mamy

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} = B$$

(tę drugą równość należy raczej traktować jako przypadek...) — zauważmy, że tu macierz Hessego okazała się być niezależna od x. Dzięki kryterium Sylwestera macierz ta jest dodatnio określona wtw $\det B > 0$ wtw $|a| < 2$, ale nie jest ona nigdy ujemnie określona. Z kolei z wniosku z faktu 2, gdy $|a| > 2$, to $Hf(x)$ jest nieokreślona. To samo możemy uzyskać bezpośrednio z faktu 2, bowiem $\det(B - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - a^2 = (2-a-\lambda)(2+a-\lambda)$, skąd wartościami własnymi $Hf(x)$ są liczby $2-a$ i $2+a$. W efekcie, twierdzenia IX.1 i IX.10 dają nam częściowe rozwiązanie problemu:

- jeżeli $|a| < 2$, to jedyne ekstremum lokalne jest w $x = 0$ i jest to ścisłe minimum lokalne;
- jeżeli $|a| > 2$, to f nie posiada ekstremów lokalnych.

Pozostaje przypadek $a = \pm 2$. Na szczęście daje się on zbadać „ręcznie" (zresztą powyższe przypadki także dawały się zbadać bez całej tej teorii — jak?). Wówczas bowiem $f(x) = (x_1 \pm x_2)^2$, a zatem na całej prostej „$x_1 \pm x_2$" osiągana jest wartość najmniejsza funkcji f wynosząca 0. W szczególności zatem w każdym punkcie prostej $l_{\pm 2}$ funkcja f osiąga minimum lokalne (nie jest to minimum ścisłe) i są to jedyne ekstrema lokalne f.

Zadania do Rozdziału IX

$\forall$ 1. Wyznacz prostą styczną do obrazu krzywej f w punkcie a:

(a) $f : [0; 2N\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (R\cos t, R\sin t, \frac{\alpha t}{2\pi})$ gdzie $N \in \mathbb{N}$, $R, \alpha > 0$, $a = f(\pi)$;

(b) $f : [0; 2N\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (R + \alpha t)(\cos t, \sin t)$, gdzie $N \in \mathbb{N}$, $R, \alpha > 0$, $a = f(\pi)$.

Ponadto zinterpretuj sens geometryczny obrazów tych krzywych oraz rolę parametrów N, R, α.

2. Znajdź przykład takiej krzywej $f : [a; b] \to \mathbb{R}^d$ klasy C^1, dla której nie zachodzi teza twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, tzn. takiej, że

$$\forall_{c\in[a;b]}\ f(b) - f(a) \neq (b - a) \cdot f'(c).$$

$\forall$ 3. Rozważamy następującą sytuację dotyczącą funkcji d zmiennych, gdzie $d = 1$ lub 2. Funkcja $f : \bar{K}(0, 1) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, po obcięciu do $K(0, 1)$ jest klasy C^1 oraz:

1. 0 jest jedynym punktem $x \in K(0, 1)$ gdzie $\operatorname{grad} f(x) = 0$,

2. f ma maksimum lokalne w 0,

3. f **nie** osiąga wartości największej w punkcie 0.

(a) Wykaż, że taka sytuacja nie jest możliwa gdy $d = 1$.

(b) Przedstaw przekonywującą ilustrację mapy poziomic takiej funkcji f, która jest przykładem powyższej sytuacji przy $d = 2$.

$\forall$ 4. Oblicz pochodne cząstkowe (rzędu 1) po wszystkich zmiennych (w każdym punkcie dziedziny) funkcji f i sprawdź, że f jest funkcją klasy C^1:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 e^{(x_1+2x_2)}$;

(b) $f : (0; +\infty)^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^{(x_2^{x_3})}$;

(c) $f : (1; +\infty) \times (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{x_1} x_2$;

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\operatorname{arctg}(x_1 e^{x_1+x_2}), x_1 \sin(x_1 x_2), (x_1 x_2)^2)$.

5. Dla poniższych funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zbadaj w jakich punktach x istnieje pochodna cząstkowa $\partial_1 f(x)$, a w jakich $\partial_2 f(x)$:

(a) $f(x) = |x_1|x_2$;

(b) $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^4} - |x_1|$.

6. Dla funkcji z zadania 16 zbadaj

(i) istnienie każdej z pochodnych cząstkowych (1–go rzędu) w 0;

(ii) istnienie pochodnych kierunkowych w kierunku każdego wektora w 0. Wyniki skonfrontuj z wynikami zadania 16 (dot. ciągłości f w 0).

7. Wykaż, że jeżeli funkcja skalarna f określona na „kostce" $D := [a_1; b_1] \times \ldots \times [a_m; b_m]$ posiada wszystkie pochodne cząstkowe (rzędu 1) w każdym punkcie dziedziny i są one funkcjami ograniczonymi, to f jest funkcją Lipshitzowską, tzn.

$$\exists_{c\in\mathbb{R}}\ \forall_{x,y\in D}\ |f(x) - f(y)| \leqslant c\|x - y\|.$$

8. Wykaż, że jeżeli U jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$ oraz $f : U \to \mathbb{R}$ spełnia warunki takie jak w zadaniu 7, to f jest ciągła.

   Wskazówka: użyj wyniku z zadania 7.

9. Wykaż, że jeżeli istnieje pochodna kierunkowa $\partial_v f(a)$, to dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje także $\partial_{\alpha v} f(a)$ oraz $\partial_{\alpha v} f(a) = \alpha \partial_v f(a)$.

10. Niech $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ będzie funkcją jednorodną, tzn. taką, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi $f(tx) = tf(x)$. Wykaż, że f jest różniczkowalna w 0 wtw f jest funkcjonałem liniowym (tzn. skalarną funkcją liniową).

$\forall$ 11. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 x_3 + 7x_2^2 - 9x_3$ dwoma sposobami:

   (a) bezpośrednio z definicji różniczki;

   (b) w oparciu o twierdzenie „o różniczkowalności dla klasy C^1" (tw. IX.3).

12. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x_1| \cdot x_2$ (patrz zad. 5 a). Zbadaj różniczkowalność f.

$\forall$ [164] 13. Znajdź macierz Jakobiego funkcji f w punkcie a:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2)$, $a = (1, 7)$;

   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3)$, $a = (0, 1, 2)$;

   (c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = (e^{x_1 x_2 x_3 x_4})$, $a = (1, 0, 1, 0)$;

   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $f(t) = (0, t, t^2, t^3)$, $a = 1$;

   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \operatorname{arctg}(t^2 + 1)$, $a = 1$.

$\forall$ 14. Oblicz pochodną kierunkową funkcji f w punkcie a w kierunku $v = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dla przykładu z zadania 13 c) dwoma metodami:

   (a) przy użyciu definicji $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$,

   (b) wykorzystując wynik z zadania 13 c) i odpowiedni (jaki?) wynik z wykładu.

$\forall$ [165] 15. W oparciu o twierdzenie o ekstremach lokalnych (tw. IX.1)[166] znajdź kresy (górny i dolny) poniższych funkcji $f : D \to \mathbb{R}$. Zbadaj, czy kresy te są przez f osiągane.

   (a) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, $f(x) = x_1^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2$,

   (b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geqslant 0,\ x + y + z \leqslant 4\}$, $f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$,

   (c) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \leqslant 0\}$, $f(x) = (x_1 + 3x_2)e^{2x_1 + x_2}$,

   (d) $D = \mathbb{R}^2$, $f(x) = x_1 x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$.

   Wskazówka do c) i d): udowodnij następujące twierdzenie „o osiąganiu jednego kresu" (por. także zad. 15): *Gdy istnieje zbiór zwarty $K \subset D$ oraz $a \in K$ takie, że $\forall_{x \in D \setminus K}\ f(x) \geqslant f(a)$ ($\leqslant f(a)$), to f, jeśli jest ciągła, osiąga swój kres dolny (górny).*

---

[164] Choć 2 przykłady.

[165] Przynajmniej jeden z a), b) i jeden z c), d).

[166] Tu proszę nie stosować jeszcze twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a.

16. Wyznacz wymiary takiego prostopadłościennego akwarium bez „górnej przykrywki” o objętości 100 litrów, na którego zbudowanie potrzeba zużyć najmniejszej powierzchni szyb.

17. Wyznacz wymiary prostopadłościennego 100 litrowego akwarium o szkielecie zbudowanym z prętów (wzdłuż wszystkich krawędzi), na zbudowaniu którego potrzeba najmniejszej długości prętów.

18. Bez użycia pochodnych cząstkowych rzędu 2 znajdź ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$.

    Wskazówka: naszkicuj poziomicę „zerową” dla f (tzn. $f^{-1}(\{0\})$) oraz zbadaj znaki f poza tą poziomicą.

19. Przy użyciu „reguły łańcuchowej” (wniosek ze str. 158) wyprowadź wzory:

    $\forall$ (a) na pochodną iloczynu dwóch skalarnych funkcji różniczkowalnych jednej zmiennej,

    (b) na pochodną iloczynu trzech skalarnych funkcji różniczkowalnych jednej zmiennej,

    (c) na pochodną funkcji danej wzorem $f(t) = (g(t))^{h(t)}$, gdzie $g(t) > 0$ i g oraz h — różniczkowalne funkcje skalarne jednej zmiennej.

20. Korzystając z „reguły łańcuchowej” wykaż następujące twierdzenie:

    Jeżeli $f : U \to \mathbb{R}$ *jest funkcją różniczkowalną, taką że* $\forall_{x\in U}\ \operatorname{grad} f(x) = 0$ *oraz* U *jest taki, że każde dwa jego punkty można połączyć łamaną zawartą w* U*, to* f *jest stała.*

$\forall$ 21. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna oraz $\forall_{x\in\mathbb{R}^2}\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 2\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$. Wykaż, że na każdej prostej o równaniu $2x_2 + x_1 = c$ funkcja f jest stała.

22. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna oraz $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Wykaż, że jeśli $\forall_{x>0}\ f(x,x) \geqslant 0$, to $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ f(x,y) \geqslant 0$.

    Wskazówka: znajdź najpierw pewną rodzinę podzbiorów $\mathbb{R}^2$, na których f jest stała.

$\forall$ 23. Niech $A \subset \mathbb{R}^d$ oraz $v \in \mathbb{R}^d$. Będziemy mówić, że v jest *prostopadły* do A *w punkcie* $x_0 \in A$ wtw dla dowolnej krzywej $\gamma : [a;b] \to A$ różniczkowalnej w $(a;b)$ zachodzi $\gamma'(t_0) \perp v$ dla każdego $t_0 \in (a;b)$ takiego, że $\gamma(t_0) = x_0$. Wykaż twierdzenie:

    Jeżeli $f : U \to \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna,* U *— otwarty w* $\mathbb{R}^d$*, to* $\operatorname{grad} f(x_0)$ *jest prostopadły do poziomicy funkcji* f *wyznaczonej wartością* $f(x_0)$ *(tzn. do* $f^{-1}(\{f(x_0)\})$*) w punkcie* x_0*, dla dowolnego* $x_0 \in U$*.*

24. Wykaż p. 3 twierdzenia IX.4 (czyli punkt o różniczkowaniu złożenia).

25. Wykaż, że jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ i $g : D \to \mathbb{R}^k$ są różniczkowalne w $a \in D \subset \mathbb{R}^m$ to $f \cdot g$ jest różniczkowalna w a oraz dla $h \in \mathbb{R}^m$ zachodzi

$$D(f\cdot g)(a)(h) = Df(a)(h)\cdot g(a) + f(a)\cdot Dg(a)(h).$$

    Dowód przeprowadź w oparciu o różniczkowanie złożenia.

26. Wykaż, że suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji klasy C^1 określonych na zbiorach otwartych należą do klasy C^1.

$\forall$ [167] 27. Znajdź kresy funkcji f zadanych poniższymi wzorami na zbiorze M, zbadaj czy są one osiągane.

(a) $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 3x_2 = 7\}$;

(b) $f(x) = \sqrt{(x_1-2)^2 + x_2^2}$, $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$;

(c) $f(x,y,z) = xyz$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = x^2+y^2+z^2 = 1\}$;

(d) $f(x) = Ax_1 + Bx_2 + C$, $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$;

(e) $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, $M = \{4x^2 + y^2 \leqslant 25\}$;

(f) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 0\}$;

(g) $f(x) = \|x\|^2$, $M = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1\right\}$;

(h) $f(x) = x_1 x_2^2 x_3^3$, $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 > 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6\}$;

(i) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$, $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 \leqslant 100\}$;

(j) $f(x,y,z) = x + y + z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$;

(k) $f(x,y,z) = x + 2y$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, 2y^2 + 9z^2 = 1\}$;

(l) $f(x,y,z) = x + 2y$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1\}$.

28. Wykaż nierówności:

(a) $\frac{x^n+y^n}{2} \geqslant (\frac{x+y}{2})^n$ dla $n \geqslant 1$, $x, y \geqslant 0$;

(b) (nier. Höldera) $\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{k=1}^n |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$ dla $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $p, q \geqslant 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Wskazówka: Szukaj kresów jednej (odpowiedniej...) ze stron nierówności traktowanej jako funkcja określona na zbiorze, na którym druga ze stron jest stała.

29. Czy istnieje punkt z płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ o równaniu $3x_1 - 2x_3 = 0$, dla którego suma kwadratów odległości od punktów $(1,1,1)$ i $(2,3,4)$ jest najmniejsza? Jeśli tak, to znajdź wszystkie takie punkty.

$\forall$ 30. Niech I będzie otwartą d–wymiarową kostką, tzn. zbiorem postaci $I = (a_1; b_1) \times \ldots \times (a_d; b_d) \subset \mathbb{R}^d$ ($I \neq \emptyset$). Rozważamy funkcje $f : I \to \mathbb{R}^d$ klasy C^1 spełniające $\forall_{x \in I}\ \det Df(x) \neq 0$.

(a) Sprawdź, że gdy $d = 2$ i $f(x) = (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2)$ dla $x \in I = I_R = (0, R) \times \mathbb{R}$, gdzie $R \in (0; +\infty)$, to warunki powyższe są spełnione, ale f nie jest różnowartościowa.

(b) Wykaż, że gdy I z pkt. a) zmienimy na $(0, R) \times (0; 2\pi)$ nie zmieniając wzoru na f, to f będzie dyfeomorfizmem na $f(I)$. Wyznacz $f(I)$. Wyznacz dla $R > 1$ wektor $Df^{-1}((-1,0))((1,2))$ bez użycia wzoru na funkcję f^{-1}.

(c) Wykaż, że gdy $d = 1$, to $f : I \to f(I)$ jest odwracalna, a nawet jest dyfeomorfizmem.

31. Znajdź wszystkie pochodne cząstkowe wszystkich możliwych rzędów dla:

$\forall$ (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 x_2$,

[167] Przynajmniej 3 przykłady, w tym conajmniej jeden z „$\leqslant$" w definicji M.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 e^{(x_1+2x_2+3x_3)}$

Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ w powyższych przykładach f jest funkcją klasy C^n?

$\forall$ 32. Oblicz $\frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)$ i $\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)$ dla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|x\|^2} & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Czy ta funkcja jest klasy C^2?

$\forall$ [168] 33. Znajdź ekstrema lokalne poniższych funkcji:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x_1 - 1)^2 + 2x_2^2$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$;

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4xy$;

(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 14x_2 - 10x_3$;

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1x_2(1 - x_1)(2 - x_2)$;

(f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = y^2 + z^2 + 2xy$;

(g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = -2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2yz$;

(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2$;

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{8}x_3^2 + x_1x_3$;

(j) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x_1^2 - 5x_2^2 - \frac{1}{8}x_3^2 + 2x_1x_3$;

(k) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x_1+3x_2}(8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2)$;

(l) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-(x+y)^2}$.

[168] Przynajmniej 3 przykłady, w tym conajmniej 1 dla $\mathbb{R}^3$.

X Teoria miary i całki. Rachunek całkowy wielu zmiennych

[około 6 wykładów]

W tym rozdziale poznamy ogólniejszy i „wygodniejszy” rodzaj całki niż poznana w rozdziale VII całka Riemanna, a mianowicie *całkę Lebesgue'a*. Użyjemy jej tu przede wszystkim do całkowania funkcji wielu zmiennych. Zaczniemy jednak od ujęcia abstrakcyjnego.

1. Miara i całka względem miary.

Omówimy abstrakcyjne podejście do całkowania, czyli tzw. *teorię Lebesgue'a miary i całki*. Przy tym podejściu można będzie całkować funkcje względem pewnej wybranej przez nas *miary*, czyli pewnego wybranego sposobu mierzenia zbiorów. Musimy zatem zacząć nasze rozważania od definicji miary. Opiszemy tam własności takiego sposobu mierzenia „rozmiaru” zbiorów, który by niejako uogólniał znane dobrze (choć nie na ścisłym poziomie) pojęcia długości, pola powierzchni czy objętości. Będzie to Państwu nieco przypominać abstrakcyjną definicję metryki — tam uogólnialiśmy pojęcie odległości, tu natomiast uogólnimy pojęcie pola powierzchni, czy objętości zbioru. Jest jednak pewna ważna różnica pomiędzy tymi dwoma rodzajami uogólnień. Metryka pozwalała na mierzenie odległości pomiędzy **każdymi** dwoma punktami zbioru, tymczasem miara dość często będzie mierzyła tylko **niektóre** podzbiory danego zbioru. Powodem takiej sytuacji jest najczęściej nie tyle chęć niemierzenia niektórych podzbiorów, co raczej niemożność ich zmierzenia, choć może to się wydawać zaskakujące... Rodzinę (czyli zbiór) tych podzbiorów, które dana miara będzie mogła zmierzyć będziemy nazywali rodziną *zbiorów mierzalnych*.

◇ Sigma–ciała

Rodzina zbiorów mierzalnych nie może być całkiem dowolną rodziną podzbiorów ustalonego zbioru X. Musi to być rodzina zamknięta ze względu na wszystkie co najwyżej przeliczalne operacje na zbiorach i musi do niej należeć $\emptyset$. Taką rodzinę zbiorów nazywamy *σ–ciałem*[169]. Precyzyjna definicja jest następująca.

Definicja. *Rodzina $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru X jest σ–**ciałem** (podzbiorów X) wtw*

1. $\emptyset \in \mathfrak{M}$,
2. $\forall_{A\in\mathfrak{M}}\ X \setminus A \in \mathfrak{M}$,
3. *Dla każdego ciągu zbiorów* $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ *takich, że* $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ A_n \in \mathfrak{M}$ *zachodzi* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$.

Okazuje się, że powyższe trzy punkty wystarczają do tego, co zapowiadaliśmy przed definicją. Korzystając ze znanych własności działań na zbiorach nietrudno bowiem wykazać poniższy wniosek (patrz zad. 6).

Wniosek. *Jeżeli $\mathfrak{M}$ jest σ–ciałem oraz $A, B, A_n \in \mathfrak{M}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to*

1. $A \setminus B,\ A \cup B,\ A \cap B \in \mathfrak{M}$,
2. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$.

Oczywiście do σ–ciała musi zawsze należeć także zbiór X (na mocy punktów 1. i 2. definicji).

[169] Czyt.: „sigma–ciało”; niektórzy używają zamiast tego nazwy *σ–algebra*.

⋄ Najprostsze σ–ciała

Oto kilka najprostszych σ–ciał:

1. 2^X — rodzina wszystkich podzbiorów zbioru X jest σ–ciałem — to największe σ–ciało podzbiorów X.

2. Druga skrajność, to $\{\emptyset, X\}$ — to najmniejsze σ–ciało podzbiorów X.

3. Niech $X = \{1, 2, 3\}$. Rodzina $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$ jest σ–ciałem podzbiorów X (różnym dla tego X od dwóch poprzednich przykładów).

⋄ σ–ciała generowane

Jednak tak naprawdę najważniejsze przykłady σ–ciał są na ogół trudne do opisania w jawnej formie. Dlatego wygodnie jest używać pojęcia *σ–ciała generowanego* przez pewną rodzinę $\mathcal{A}$ podzbiorów X (tzn. $\mathcal{A} \subset 2^X$). To σ–ciało będziemy oznaczać przez $\sigma(\mathcal{A})$ i definiujemy jako najmniejsze (w sensie zawierania zbiorów) σ–ciało podzbiorów X zawierające rodzinę $\mathcal{A}$.

Nietrudno wykazać, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{A}$ takie najmniejsze σ–ciało istnieje. Niech bowiem $\Sigma_{\mathcal{A}}$ oznacza zbiór wszystkich σ–ciał podzbiorów X zawierających $\mathcal{A}$ [170)] . Wówczas

$$\bigcap_{\mathfrak{M} \in \Sigma_{\mathcal{A}}} \mathfrak{M}$$

jest rodziną podzbiorów X, która zawiera $\mathcal{A}$ (bo każde $\mathfrak{M} \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ zawierało $\mathcal{A}$) i jest σ–ciałem, bo przecięcie dowolnego zbioru σ–ciał jest σ–ciałem (wynika to natychmiast z definicji σ–ciała). Na dodatek ta rodzina, na mocy swej definicji, zawiera się w każdym $\mathfrak{M} \in \Sigma_{\mathcal{A}}$. Jest to więc właśnie $\sigma(\mathcal{A})$.

Przykłady.

1. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$ — rodzina wszystkich jednoelementowych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$. Wówczas $\sigma(\mathcal{A}) = 2^{\mathbb{N}}$, gdyż każdy podzbiór zbioru $\mathbb{N}$ jest skończoną lub przeliczalną sumą elementów rodziny $\mathcal{A}$.

2. $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}$ — rodzina wszystkich otwartych podzbiorów $\mathbb{R}^d$. Wówczas $\sigma(\mathcal{A})$ nazywamy rodziną *zbiorów borelowskich* w $\mathbb{R}^d$ (a jego elementy to *zbiory borelowskie*) i oznaczamy przez $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Można wykazać, choć wcale nie jest to tak od razu oczywiste, że $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \neq 2^{\mathbb{R}^d}$.

⋄ Wybór generatorów

Każda rodzina zbiorów $\mathcal{A}$ o tej własności, że $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}$ dla danego σ–ciała $\mathfrak{M}$ nosi nazwę rodziny *generatorów* σ–ciała $\mathfrak{M}$. Rodzina generatorów pełni rolę nieco podobną do roli bazy przestrzeni liniowej. Nie jest ona też na ogół jednoznacznie wyznaczona przez $\mathfrak{M}$.

Przykład. Poza rodziną wszystkich otwartych podzbiorów $\mathbb{R}$, także każda z poniższych rodzin generuje $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (tzn. jest rodziną generatorów dla $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$):

(i) rodzina wszystkich domkniętych podzbiorów $\mathbb{R}$,

(ii) $\{(a; b) : a, b \in \mathbb{R}\}$;

(iii) $\{[a; b] : a, b \in \mathbb{R}\}$;

[170)] Oczywiście $\Sigma_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$, bo np. $2^X \in \Sigma_{\mathcal{A}}$.

(iv) $\{(-\infty; a) : a \in \mathbb{R}\}$;

(v) $\{[a; +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$.

Oczywiście tego typu rodzin generatorów jest znacznie więcej (patrz zad. 7).

◇ Miary

Niech $\mathfrak{M}$ będzie pewnym σ–ciałem podzbiorów zbioru X. $\mathfrak{M}$ będziemy traktować jako rodzinę zbiorów mierzalnych, czyli możliwych do zmierzenia przy użyciu zadanej miary. Ale tak jak zapowiadaliśmy, nie będziemy rozważać tu na razie żadnej konkretnej miary, lecz podamy definicję abstrakcyjną, tj. określającą warunki (aksjomaty), które uznajemy za niezbędne (i wystarczające) do tego by dany sposób pomiaru nazwać miarą.

Definicja. *Funkcja $\mu : \mathfrak{M} \to [0; +\infty]$* [171] *jest* ***miarą*** *wtw*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$,*
2. *(przeliczalna addytywność) dla każdego ciągu $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$ parami rozłącznych (tj. $\forall_{\substack{m,n \in \mathbb{N} \\ m \neq n}} A_m \cap A_n = \emptyset$) zbiorów mierzalnych (tj. $\forall_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$) zachodzi*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \text{ [172]} . \tag{X.1}$$

Zauważmy, że zbiór, którego miara znajduje się po lewej stronie (X.1) jest mierzalny, dzięki założeniu, że $\mathfrak{M}$ jest σ–ciałem.

◇ Kilka własności

Zanim zajmiemy się przykładami miar, wypiszemy kilka podstawowych własności każdej miary, będących konsekwencją powyższej definicji. Zakładamy tu, że μ jest *miarą w X*, tzn. że μ jest miarą określoną na pewnym σ–ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów X.

Fakt.

1. *(skończona addytywność) Jeżeli $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$ i są to zbiory parami rozłączne, to*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

2. *(σ–podaddytywność) Jeżeli $A_n \in \mathfrak{M}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to*

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

3. *(monotoniczność) Jeżeli $A, B \in \mathfrak{M}$ i $A \subset B$, to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*

Nietrudny dowód powyższego faktu zastawiam Państwu jako zadanie (patrz zad. 15).

---

[171] Ten „przedział” jest „domknięty” z prawej strony tzn. chodzi o zbiór $[0; +\infty) \cup \{+\infty\}$.

[172] Jeśli choć jedna spośród miar $\mu(A_n)$ równa jest $+\infty$, to sumę tę definiujemy jako $+\infty$, w przeciwnym wypadku jest to zwykła suma szeregu — posiada on sumę (skończoną lub nie), gdyż $\mu(A_n) \geqslant 0$.

$\diamond$ Przykłady miar

Oto kilka miar, dla ktorych sprawdzenie warunków z definicji nie sprawia żadnych istotnych trudności:

1. (miara zerowa) Niech $\mathfrak{M}$ będzie dowolnym σ–ciałem podzbiorów X. Funkcja $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ stale równa zero jest oczywiście miarą (ale inne funkcje stałe na $\mathfrak{M}$ na miarę się nie nadają...).

2. (delta Diraca) Niech $x_0 \in X$ i niech $\mathfrak{M}$ będzie pewnym σ–ciałem podzbiorów X (czasami w tym przypadku zakłada się dodatkowo, że $\{x_0\} \in \mathfrak{M}$, choć nie jest to niezbędne). Funkcja $\delta_{x_0} : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ zadana dla $A \in \mathfrak{M}$ wzorem

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x_0 \in A \\ 0 & \text{gdy } x_0 \notin A \end{cases}$$

   nazywa się *deltą Diraca* w x_0 i jest ona miarą (patrz zad. 13). Najczęściej używa się tej miary dla przypadku gdy $X = \mathbb{R}^d$, $x_0 = 0$ i $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$.

3. (miara licząca) Rozważamy znów dowolne X oraz $\mathfrak{M} = 2^X$. Niech $\# : 2^X \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ będzie zadana dla $A \subset X$ następująco:

$$\#(A) = \begin{cases} \text{liczba elementów zbioru } A, \text{ gdy } A \text{ — zbiór skończony} \\ +\infty, \text{ gdy } A \text{ — zbiór nieskończony.} \end{cases}$$

   Funkcja ta jest miarą, tzw. *miarą liczącą* (patrz zad. 13).

$\diamond$ Miara skończona i miara zupełna

Wyróżnia się rozmaite szczególne rodzaje miar. Na razie określimy dwa z nich.

Miara μ jest *skończona* wtw $\mu(X) < +\infty$. Dwa pierwsze spośród powyższych przykładów to miary skończone, natomiast miara licząca jest skończona wtw X jest zbiorem skończonym.

Miara μ jest *zupełna* wtw każdy podzbiór zbioru miary zerowej jest zbiorem mierzalnym[173)]. Oczywiście każda miara określona na σ–ciele 2^X jest zupełna, ale nie jest to wcale warunek konieczny zupełności. Można wykazać, że każda miara daje się uzupełnić, tj. rozszerzyć do pewnego, być może większego σ–ciała, tak, że to rozszerzenie będzie już miarą zupełną (patrz zad. 22).

$\diamond$ Zbiory zerowej miary

Zbiory miary zero pełnią szczególną rolę w teorii miary — to takie zbiory, które w pewnym sensie są „nieistotne". W jakim sensie? — wyraża to poniższy rezultat.

Fakt.

1. *Dla zbiorów miary zero skończone i przeliczalne operacje sumy, przecięcia oraz — dla dwóch zbiorów — różnicy dają zbiór miary zero.*

2. *Jeżeli A i Z są mierzalne oraz $\mu(Z) = 0$, to $\mu(A \cup Z) = \mu(A \setminus Z) = \mu(A)$.*

[173)] A zatem podzbiór ten musi też mieć automatycznie zerową miarę na mocy monotoniczności miary.

Dowód (część).
Wykażemy tylko, że jeżeli $\mu(A_n) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$. Na mocy σ–podaddytywności miary μ mamy

$$0 \leqslant \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

□

◇ Miara Lebesgue'a

Wspomniane wcześniej przykłady miar były dość proste i prawdę powiedziawszy, dla nas niezbyt ważne. Główna miara jakiej potrzebujemy to taka, która miałaby coś wspólnego z mierzeniem długości w przypadku podzbiorów $\mathbb{R}^1$, powierzchni — w przypadku $\mathbb{R}^2$ oraz objętości — w przypadku $\mathbb{R}^3$. Ogólnie, w przypadku $\mathbb{R}^d$, będzie to tzw. d–wymiarowa *miara Lebesgue'a*. Podanie ścisłej definicji takiej miary jest niestety sprawą dość trudną. Każdy znany dotąd sposób jej (a właściwie — ich, ze względu na dowolność wymiaru d) definiowania wymaga jednoczesnego dowodzenia wielu nietrywialnych faktów. Z konieczności ograniczymy się zatem do samego sformułowania twierdzenia o istnieniu potrzebnej nam miary, przy dowolnie wybranym wymiarze d.

Twierdzenie X.1 (o istnieniu miary Lebesgue'a). *Niech $d \in \mathbb{N}$. Istnieje dokładnie jedna miara μ, spełniająca poniższe warunki:*

1. *μ jest określona na pewnym σ–ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów $\mathbb{R}^d$ takim, że $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathfrak{M}$;*
2. *$\mu([a_1; b_1] \times \ldots \times [a_d; b_d]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_d - a_d)$ dla dowolnych $a_1 \leqslant b_1, \ldots, a_d \leqslant b_d$;*
3. *(przesuwalność) $\forall_{A\in\mathfrak{M}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}^d}\ \mu(x + A) = \mu(A)$ [174] ;*
4. *μ jest zupełna oraz każdy zbiór $A \in \mathfrak{M}$ ma postać $A = A_B \cup Z$, gdzie $A_B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ oraz $Z \subset A_0$ dla pewnego $A_0 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, takiego że $\mu(A_0) = 0$ [175] .*

B.D.

Miarę spełniającą warunki tego twierdzenia nazywamy d–wymiarową *miarą Lebesgue'a*, a przy $d = 1$ także krócej: miarą Lebesgue'a. Będziemy ją oznaczać przez λ^d, a gdy $d = 1$, także przez λ.

W pewnym sensie najważniejszą spośród własności miary λ^d jest własność 2. z powyższego twierdzenia. Dzięki przeliczalnej addytywności miary pozwala ona na „wyliczenie" miary każdego zbioru, który jest przeliczalną sumą parami rozłącznych „kostek" tego typu (tj. o krawędziach równoległych do osi). Zauważmy przy tym, że tak naprawdę nie jest istotne, by kostki te były domknięte — ich miara nie zależy od tego, czy któraś ze „ścian" zawiera się w nich, czy nie. Np., dla $d = 2$ mamy

$$\lambda^2([0; 1] \times [0; 1]) = \lambda^2((0; 1) \times (0; 1)) = 1,$$

gdyż

$$[0; 1] \times [0; 1] = ((0; 1) \times (0; 1)) \cup (\{0\} \times [0; 1]) \cup (\{1\} \times [0; 1]) \cup ([0; 1] \times \{0\}) \cup ([0; 1] \times \{1\})$$

przy czym każdy z czterech zbiorów dodanych do $(0; 1)\times(0; 1)$ jest na mocy pkt. 2. twierdzenia X.1 zbiorem miary 0. Większość zbiorów, z którymi mamy w praktyce do czynienia to zbiory, które są równe wcześniej wspomnianej przeliczalnej sumie kostek, z dokładnością ewentualnie do pewnego zbioru miary zero.

[174] $x + A := \{x + a \in \mathbb{R}^d : a \in A\}$.
[175] Oznacza to, że μ jest wspomnianym wcześniej uzupełnieniem obcięcia μ do $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Oczywiście, podana postać A nie musi być jednoznaczna.

⋄ Zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a

Możliwość zmierzenia przy pomocy miary Lebesgue'a rzeczywiście pokaźnej liczby zbiorów zapisana jest w warunku 1 twierdzenia X.1 — mierzalne bowiem są tu przynajmniej wszystkie zbiory borelowskie. A znalezienie zbioru nieborelowskiego — to rzecz nietrywialna (choć jest to możliwe, jak już wcześniej wspomnieliśmy, patrz zad. 23). Sigma ciało, na którym określona jest d–wymiarowa miara Lebesgue'a, zwane też *σ–ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a (w* $\mathbb{R}^d$*)* — oznaczamy je $\mathcal{L}\,(\mathbb{R}^d)$, jest „nieco" większe od σ–ciała $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, ale jak mówi warunek 4 twierdzenia X.1, każdy taki zbiór mierzalny różni się od pewnego zbioru borelowskiego o zbiór miary (miary λ^d) zerowej.

⋄ Funkcje mierzalne

Podobnie jak nie każdy podzbiór $\mathbb{R}^d$ da się zmierzyć miarą Lebesgue'a, tak nie każdą funkcję da się scałkować względem miary λ^d. Zresztą z tego typu trudnością spotkaliśmy się już przy teorii całki Riemanna. Jak się już wkrótce przekonamy, przy całkowaniu względem miary λ^1 ograniczenia dotyczące całkowanych funkcji są jednak dużo mniejsze niż przy całkowaniu w sensie Riemanna (to jeden z powodów, dla których teoria całki względem miary Lebesgue'a okazuje się „lepsza" niż teoria całki Riemanna). Pewnych ograniczeń jednak uniknąć się nie da. Dla całki Lebesgue'a ograniczenia te są dwóch typów: „jakościowe" i „ilościowe". To pierwsze związane jest z potrzebą tzw. *mierzalności funkcji*, o drugim powiemy już przy samej definicji całki.

Niech $\mathfrak{M}$ będzie pewnym σ–ciałem podzbiorów X oraz niech $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset X$.

Definicja. *Funkcja f jest* ***mierzalna*** *wtw*

$$\forall_{A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})}\ f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}. \tag{X.2}$$

A zatem, m. in. od dziedziny f wymagamy jedynie mierzalności ($D = f^{-1}(\mathbb{R})$)[176)]. Jak widać, w definicji tej istotny jest wybór σ–ciała $\mathfrak{M}$, natomiast w ogóle nie jest jeszcze potrzebna miara (stąd tu mówimy o, jedynie, „jakościowym", a nie „ilościowym" ograniczeniu). Czasami, aby wyraźnie zaznaczyć o jaki wybór σ–ciała chodzi w danym przypadku, będziemy zamiast „mierzalna" mówić $\mathfrak{M}$*–mierzalna*, a dla $\mathfrak{M} = \mathcal{L}\,(\mathbb{R}^d)$ także *mierzalna w sensie Lebesgue'a.*

⋄ Mierzalność funkcji nieco ogólniej

Choć całkować będziemy jedynie funkcje o wartościach liczbowych (ewentualnie o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$, ale o tym później), z kilku względów warto jest pojęcie mierzalności uogólnić też na przypadek funkcji o innych wartościach. Załóżmy mianowicie, że $f : D \to X'$, $D \subset X$, przy czym zadane jest także pewne σ–ciało $\mathfrak{M}'$ podzbiorów zbioru X'. Wówczas f jest *mierzalna*, albo precyzyjniej: $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ – *mierzalna* wtw $\forall_{A\in\mathfrak{M}'}\ f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$. A zatem o poprzednim, szczególnym, przypadku mierzalności funkcji skalarnej możemy teraz powiedzieć, że była to $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$–mierzalność w sensie tej ogólniejszej terminologii.

⋄ Jak sprawdzać mierzalność funkcji

Definicja mierzalności była co prawda krótka, ale często jest ona dość niepraktyczna. Trzeba bowiem sprawdzać pewien warunek dla wszystkich zbiorów $A \in \mathfrak{M}'$, podczas gdy opisanie postaci dowolnego elementu σ–ciała $\mathfrak{M}'$ może być, jak wiemy, bardzo trudne. Na szczęście sprawa się bardzo upraszcza, gdy umiemy opisać postać generatorów σ–ciała $\mathfrak{M}'$.

---

176) W przypadku miary λ^1 to znaczenie słabszy warunek niż dla całkowalności w sensie Riemanna — tam dziedzina musiała być przedziałem domkniętym.

Fakt. *Jeżeli* $\mathfrak{M}' = \sigma(\mathcal{A})$ *i* $D \in \mathfrak{M}$, *to* f *jest* $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$*–mierzalna wtw*

$$\forall_{A\in\mathcal{A}}\ f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}. \tag{X.3}$$

Dowód.
Oczywiście implikacja „$\Rightarrow$" zachodzi, gdyż $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}'$. Wykażemy „$\Leftarrow$". Załóżmy zatem (X.3) i zdefiniujmy $\mathfrak{M}_f := \{A \subset X' : f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}\}$ — to tzw. „przeniesienie $\mathfrak{M}$ z X do X' przy pomocy f". Dzięki własnościom przeciwobrazu funkcji łatwo wykazać, że $\mathfrak{M}_f$ jest σ–ciałem podzbiorów zbioru X'. Np. jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ A_n \in \mathfrak{M}_f$, to $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathfrak{M}$, bo $\mathfrak{M}$ jest σ–ciałem oraz $f^{-1}(A_n) \in \mathfrak{M}$ dla każdego n. A zatem $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}_f$. Ponadto (X.3) oznacza, że $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_f$. Stąd $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{M}_f$ gdyż $\sigma(\mathcal{A})$ jest najmniejszym w sensie „$\subset$" σ–ciałem podzbiorów X' zawierającym $\mathcal{A}$, a $\mathfrak{M}_f$ — „tylko" pewnym σ–ciałem podzbiorów X' zawierającym $\mathcal{A}$. A więc $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}_f$, co oznacza właśnie, że f jest $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ mierzalna. □

Uwaga! W tym fakcie, w odróżnieniu od definicji, musieliśmy już zakładać, że $D \in \mathfrak{M}$. Warto zapamiętać rozumowanie użyte w powyższym dowodzie, gdyż jest ono charakterystyczne dla sytuacji, w których pojawiają się σ–ciała generowane przez pewne rodziny zbiorów.

⋄ Dwa ważne przykłady

1. Funkcje ciągłe. Rozważamy $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^d$, dla $\mathbb{R}^d$ rozważamy σ–ciało $\mathcal{L}\ (\mathbb{R}^d)$ zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i $D \in \mathcal{L}\ (\mathbb{R}^d)$. Jeżeli f jest ciągła, to f jest mierzalna (tzn. $\mathcal{L}\ (\mathbb{R}^d)$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$–mierzalna). Wynika to z tego, że dla $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ rodzina zbiorów otwartych jest (z definicji) zbiorem generatorów, a skoro f — ciągła, to dla U — otwartego w $\mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}(U)$ ma na mocy twierdzenia VIII.3 postać $V \cap D$, gdzie V — otwarty w $\mathbb{R}^d$. A zatem $V \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{L}\ (\mathbb{R}^d)$, skąd $f^{-1}(U) = V \cap D \in \mathcal{L}\ (\mathbb{R}^d)$. Jak z tego dowodu widać, gdy f — ciągła i $D \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, to f jest nawet $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$–mierzalna.

2. Funkcje charakterystyczne zbiorów mierzalnych. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ–ciałem podzbiorów X, $A \in \mathfrak{M}$ i rozważmy χ_A – *funkcję charakterystyczną* zbioru A, tj. funkcję z X w $\mathbb{R}$ zadaną wzorem:
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A. \end{cases}$$
I choć takiej funkcji na ogół daleko do ciągłości, to jest ona mierzalna. Niech bowiem B będzie jakimkolwiek podzbiorem $\mathbb{R}$ (nie koniecznie nawet borelowskim). Wówczas $\chi_A^{-1}(B)$ jest jednym z następujących zbiorów: $\emptyset$, A, $X \setminus A$, X (pierwsza sytuacja — gdy $0, 1 \notin B$, druga — gdy $1 \in B$ ale $0 \notin B$, trzecia — gdy $0 \in B$, ale $1 \notin B$ i ostatnia — gdy $0, 1 \in B$). Zatem χ_A jest mierzalna (tzn. $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$–mierzalna, tj. $\mathfrak{M}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})$–mierzalna), bo każdy z tych czterech zbiorów należy do $\mathfrak{M}$. A co więcej χ_A jest też $2^{\mathbb{R}}$–mierzalna (tj. $\mathfrak{M}$, $2^{\mathbb{R}}$–mierzalna). Analogiczny wynik uzyskamy rozważając χ_A jako funkcję określoną nie na całym X, ale na dowolnym $D \in \mathfrak{M}$, dla $A \subset D$.

⋄ Mierzalność złożenia

Załóżmy teraz, że $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$ są σ–ciałami podzbiorów odpowiednio X, X', X'' oraz $D \in \mathfrak{M}$, $D' \in \mathfrak{M}'$. Jak się okazuje, mierzalność względem odpowiednich σ–ciał zachowuje się przy składaniu funkcji.

Fakt. *Jeżeli* $f : D \to D'$ *jest* $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$*–mierzalna oraz* $g : D' \to X''$ *jest* $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$*–mierzalna, to* $g \circ f$ *jest* $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}''$*–mierzalna (patrz rys. 30).*

Dowód.
Niech $A \in \mathfrak{M}''$. Mamy $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$, ale $g^{-1}(A) \in \mathfrak{M}'$ na mocy mierzalności g, a zatem $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathfrak{M}$ na mocy mierzalności f. □

$$\begin{tikzcd}
X \supset D \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & D' \arrow[r, "g"'] & X'' \\[-2em]
\mathfrak{M} & \cap & \mathfrak{M}'' \\[-2em]
 & X' & \\[-2em]
 & \mathfrak{M}' &
\end{tikzcd}$$

Rysunek 30. Diagram opisujący zachowywanie się mierzalności przy operacji składania funkcji.

◇ Niemierzalność złożenia...

Wbrew pozorom jednak ogólnie nie jest prawdą, że złożenie dwóch funkcji mierzalnych jest funkcją mierzalną, jeżeli składamy funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej oraz mierzalność **obu** funkcji rozumiemy jako $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$–mierzalność. By mieć pewność, że złożenie takie będzie mierzalne, powinniśmy zakładać, że funkcja zewnętrzna jest $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$–mierzalna[177] , co jest nieco silniejszym warunkiem niż ten wcześniejszy (gdyż $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$, ale równość nie zachodzi). Na szczęście jest to też warunek „prawie zawsze" spełniony w „typowych sytuacjach".

◇ Inne algebraiczne własności mierzalności funkcji

Wiemy już jak zachowuje się własność mierzalności przy składaniu funkcji — czas teraz na inne operacje.

Fakt. *Suma, iloczyn, różnica i iloraz funkcji skalarnych mierzalnych (tzn. $\mathfrak{M}$–mierzalnych) są mierzalne (w przypadku ilorazu zakładamy oczywiście, że dzielimy przez funkcję o wartościach różnych od* 0*).*

Dowód.
Niech $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ będą mierzalne, gdzie $D \subset X$ oraz w X rozważamy σ–ciało $\mathfrak{M}$. Wykażemy, że $f_1 + f_2$ jest mierzalna. W tym celu rozważmy $f : D \to \mathbb{R}^2$ zadaną wzorem $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Zauważmy najpierw, że f jest $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$–mierzalna. Wynika to z faktu, że w $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ można jako zbiór generatorów wybrać rodzinę wszystkich prostokątów postaci $[a; b] \times [c; d]$ (patrz zad. 10). Gdy to już wiemy, na mocy faktu ze str. 181 wystarczy sprawdzić, że $f^{-1}([a; b] \times [c; d]) \in \mathfrak{M}$. Ale $f^{-1}([a; b] \times [c; d]) = \{x \in X_1 : f_1(x) \in [a; b] \text{ i } f_2(x) \in [c; d]\} = f_1^{-1}([a; b]) \cap f_2^{-1}([c; d]) \in \mathfrak{M}$. Potrzebne było też by $D \in \mathfrak{M}$, ale to mamy zagwarantowane np. przez mierzalność f_1.

Teraz zauważmy, że $f_1 + f_2 = p \circ f$, gdzie $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ to funkcja opisująca dodawanie liczb, tzn. $p(x) = x_1 + x_2$. Ponieważ p jest ciągła, zatem w szczególności jest też oczywiście $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$–mierzalna (patrz przykład 1.). A zatem na mocy faktu dotyczącego składania funkcja $f_1 + f_2$ jest mierzalna.

Określając teraz odpowiednio inaczej funkcję p uzyskamy dowody dla pozostałych działań.

□

◇ Wartości nieskończone

Czasami, oprócz funkcji czysto skalarnych, wygodnie jest rozważać funkcje o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$. Nietrudno jest rozszerzyć pojęcie mierzalności na takie funkcje. Mianowicie $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ jest *mierzalna* wtw zachodzi (X.2) oraz $f^{-1}(\{+\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathfrak{M}$.

[177] Takie funkcje noszą nazwę *borelowskich*. Np. każda funkcja ciągła określona na zbiorze borelowskim (tj. z $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$) jest oczywiście borelowska — patrz przykład 1.

Nietrudno sprawdzić, że sformułowany przed chwilą fakt dotyczący podstawowych działań na funkcjach pozostaje prawdziwy także dla tak rozszerzonego pojęcia mierzalności, pod warunkiem, że działania na rozważanych funkcjach będą określone (tzn. dla każdego x odpowiednie działanie dla elementów $f_1(x)$ i $f_2(x)$ z $\overline{\mathbb{R}}$ będą określone w sensie zdefiniowanym na stronie 27).

⋄ Mierzalność granicy

Sformułujemy jeszcze jeden wynik, dotyczący granicy ciągu funkcji mierzalnych. Dowód (nietrudny!) jest zadaniem dla Państwa (patrz zad. 27).

Fakt. *Jeżeli ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest punktowo zbieżny do funkcji f i wszystkie jego wyrazy f_n są funkcjami mierzalnymi, to f też jest mierzalna.*

Także ten fakt pozostaje prawdziwy dla funkcji o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$, o ile tylko rozszerzymy (w oczywisty chyba sposób) pojęcie zbieżności punktowej na ciągi funkcyjne tego rodzaju.

⋄ Całka względem miary — przygotowania

Określimy tu wreszcie zapowiadane już od dłuższego czasu pojęcie całki względem dowolnej miary. Taki typ całki nosi też nazwę *całki Lebesgue'a* [178]. Definicja całki będzie składała się z trzech etapów. Najpierw zdefiniujemy całkę dla tzw. *funkcji prostych* (dla tych, dla których będzie ona określona), następnie dla funkcji mierzalnych nieujemnych i wreszcie ogólniej, dla wszystkich funkcji mierzalnych, dla których będzie to możliwe.

Zanim przystąpimy do definicji, przyjmiemy najpierw jedną ważną umowę, która uprości nam zapis rozmaitych formuł przy uprawianiu tej teorii. Przyjmujemy mianowicie, że **na użytek teorii miary**:

$$0 \cdot \pm\infty = \pm\infty \cdot 0 = 0. \tag{X.4}$$

Ta umowa może Państwa nieco bulwersować — pamiętają Państwo zapewne, że już w rozdziale II działania typu „0 razy nieskończoność" zostały uznane za nieokreślone (zgodnie zresztą z doświadczeniem płynącym z teorii granicy ciągu — patrz np. zadanie 7). I to się nie zmienia — nadal uznajemy nieokreśloność tego działania, a wzór (X.4) będziemy traktować jedynie jako **umowę**, która parokrotnie skróci nam po prostu zapis pewnych formuł.

Załóżmy, że $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ jest *przestrzenią mierzalną*, tzn. że $\mathfrak{M}$ jest σ–ciałem podzbiorów X (te podzbiory będziemy nazywali mierzalnymi), $D \subset X$ oraz μ — miarą określoną na $\mathfrak{M}$.

⋄ Całkowanie funkcji prostych

Funkcję $f : D \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją prostą* wtw f jest mierzalna i jej zbiór wartości jest skończony. Załóżmy, że zbiorem wartości funkcji f jest $\{c_1, \ldots, c_n\}$, gdzie $c_i \neq c_j$ dla $i \neq j$, i niech $A_i := \{x \in D : f(x) = c_i\}$, tzn. $A_i = f^{-1}(\{c_i\})$ — w szczególności więc A_i są mierzalne i tworzą rozbicie D na rozłączne zbiory, tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $\bigcup_{i=1}^n A_i = D$. Jest więc chyba naturalne, że całkę z f powinniśmy określić wzorem:

$$S(f)^{\,179)} := \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(A_i),$$

[178] Jest pewna niekonsekwencja w tym nazewnictwie. Nazwisko Lebesgue'a pojawia się zarówno przy omawianej tu ogólnej teorii miary i całki, jak i przy samym pojęciu całki, ale w ogólnym przypadku (dla dowolnej miary). Tymczasem nazwa *miara Lebesgue'a* odnosi się jedynie do poznanych już przez nas konkretnych miar λ^d określonych dla podzbiorów $\mathbb{R}^d$.

[179] Na razie jeszcze nie używamy tu symbolu całki „$\int$", ale jak się wkrótce przekonamy $S(f)$ będzie rzeczywiście równe całce z f, o ile $S(f)$ jest określone.

o ile suma powyższa jest *określona*, tzn. składnikami jej nie są jednocześnie $+\infty$ i $-\infty$. W szczególności na pewno $S(f)$ jest określone, gdy dodatkowo $f \geqslant 0$. Tu po raz pierwszy może zaistnieć konieczność użycia umowy (X.4), gdy zdarzy się, że $c_i = 0$ oraz $\mu(A_i) = +\infty$ dla pewnego i (na odwrót zdarzyć się nie może, bo założyliśmy, że f ma wartości w $\mathbb{R}$ a nie w $\overline{\mathbb{R}}$). Oczywiście może się także zdarzyć, że wartość $S(f)$ będzie określona, ale nieskończona.

Należy jeszcze wspomnieć o tym, że choć funkcje proste wydają się być (jak sama ich nazwa na to wskazuje) mało skomplikowane, to jednak każda funkcja mierzalna g jest granicą pewnego zbieżnego punktowo ciągu funkcji prostych $\{g_n\}$, a jeśli dodatkowo $g \geqslant 0$, to $\{g_n\}$ można wybrać tak, by ciąg ten był rosnący (tzn. $\forall_{x\in D}\ \{g_n(x)\}$ — rosnący). Dowód tego faktu pozostawiam jako zadanie (patrz zad. 28).

⋄ Całkowanie funkcji mierzalnych nieujemnych

Niech $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie mierzalna i $f \geqslant 0$. Wówczas *całkę z f względem miary μ* definiujemy wzorem

$$\int_D f d\mu := \sup_{g\in P_f} S(g), \tag{X.5}$$

gdzie P_f oznacza zbiór wszystkich funkcji prostych g takich, że $0 \leqslant g \leqslant f$ (w szczególności $P_f \neq \emptyset$, bo funkcja zerowa na D należy do P_f). Oczywiście, jak wynika ze wzoru (X.5), gdy $f \equiv 0$, to $\int_D f d\mu = 0$. Podkreślmy, że dla przypadku funkcji mierzalnej $\geqslant 0$ całka jest **zawsze określona**, choć może być równa $+\infty$.

⋄ Część dodatnia i ujemna funkcji

Niech $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie mierzalna. Zdefiniujemy tzw. *część dodatnią* i *część ujemną* funkcji f (obie będą $\geqslant 0$), które będziemy oznaczać f^+ i f^-, odpowiednio. Dla $x \in D$ określamy

$$f^+(x) = \max(0, f(x)),\ f^-(x) = -\min(0, f(x)). \tag{X.6}$$

Nietrudno sprawdzić, że f^+ i f^- są obie mierzalne (zadanie 27) oraz zachodzi

$$f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-. \tag{X.7}$$

W szczególności, gdy $f \geqslant 0$, to $f = f^+$ oraz $f^- = 0$.

⋄ Całka w przypadku ogólnym

Aby zdefiniować określoność i — w przypadku tej określoności — wartość całki z f dla dowolnej funkcji mierzalnej $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, rozszerzając jednocześnie definicję z poprzedniego etapu, postąpimy następująco.

Definicja.

- *Całka z f względem μ* ***jest nieokreślona*** *wtw $\int_D f^+d\mu = \int_D f^-d\mu = +\infty$. W pozostałych przypadkach całka z f względem μ* ***jest określona*** *i wartość jej zadana jest wzorem*
$$\int_D f d\mu := \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu.$$

- *Funkcja f jest* ***całkowalna względem*** *μ (tzn.* ***całkowalna w sensie Lebesgue'a*** *względem μ)[180] wtw*
$$\int_D f^+ d\mu,\ \int_D f^- d\mu < +\infty.$$

[180] Często będziemy mówić w skrócie: *całkowalna*.

O takiej funkcji będziemy też mówić, że jest klasy L^1, a zbiór wszystkich funkcji określonych na D i całkowalnych względem μ będziemy oznaczać $L^1(D, \mu)$.

◇ Całkowalność a określoność całki

Należy podkreślić istotną różnicę pomiędzy sytuacją, gdy całka z f jest określona a sytuacją, gdy f jest całkowalna. Dla funkcji całkowalnej całka jest oczywiście określona, ale odwrotnej zależności nie ma (— całkować można więc też niektóre funkcje niecałkowalne, trochę wbrew nazwie...).

Z definicji powyższej dostajemy natychmiast:

Wniosek. *Funkcja mierzalna f jest całkowalna wtw całka z f jest określona i ma skończoną wartość (tzn. jest liczbą rzeczywistą).*

To pełna analogia do znanej nam sytuacji z teorii granicy ciągu. Istnienie granicy (odpowiednik określonej całki) to warunek ogólniejszy niż zbieżność, tj. istnienie i skończoność granicy (odpowiednik całkowalności).

Sformułowane w definicji warunki dotyczące określoności całki i całkowalności stanowią właśnie owe „ograniczenia ilościowe” dla całkowanych funkcji, o których mówiliśmy przy okazji definiowania funkcji mierzalnych. Pamiętajmy, że aby te warunki można było w ogóle wyrazić, potrzebna nam była mierzalność funkcji (uznana wcześniej za „ograniczenie jakościowe”). Przy tej okazji zauważmy, że definiując całkę Riemanna nie mieliśmy podobnej sytuacji — nie wprowadziliśmy wcale pojęcia „mierzalności w sensie Riemanna” lecz od razu zdefiniowaliśmy całkowalność w sensie Riemanna.

◇ Parę najprostszych przykładów

1. Funkcja stała. Jeżeli $f \equiv c$ gdzie $c \in \overline{\mathbb{R}}$, to $\int_D f d\mu = c \cdot \mu(D)$, z zastosowaniem umowy (X.4) dotyczącej mnożenia 0 i $\pm\infty$. Łatwo to sprawdzić bezpośrednio z etapu 2 definicji, gdy $c \in [0; +\infty]$, a gdy $c < 0$ — z etapu 3. W szczególności, biorąc $c = 1$, uzyskujemy
$$\mu(D) = \int_D 1 d\mu \tag{X.8}$$
(tu zwyczajowo utożsamiamy liczbę 1 z funkcją stale równą 1 na D, którą tu całkujemy, oznaczając ją też przez 1).

2. Całka dla miary Diraca. Niech δ_{x_0} będzie miarą Diraca w x_0 określoną na σ–ciele wszystkich podzbiorów (2^X) zbioru X i rozważmy dowolną funkcję $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas $\int_X f d\delta_{x_0} = f(x_0)$. Inaczej mówiąc całkowanie względem tej miary polega po prostu na braniu wartości funkcji w punkcie x_0 (patrz zad. 29).

3. Całka względem miary liczącej. Rozważmy miarę liczącą # dla podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ i niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (tzn. f jest po prostu ciągiem, $f = \{f(n)\}_{n \geqslant 1}$). Nietrudno sprawdzić, że gdy $f \geqslant 0$, to
$$\int_{\mathbb{N}} f d\# = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$
oraz że wzór ten zachodzi także dla funkcji całkowalnych, co w tym przypadku równoważne jest po prostu bezwzględnej zbieżności szeregu z prawej strony wzoru (zad. 30).

Opisaliśmy powyżej tylko najprostsze przykłady całkowania. Jednak oczywiście najważniejsza jest dla nas sprawa całkowania względem miary Lebesgue'a λ^d, szczególnie dla $d > 1$. Zajmiemy się tym nieco dalej.

◇ **Ogólne własności całki i całkowalności**

Sformułujemy kilka ogólnych własności całki względem miary. Dla wygody przyjmijmy notację podobną do tej użytej przy całce Riemanna: jeżeli $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ oraz $D' \subset D$, to

$$\int_{D'} f d\mu := \int_{D'} f|_{D'}\, d\mu,$$

o ile całka z prawej strony jest określona.

Twierdzenie X.2 (o własnościach całki Lebesgue'a).

1. *Jeżeli $f \in L^1(D,\mu)$, to $\mu(\{x \in D : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.*
2. *(jednorodność) Jeśli $f \in L^1(D,\mu)$ i $a \in \mathbb{R}$, to $af \in L^1(D,\mu)$* [181] *oraz*
$$\int_D af d\mu = a \cdot \int_D f d\mu.$$
3. *(addytywność) Jeżeli $f, g \in L^1(D,\mu)$, to $f+g \in L^1(D,\mu)$* [182] *oraz*
$$\int_D (f+g) d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu.$$
4. *(monotoniczność) Jeżeli $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne, całki f i g są określone oraz $g \leqslant f$, to*
$$\int_D g d\mu \leqslant \int_D f d\mu.$$
5. *(addytywność względem zbioru) Jeżeli zbiory mierzalne A_n są parami rozłączne dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, f jest funkcją mierzalną i całka z f jest określona, to każda z całek z $f|_{A_n}$ też jest określona, oraz*
$$\int_D f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$
W szczególności, gdy $f \in L^1(D,\mu)$ oraz D' jest mierzalnym podzbiorem D, to $f|_{D'} \in L^1(D',\mu)$.
6. *Jeżeli $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją prostą, to $S(f)$ jest określona wtw całka z f względem μ jest określona i wówczas $\int_D f d\mu = S(f)$.*
7. *Jeżeli $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna i $\mu(D) = 0$, to $\int_D f d\mu = 0$.*
8. *Jeżeli $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna i $f \geqslant 0$ oraz $\int_D f d\mu = 0$, to $\mu(\{x \in D : f(x) \neq 0\}) = 0$.*

B.D.

Wniosek. *Jeżeli $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna, to $f \in L^1(D,\mu)$ wtw $\int_D |f| d\mu < +\infty$.*

Dowód.

Wynika to natychmiast ze wzoru (X.7) oraz z własności 2 i 3 powyżej. □

---

[181] Uwaga: definiując $a \cdot f$ stosujemy tu konwencję (X.4) w tym znaczeniu, że $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$, zatem gdy $a = 0$ i $f(x_0) = \pm\infty$, to $(a \cdot f)(x_0) = 0$.

[182] Jeżeli dla pewnego $x_0 \in D$ zachodzi $f(x_0) = +\infty$ i $g(x_0) = -\infty$ lub odwrotnie, to $f+g$ nie jest w ogóle określona w punkcie x_0. Jednak na mocy punktu 1 zbiór takich x_0 ma miarę μ zerową, więc w miejsce $f+g$ przyjmujemy tu jakąkolwiek funkcję mierzalną, której wartość wynosi $f(x) + g(x)$ dla pozostałych $x \in D$. Taką funkcję uzyskamy np. przyjmując wartość zero w tych „złych" punktach. Równość poniżej oznacza w szczególności, że ten wybór nie ma wpływu na wartość całki z lewej strony.

◇ Całka granicy i granica całek

Na koniec omawiania ogólnych własności całki Lebesgue'a sformułujemy dwa twierdzenia „o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki", czyli takie, których teza mówi, że „całka granicy równa jest granicy całek".

Twierdzenie X.3. *Załóżmy, że funkcje $f_n : D \to \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne dla $n \geqslant n_0$ oraz że $f_n \to f$.*[183] *Jeżeli spełnione jest* ***któreś*** *z poniższych założeń:*

(M) (tw. „o zbieżności monotonicznej") $\{f_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest rosnącym ciągiem funkcji nieujemnych, tzn.

$$\forall_{\substack{n\geqslant n_0\\ x\in D}}\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x),$$

(L) (tw. Lebesgue'a „o zbieżności majoryzowalnej") $\{f_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest majoryzowalny przez funkcję całkowalną, tzn. istnieje $F \in L^1(D,\mu)$ taka, że

$$\forall_{\substack{n\geqslant n_0\\ x\in D}}\ |f_n(x)| \leqslant F(x),$$

to

$$\lim_{n\to+\infty}\int_D f_n d\mu = \int_D f d\mu \ ^{184)}\ .$$

B.D.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że w twierdzeniu o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki dla całki Riemanna (patrz zad. 10) zakładaliśmy **aż** zbieżność jednostajną. Powyższe twierdzenia to zatem kolejny „dowód" na wyższość całki Lebesgue'a nad całką Riemanna...

◇ Pamiętaj o założeniach

Nie wolno zapominać o założeniach powyższego twierdzenia. Aby się o tym przekonać wystarczy rozważyć funkcje $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n = \chi_{[n;+\infty)}$. Wówczas $f_n \longrightarrow 0$ (funkcja zerowa na $\mathbb{R}$), ale $\forall_n\ \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda^1 = +\infty$, choć $\int_{\mathbb{R}} 0\, d\lambda^1 = 0$... Nie pomaga tu wcale nawet to, że mamy do czynienia z monotonicznym ciągiem funkcji mierzalnych nieujemnych („rosnący" z wersji (M) twierdzenia nie może być zastąpione przez „malejący", wbrew sugestii z nazwy tego twierdzenia...).

◇ Równość prawie wszędzie

Określenia *prawie wszędzie*, czy *dla prawie wszystkich...* (ew. *μ–prawie wszystkich...*) będziemy używać ogólnie w sytuacjach, w których rozważana własność zachodzi poza pewnym zbiorem miary zero.

Nietrudno (przy pomocy tw. X.2) wykazać poniższy rezultat dotyczący *równości prawie wszędzie.*

Fakt. *Jeżeli $f, g : D \to \mathbb{R}$ są mierzalne i równe μ–prawie wszędzie (tzn. $f(x) = g(x)$ dla μ–prawie wszystkich $x \in D$), to całka z f jest określona wtw całka z g jest określona oraz wówczas $\int_D f d\mu = \int_D g d\mu$. W szczególności $f \in L^1(D,\mu)$ wtw $g \in L^1(D,\mu)$.*

◇ Funkcje określone prawie wszędzie

Własność 7 z twierdzenia X.2 oznacza, że zbiory miary zero są „nieistotne" przy całkowaniu. W praktyce, w różnych sytuacjach będziemy mieli do czynienia z funkcjami, które chcielibyśmy

[183] Przypominam, że symbol „$\longrightarrow$" oznacza zbieżność **punktową** ciągu funkcyjnego.

[184] Określoność całki dla f (w szczególności jej mierzalność), a dla (L) nawet całkowalność, wynika z założeń twierdzenia (dlaczego?).

scałkować „po zbiorze D", choć nie będą one określone w pewnych jego punktach. Jeżeli zbiór tych punktów nieokreśloności zawiera się w pewnym zbiorze miary zero[185]) , to o funkcji takiej będziemy mówić, że jest *określona prawie wszędzie na D* (ew. *μ–prawie wszędzie na D*, jeśli będziemy chcieli wyraźnie zaznaczyć, o jaką chodzi miarę). Z tego typu sytuacją spotkaliśmy się już np. w sformułowaniu własności 3 z twierdzenia X.2 (patrz przypis do tej własności). Jak więc należy określić całkę z funkcji „po D" w tej sytuacji? Otóż przypuśćmy, że $Z \subset D$ jest wspomnianym zbiorem miary 0 zawierającym wszystkie punkty nieokreśloności f (tzn. dziedzina f zawiera $D \setminus Z$). W tej sytuacji określamy

$$\int_D f d\mu := \int_{D\setminus Z} (f\,|_{D\setminus Z}) d\mu.$$

Własności 5 i 7 gwarantują ponadto, że jeśli $\tilde{f}$ jest jakimkolwiek mierzalnym przedłużeniem $f\,|_{D\setminus Z}$ do całej dziedziny D, to przy takim określeniu $\int_D f d\mu = \int_D \tilde{f} d\mu$. Oczywiście nie ma powodu by Z był jednoznacznie wyznaczony, jednak jeżeli $f\,|_{D\setminus Z}$ jest mierzalna i całka z niej jest określona, to w oparciu o twierdzenie X.2 nietrudno wykazać, że wartość $\int_{D\setminus Z}(f\,|_{D\setminus Z})\, d\mu$ daje przy każdym takim wyborze zbioru Z ten sam wynik.

Jeżeli dla **pewnego** zbioru Z miary zero takiego, że dziedzina f zawiera $D \setminus Z$ funkcja $f\,|_{D\setminus Z}$ jest mierzalna, to mówimy, że funkcja f określona prawie wszędzie na D jest *mierzalna* [186]) i podobnie postępujemy dla innego typu własności funkcji, np. dla całkowalności.

2. Całka względem miary Lebesgue'a

Zajmiemy się wreszcie najważniejszą dla nas całką — względem miary Lebesgue'a. Ponieważ stanowi to nasz podstawowy obiekt zainteresowań, uprościmy nieco notację dla takich całek. Zamiast $\int_D f d\lambda^d$, czy $L^1(D, \lambda^d)$, będziemy więc często pisać

$$\int_D f(x)dx \;{}^{187)}\,, \quad L^1(D),$$

odpowiednio. Często też będziemy mówić po prostu „całka Lebesgue'a" mając na myśli całkę względem miary Lebesgue'a λ^d (i mając nadzieję, że to nie doprowadzi do żadnych nieporozumień). Ponieważ w przypadku $d = 1$ oraz $D = [a; b] \subset \mathbb{R}$ symbol $\int_D f(x)dx$ oznaczał już wcześniej całkę Riemanna, zatem aby z tego „nadużycia" się wytłumaczyć zacznijmy nasze rozważania właśnie od $d = 1$.

⋄ Jak to się ma do całki Riemanna?

Na szczęście dla funkcji całkowalnych w sensie Riemanna obydwie tytułowe całki pokrywają się ze sobą. Ściślej — ma miejsce następujące twierdzenie.

Twierdzenie X.4 (całka Lebesgue'a kontra całka Riemanna). *Niech $f : [a; b] \to \mathbb{R}$. Wówczas $f \in \mathcal{R}\ ([a; b])$ wtw f jest ograniczona i zbiór jej punktów nieciągłości ma miarę λ^1 równą zero. Jeżeli $f \in \mathcal{R}\ ([a; b])$, to $f \in L^1([a; b])$* [188]) *oraz całka Riemanna z f równa jest całce Lebesgue'a (tzn. względem miary λ^1) z f.*

---

185) Dla miar zupełnych, np. dla miary Lebesgue'a, to to samo co powiedzieć, że zbiór ten ma po prostu miarę zero

186) Tu już wybór zbioru Z może być istotny, np. wtedy gdy miara μ nie jest zupełna, ale nam chodzi o istnienie pewnego takiego Z.

187) Oczywiście zamiast x może być inny symbol.

188) Uwaga: „1" pojawiające się w oznaczeniu „L^1" nie ma nic wspólnego z tym, że rozważamy akurat miarę λ^1... Ta jedynka pochodzi od ogólnejszego oznaczenia $L^p(X, \mu)$ związanego z klasą funkcji, dla których $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$.

Dowód (fragmenty).
Wykażemy tylko implikację $f \in \mathcal{R}\ ([a;b]) \Rightarrow f \in L^1([a;b])$ przy założeniu, że prawdziwa jest pierwsza część twierdzenia. Niech zatem $f \in \mathcal{R}([a;b])$ i niech $Z \subset [a;b]$ będzie taki, że $\lambda^1(Z) = 0$ oraz $\tilde{f} := f|_{[a;b]\setminus Z}$ jest ciągła. Wykażemy, że f jest mierzalna. Wystarczy dowieść, że dla dowolnego $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ zachodzi $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ale $f^{-1}(A) = \{x \in [a;b] \setminus Z : f(x) \in A\} \cup \{x \in Z : f(x) \in A\} = \tilde{f}^{-1}(A) \cup Z'$, gdzie $Z' \subset Z$.

Jednak $\tilde{f}$ jest ciągła i określona na zbiorze mierzalnym, zatem jest mierzalna (patrz — przykład 1 ze strony 181), czyli $\tilde{f}^{-1}(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ponadto $Z' \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, bo miara λ^1 jest zupełna, stąd $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Pozostaje wykazać, że $\int_{[a;b]} |f| d\lambda^1 < +\infty$. Ale $|f|$ jest ograniczona, tzn. $|f| \leqslant c$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$, skąd $\int_{[a;b]} |f| d\lambda^1 \leqslant \int_{[a;b]} c\ d\lambda^1 = c \cdot \lambda^1([a;b]) = c(b-a) < +\infty$. $\square$

A zatem całkowanie w sensie Lebesgue'a można traktować dla $d = 1$ po prostu jako uzupełnienie teorii całkowania w sensie Riemanna o pewne przypadki, gdy to drugie całkowanie było niewykonalne.

⋄ Całka Lebesgue'a może scałkować więcej

Oto prosty przykład.

Przykład 1. Rozważmy funkcję Dirichleta na przedziale $[0;1]$, tzn. $f : [0;1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Jak wiemy, $f \notin \mathcal{R}([0;1])$ (zbiór punktów nieciągłości to $[0;1]$, więc wynika to choćby z twierdzenia X.4, ale ten przykład badaliśmy też w rozdziale VII). Z drugiej strony $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0;1]}$, więc jest to funkcja mierzalna (patrz przykład 2 ze strony 181) ponieważ $\mathbb{Q} \cap [0;1]$ jest zbiorem mierzalnym, jako zbiór przeliczalny. Na dodatek $\lambda^1(\mathbb{Q} \cap [0;1]) = 0$, ze względu na tę przeliczalność. Mamy więc:

$$\int_{[0;1]} |f| d\lambda^1 = \int_{[0;1]} f d\lambda^1 = \int_{[0;1]\cap\mathbb{Q}} 1\, d\lambda^1 + \int_{[0;1]\setminus\mathbb{Q}} 0\, d\lambda^1 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

A zatem $f \in L^1([0;1])$. Ale zamiast powyższego rachunku można po prostu użyć tego, że f jest funkcją równą zero prawie wszędzie (i powołać się na fakt ze strony 187).

Powyższy przykład chyba dobrze ilustruje istotę sprawy. Nawet jeśli ograniczymy się do rozważania tylko funkcji określonych na przedziale $[a;b]$, całka Lebesgua umożliwia całkowanie większej niż całka Riemanna klasy funkcji, mimo iż na pierwszy rzut oka definicje obu całek nie różniły się tak bardzo, poza szczegółami „technicznymi". W obu sytuacjach podstawą definicji było wyliczenie całki najpierw dla funkcji posiadającej skończony zbiór wartości. W przypadku całki Riemanna były to funkcje stałe na przedziałach utworzonych przez wybrany podział odcinka $[a;b]$, a w przypadku całki Labegue'a — były to funkcje proste. I tu okazuje się, że różnica jest ogromna — ten pierwszy rodzaj funkcji to też funkcje proste, ale bardzo szczególnej postaci! Ograniczenie się do funkcji „stałych na odcinkach" nie pozwala „wnikać" w subtelności funkcji „rozgrywające się" na bardziej zawiłych zbiorach, takich jak np. $\mathbb{Q}$, na co pozwalają dużo lepiej ogólne funkcje proste.

⋄ Całka niewłaściwa a całka Lebesgue'a

Jak pamiętamy, część ograniczeń związanych z całką Riemanna udało się znieść poprzez rozważanie całek niewłaściwych. Warto zatem porównać także ten sposób całkowania z całkowaniem w sensie Lebesgue'a. Niech $I = [a;b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ lub $I = (a;b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ oraz $f : I \to \mathbb{R}$.

Twierdzenie X.5. *Jeżeli istnieje całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)dx$ oraz całka Lebesgue'a $\int_I f(x)dx$ jest określona, to obie te całki są równe. W szczególności, jeżeli f jest mierzalna i całka niewłaściwa $\int_a^b |f(x)|dx$ jest zbieżna*[189] *, to $f \in L^1(I)$.* **B.D.**

Twierdzenie to nietrudno wykazać w oparciu o twierdzenie X.3 oraz o twierdzenie X.4 (patrz zadanie 37).

Należy jednak pamiętać o tym, że w pierwszej części powyższego twierdzenia zakładamy nie tylko istnienie całki niewłaściwej, ale też określoność całki Lebesgue'a. Czasami spełnione jest tylko to pierwsze założenie i w takiej sytuacji teoria całki Lebesgue'a jest bezradna, a jedynym ratunkiem pozostaje całka niewłaściwa. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 2. Niech $f : [1;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Całka niewłaściwa $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna (na mocy kryterium Dirichleta — patrz np. zadanie 11 (h)). Można jednak wykazać, że całka Lebesgue'a z f nie jest określona (zadanie 35).

Warto też podkreślić, że twierdzenie X.5 bywa wygodnym narzędziem do badania całkowalności (w sensie Lebesgue'a) wielu funkcji jednej zmiennej.

Przykład 3. Dzięki informacjom o całkach niewłasciwych z rozdziału VII (patrz przykłady 1 i 2 str. 128) uzyskujemy całkowalność funkcji $f : [1;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanych wzorem $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ dla wszystkich $\alpha > 1$ i brak całkowalności dla pozostałych α. Analogicznie dla funkcji zadanej wzorem x^α na $(0;1]$ całkowalność otrzymamy wtw $\alpha < 1$.

3. Całkowanie w wielu wymiarach i twierdzenie Fubiniego

Opiszemy teraz w jaki sposób da się w praktyce całkować względem miary λ^d dla $d > 1$. Dzięki wzorowi (X.8) umożliwi to nam także obliczanie miar λ^d rozmaitych zbiorów. Jak zobaczymy, całki wielowymiarowe dadzą się sprowadzić do całek względem miary λ^1, które dzięki poprzedniemu podrozdziałowi nie stanowią już dla nas problemu.

◇ Rozszerzenie funkcji do całego $\mathbb{R}^d$

Twierdzenie, które pozwala sprowadzić całkę wielowymiarową do jednowymiarowej to twierdzenie Fubiniego. Można je formułować dla funkcji określonych na dziedzinie $D \subset \mathbb{R}^d$, jednak nieco prostsze sformułowanie otrzymamy gdy D będzie całym $\mathbb{R}^d$. Dlatego zacznijmy od poniższej uwagi dotyczącej nie koniecznie tylko miary λ^d, ale abstrakcyjnej miary μ określonej na σ–ciele podzbiorów X.

Uwaga. Niech $D \subset X$, $D \in \mathfrak{M}$ i niech $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. Określimy $\tilde{f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ wzorem

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in D \\ 0 & \text{dla } x \notin D. \end{cases}$$

Wówczas każda z własności: mierzalność, określoność całki, całkowalność dla f jest równoważna tej własności dla $\tilde{f}$. Ponadto, gdy jedna z tych całek jest określona, to obie są określone równe sobie.

Dzięki temu będziemy mogli się ograniczyć do rozważania funkcji określonych na $\mathbb{R}^d$.

◇ Podział zmiennych na grupy i wstępne oznaczenia

Stosowanie twierdzenia Fubiniego powoduje zmniejszenie „wymiaru miary" po której się całkuje. Wiąże się to każdorazowo z podziałem zmiennych „skalarnych" $x_1, \ldots, x_d$ na dwie rozłączne „grupy" i w efekcie najpierw całkuje się „po zmiennych" z jednej z nich, a potem z drugiej.

[189] Tzn. całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)dx$ jest zbieżna bezwzględnie.

Nie musi to być koniecznie podział typu „$x_1, \ldots, x_k$" i „$x_{k+1}, \ldots, x_d$" — może być to zupełnie dowolny podział. Ustalmy więc pewien podział P zmiennych na grupę d_1 i d_2 elementową, gdzie $d_1 + d_2 = d$ i $d_1, d_2 \geqslant 1$, przy czym w pierwszej grupie są zmienne o numerach $i_1, \ldots, i_{d_1}$ wypisanych tu w kolejności rosnącej, a w drugiej o pozostałych numerach $j_1, \ldots j_{d_2}$ też wypisanych w kolejności rosnącej. Oczywiście podział P na te dwie grupy jest jednoznacznie wyznaczony przez wybór np. pierwszej grupy, czyli inaczej mówiąc po prostu przez pewien wybór d_1 elementowego podzbioru zbioru $\{1, \ldots, d\}$. Przyjmujemy teraz taką notację, która pozwoli nam traktować ten podział na dwie grupy zmiennych analogicznie, jak przy rozważaniu iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Mianowicie dla $s \in \mathbb{R}^{d_1}$ oraz $t \in \mathbb{R}^{d_2}$ symbol $(s,t)_P$ oznacza tu „prawie to samo" co „para s, t", a ściślej taki element $x \in \mathbb{R}^d$, że $x_{i_k} = s_k$ dla $k = 1, \ldots, d_1$ oraz $x_{j_k} = t_k$ dla $k = 1, \ldots d_2$. Np., gdy $d = 3$, $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ oraz $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $j_1 = 2$, to $((7,8),0)_P$ oznacza punkt $(7,0,8)$.

Jeżeli komuś wydaje się to zbyt zawiłe, może na razie z powodzeniem myśleć o najprostszym przypadku, gdy $d = 2$, $d_1 = d_2 = 1$, $i_1 = 1$ oraz $j_1 = 2$. Wówczas napis $(x_1, x_2)_P$ oznacza zwyczajnie punkt z $\mathbb{R}^2$ o pierwszej współrzędnej x_1 a drugiej x_2, czyli (x_1, x_2).

Dla funkcji $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ i dla $s \in \mathbb{R}^{d_1}$ niech f_s oznacza funkcję z $\mathbb{R}^{d_2}$ w $\overline{\mathbb{R}}$ zadaną dla $t \in \mathbb{R}^{d_2}$ wzorem

$$f_s(t) = f((s,t)_P).$$

Ponadto niech $\mathcal{C}_2 f$ oznacza funkcję „całka po drugiej zmiennej",[190] której dziedziną jest

$$D_2 := \{s \in \mathbb{R}^{d_1} : \text{ całka z funkcji } f_s \text{ względem miary } \lambda^{d_2} \text{ jest określona}\}$$

(a więc — uwaga! $D_2 \subset \mathbb{R}^{d_1}$) i która dla $s \in D_2$ zadana jest wzorem

$$\mathcal{C}_2 f(s) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_s d\lambda^{d_2}.$$

◇ Twierdzenie Fubiniego

Teraz możemy już wreszcie sformułować zapowiadane twierdzenie (i nie jest wykluczone, że samo sformułowanie okaże się mniej skomplikowane, niż poprzedzające je oznaczenia ...)

Twierdzenie X.6 (Fubiniego). *Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją mierzalną nieujemną*[191] *lub funkcją całkowalną względem miary λ^d. Wówczas funkcja $\mathcal{C}_2 f$ jest określona prawie wszędzie na $\mathbb{R}^{d_1}$,*[192] *całka z $\mathcal{C}_2 f$ względem λ^{d_1} jest określona oraz zachodzi:*

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathcal{C}_2 f d\lambda^{d_1} = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda^d. \tag{X.9}$$

B.D.

◇ Tradycyjnie lecz mniej ściśle i całki iterowane

Bardziej tradycyjny, znacznie milszy w czytaniu i bardziej chyba czytelny (choć może odrobinkę mniej ścisły) zapis wzoru (X.9) ma postać następującą:

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f((s,t)_P) dt \right) ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx. \tag{X.10}$$

[190] Ściślej — chodzi o całkę (stąd ozn. $\mathcal{C}$) „po drugiej grupie zmiennych", a pierwsza grupa pełni rolę zmiennych dla tej już „wycałkowanej po drugich zmiennych" funkcji $\mathcal{C}_2 f$.

[191] Wersja dla funkcji mierzalnej nieujemnej bywa wiązana także z nazwiskiem Tonellego.

[192] Czyli $\lambda^{d_1}(\mathbb{R}^{d_1} \setminus D_2) = 0$.

Co więcej w tradycyjnej wersji można spotkać też zapis prawej strony powyższego wzoru w formie następującej:

$$\int\int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int f(x)dx_1dx_2\dots dx_d \quad (d \text{ symboli całki „}\int\text{”,)}$$

gdzie „$\int\int_{\mathbb{R}^d}\cdots\int$” i „$dx_1dx_2\dots dx_d$” mają zastępować odpowiednio „$\int_{\mathbb{R}^d}$” i „dx” i jednocześnie wyraźnie podkreślić „wielowymiarowość” całkowania, które tam się odbywa. Podobnie zapisuje się wtedy oba całkowania z lewej strony wzoru. W tradycyjnym nazewnictwie całka z prawej strony to, w zależności od d, tzw. *całka podwójna*, *potrójna* itd. („po d–tna” ...), a wyrażenie z lewej strony — *całka iterowana*.

⋄ Kolejność całkowania

Oczywiście użycie twierdzenia Fubiniego $d-1$ razy pozwala zastąpić całkę „po d–tną” całką iterowaną „w pełni”, tj. taką, że występuje tam d całek po $\mathbb{R}$. Jednak kolejność wykonywania poszczególnych całkowań może być rozmaita — zależy to od tego jakiego podziału zmiennych na dwie grupy dokonamy na każdym kroku. Np., gdy $d=3$, to dzieląc x_1, x_2, x_3 najpierw na x_1 oraz x_2, x_3, a następnie tę drugą grupę na x_2 i x_3 uzyskujemy ostatecznie całkę iterowaną

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,x_3)dx_3\right)dx_2\right)dx_1.$$

Taką samą całką iterowaną uzyskamy przy podziale najpierw na x_1, x_2 oraz x_3, a potem — dla pierwszej grupy — na x_1 i x_2. Z kolei gdy najpierw podzielimy na x_1, x_3 oraz x_2 a potem pierwszą grupę na x_3 i x_1, to uzyskamy najpierw

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,x_3)dx_2\right)d(x_1,x_3),$$

a następnie

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,x_3)dx_2\right)dx_1\right)dx_3.$$

Ogólnie, sprowadzając do postaci całek iterowanych po $\mathbb{R}$, możemy uzyskać $d!$ rozmaitych kolejności całkowania. Warto podkreślić, że wybór tej kolejności może być bardzo istotny w praktycznych rachunkach — niektóre z kolejności mogą prowadzić do łatwiejszych, inne do trudniejszych (czy wręcz — „niewykonalnych”) rachunków. Jednak oczywiście, jeśli założenia twierdzenia są spełnione, to wszystkie te całki iterowane są równe. Bez tych założeń całki iterowane mogą być różne! Z drugiej strony, równość całek iterowanych nie gwarantuje, że założenia twierdzenia są spełnione...

⋄ O potrzebie dwóch wersji

Sformułowaliśmy założenia twierdzenia Fubiniego w dwóch wersjach. Pierwsza dotyczyła funkcji mierzalnych i nieujemnych. Co jednak zrobić, gdy funkcja nie jest nieujemna? Aby spróbować drugiej wersji twierdzenia, trzeba wiedzieć, że funkcja jest całkowalna. Czasem to można stwierdzić od razu (np. funkcja jest mierzalna i ograniczona oraz zeruje się poza zbiorem ograniczonym), ale czasem wydaje się, że jedynym sposobem byłoby stwierdzenie jaką wartość ma całka (dla całkowalności wartość ta musi być skończona). Trzeba by więc ją policzyć, a do tego z kolei trzeba użyć twierdzenia Fubiniego... Czy to nie błędne koło? Na szczęście nie! Tak naprawę, by stwierdzić całkowalność należy wiedzieć nie koniecznie jaka jest wartość $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda^d$ (możemy nawet nie wiedzieć, czy to jest określone), ale czy $\int_{\mathbb{R}^d}|f|d\lambda^d$ jest skończona. A do obliczenia $\int_{\mathbb{R}^d}|f|d\lambda^d$ można zastosować pierwszą wersję twierdzenia — dla funkcji mierzalnych nieujemnych. Tak więc często postępowanie jest takie: najpierw używamy wersji pierwszej (do $|f|$ — mierzalnej, bo f była mierzalna) by sprawdzić całkowalność i jeśli f okaże się całkowalna, to do obliczenia całki stosujemy już wersję drugą.

⋄ Przykładowe użycie dla funkcji dwóch zmiennych

Obliczymy całkę Lebesgue'a z funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = x_1 x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)}$. Jednak najpierw musimy się upewnić, czy całka ta w ogóle jest określona. Oczywiście f jest mierzalna jako funkcja ciągła, nie jest jednak nieujemna, a zatem spróbujmy postąpić tak, jak to zapowiadaliśmy powyżej. Mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |f| d\lambda^2 &\overset{193)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} |x_1 x_2| e^{-(x_1^2+x_2^2)} dx \overset{194)}{=} \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} |x_1| e^{-x_1^2} \cdot |x_2| e^{-x_2^2} dx_1) dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |x_2| e^{-x_2^2} (\int_{\mathbb{R}} |x_1| e^{-x_1^2} dx_1) dx_2 = (\int_{\mathbb{R}} |x_2| e^{-x_2^2} dx_2) \cdot (\int_{\mathbb{R}} |x_1| e^{-x_1^2} dx_1) \\ &= (\int_{\mathbb{R}} |t| e^{-t^2} dt)^2 = (C_1 + C_2)^2,\end{aligned}$$

gdzie $C_1 = \int_{(-\infty;0]} |t| e^{-t^2} dt$, $C_2 = \int_{[0;+\infty)} |t| e^{-t^2} dt$[195]. Te dwie całki Lebesgue'a są na mocy twierdzenia X.5 równe odpowiednim całkom niewłaściwym, dla których możemy już stosować metody z rozdziału VII. W szczególności bez trudu zauważamy, że $C_1 = C_2$ (dzięki parzystości funkcji zadanej wzorem $|t|e^{-t^2}$ [196]). Mamy więc na mocy wzoru na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych

$$C_1 = C_2 = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r t e^{-t^2} dt = \lim_{r \to +\infty} -\frac{1}{2} \int_0^{-r^2} e^s ds = \frac{1}{2} \lim_{r \to -\infty} \int_y^0 e^s ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^s ds = \frac{1}{2}.$$

W efekcie zatem wykazaliśmy całkowalność f, gdyż $\int_{\mathbb{R}^2} |f| d\lambda^2 = 1 < +\infty$. Możemy więc „prawomocnie" zająć się obliczaniem całki z f przy użyciu drugiej wersji twierdzenia Fubiniego — tej dla funkcji całkowalnych[197]. Rachunek nieco skrócimy, bo kolejne przejścia są prawie te same co wyżej. Uzyskujemy więc:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^2 = (\int_{\mathbb{R}} t e^{-t^2} dt)^2 = (\int_{-\infty}^0 t e^{-t^2} dt + \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt)^2 = (-C_1 + C_2)^2 = 0.$$

⋄ Powierzchnia koła

Obliczymy pole powierzchni koła o promieniu $R > 0$, ściślej obliczymy $\lambda^2(K_R)$, gdzie $K_R := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < R\}$ (a więc rozważamy koło otwarte).

Po pierwsze zauważmy, że $\lambda^2(K_R) = \int_{K_R} 1 d\lambda^2$ (patrz (X.8)). Najpierw, zgodnie z wymogami założeń twierdzenia Fubiniego (wg. uwagi ze strony 190), musimy rozszerzyć funkcję stale równą 1 na K_R do funkcji określonej na $\mathbb{R}^2$ i równej po prostu χ_{K_R}. Ta funkcja jest mierzalna i nieujemna, zatem

$$\lambda^2(K_R) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{K_R} d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \chi_{K_R}(x_1, x_2) dx_2) dx_1.$$

Przyjrzyjmy się wewnętrznej całce. Przy ustalonym $x_1 \in \mathbb{R}$ wartość $\chi_{K_R}(x_1, x_2)$ zeruje się gdy $x_1^2 + x_2^2 \geqslant R^2$, a dla pozostałych przypadków ma wartość 1. W efekcie (patrz rys. 31), jeżeli $|x_1| \geqslant R$, to wewnętrzna całka wynosi 0, jako całka z funkcji zerowej. Natomiast gdy

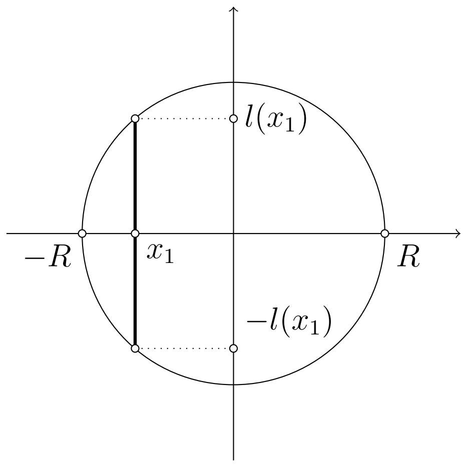
[193] Ta pierwsza równość to jedynie zmiana sposobu zapisu.

[194] Tu właśnie stosujemy pierwszą wersję tw. Fubiniego — dla funkcji mierzalnych $\geqslant 0$.

[195] Stosujemy addytywność wzgl. zbioru i fakt, że przecięcie obu przedziałów jest jednopunktowe, więc ma miarę zerową...

[196] Aby zrobić to całkiem ściśle, można np. użyć definicji całki niewłaściwej i tw. o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej — zachęcam do wypisania szczegółów ...

[197] Chodzi tu oczywiście o całkowalność względem miary λ^2 (w sensie Lebesgue'a). Jednak coraz częściej będziemy mówić tylko „całkowalna", pozostawiając resztę w domyśle. Natomiast, aby nie było nieporozumień, w przypadku całkowalności w sensie Riemanna zawsze będziemy używać pełnej nazwy.



Rysunek 31. Wyznaczanie przedziałów całkowania dla całki iterowanej przy obliczaniu pola powierzchni koła.

$|x_1| < R$, to funkcja pod wewnętrzną całką równa jest 1 wtw $|x_2| < l(x_1) := \sqrt{R^2 - x_1^2}$. W efekcie mamy (stosujemy addytywność całki względem zbioru)

$$\lambda^2(K_R) = 0 + \int_{(-R;R)} \left(\int_{(-l(x_1);l(x_1))} 1 dx_2 \right) dx_1 = \int_{(-R;R)} \lambda^1\Big((-l(x_1); l(x_1))\Big) d_{x_1} =$$
$$= \int_{(-R;R)} 2\sqrt{R^2 - x_1^2} dx_1.$$

Jak poradzić sobie z tą ostatnią całką Lebesgue'a? Gdybyśmy całkowali funkcję określoną na przedziale domkniętym, a nie otwartym, nie byłoby problemu, bo na mocy twierdzenia X.4 sprawa sprowadzałaby się do policzenia całki Riemanna (równej całce oznaczonej). Szczęśliwie miara λ^1 zbiorów jednopunktowych jest zerowa, zatem ta całka jest równa całce po $[-R; R]$. A zatem

$$\lambda^2(K_R) = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - t^2} dt \;=\; 2\int_{-R}^{R} R\sqrt{1 - \left(\frac{t}{R}\right)^2} dt = {}^{198)}$$
$$2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(u)} \cos(u) du \;=\; 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du$$

Do całki $I := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u$ zastosujemy całkowanie przez części:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin'(u) \cos(u) du = 0 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)(-\sin(u)) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) du$$

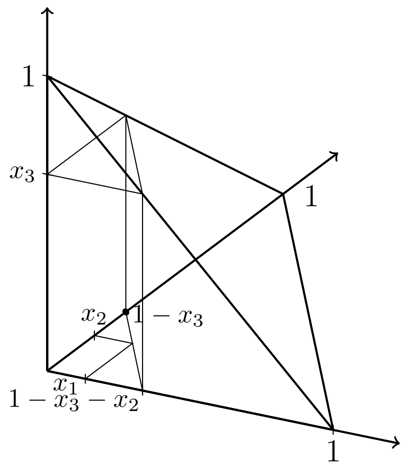
A zatem $2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 = \pi$, czyli $I = \frac{\pi}{2}$. Ostatecznie więc pole powierzchni K_R wynosi πR^2, co (miejmy nadzieję) nikogo z Państwa nie zaskoczyło ...

Zauważmy jeszcze, że w tych wyliczeniach wybór „kolejności całkowania" (tzn. podziału zmiennych na pierwszą i drugą grupę) nie miał żadnego znaczenia dla samych rachunków, ze względu na symetrię rozważanego zbioru (podobnie było w przykładzie poprzednim).

⋄ Objętość czworościanu

Obliczymy $\int_C x_3 d\lambda^3$, gdzie C jest czworościanem w $\mathbb{R}^3$ o wierzchołkach $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$, a ściślej $C = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \text{ oraz } x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1\}$.

198) Podstawiamy „$t = R\sin(u)$".



Rysunek 32. Wyznaczanie przedziałów całkowania dla całki iterowanej przy obliczaniu objętości czworościanu.

Całkowana funkcja jest więc mierzalna i nieujemna — możemy zatem postępować podobnie jak w przypadku 2, tyle że w trzech wymiarach zamiast w dwóch. Skrócimy zatem tym razem rozumowanie, pomijając niektóre szczegóły i pamiętając, że najważniejsze jest wyznaczenie faktycznego zakresu całkowania przy całkach iterowanych uzyskanych po zastosowaniu tw. Fubiniego. Tzn. musimy zastąpić całki po całym $\mathbb{R}$ całkami po odpowiednich zbiorach związanych z geometrią wyjściowego zbioru C, na którym zadana jest nasza funkcja. Ustalmy, że stosując twierdzenie Fubiniego dwukrotnie, kolejność całkowania (licząc od najbardziej wewnętrznego) w całkach iterowanych będzie taka: x_1, x_2, x_3. Ustalając zmienną najbardziej zewnętrzną, tzn. x_3 widzimy, że wystarczy ją rozważać w przedziale $[0;1]$. Ponadto, gdy $x_3 \in [0;1]$, współrzędna x_2 punktu $x \in C$ musi spełniać $x_2 \in [0; 1-x_3]$, gdyż zachodzi $x_1, x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 \leqslant 1 - x_3$. A gdy ustalimy x_2 w tym przedziale, to zachodzi $x_1 \in [0; 1-x_3-x_2]$ (patrz rysunek 32).

W efekcie mamy:

$$\int_C x_3 d\lambda^3 = \int_C x_3 dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_3} \left(\int_0^{1-x_3-x_2} x_3 dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_3} x_3(1-x_3-x_2) dx_2 \right) dx_3 = \int_0^1 x_3 \left((1-x_3)^2 - \frac{1}{2}(1-x_3)^2 \right) dx_3 =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x_3 (1-x_3)^2 dx_3 = \frac{1}{2} \int_0^1 (t^3 - 2t^2 + t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{24}.$$

◇ Miara wykresu

Na zakończenie tego podrozdziału pokażemy pewne wygodne zastosowanie twierdzenia Fubiniego związane ze zbiorami miary zero. Wykażemy mianowicie, że podzbiór $\mathbb{R}^{d+1}$, który jest wykresem funkcji mierzalnej określonej na podzbiorze $\mathbb{R}^d$ ma miarę λ^{d+1} równą zero. By wygodniej było sobie wyobrazić odpowiednią sytuację najlepiej rozważyć $d = 1$ (wykres funkcji jednej zmiennej jako podzbiór $\mathbb{R}^2$) lub $d = 2$ (wykres funkcji dwóch zmiennych jako podzbiór $\mathbb{R}^3$). Ogólnie, dla $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^d$, wykres f to zbiór

$$\Gamma_f := \{(x_1, \ldots, x_d, f(x_1, \ldots, x_d)) \in \mathbb{R}^{d+1} : (x_1, \ldots, x_d) \in D\}.$$

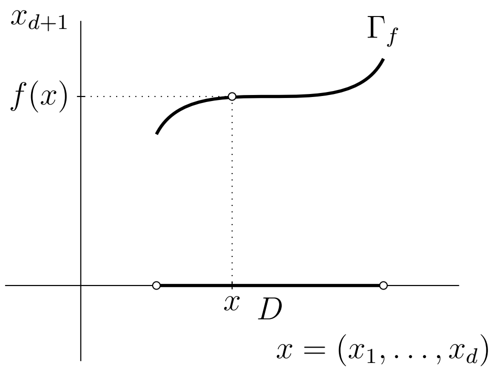
Fakt. *Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną, to $\lambda^{d+1}(\Gamma_f) = 0$.*

Dowód.
Zauważmy na początek, że Γ_f jest mierzalny. Niech bowiem $F : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $F(x_1, \ldots, x_{d+1}) = f(x_1, \ldots, x_d) - x_{d+1}$. Można wykazać — choć nie jest to wcale aż tak bardzo oczywiste [199] — że F jest mierzalna. Ponieważ zachodzi

$$\Gamma_f = F^{-1}(\{0\}),$$

zatem $\Gamma_f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d+1})$. Użyjemy twierdzenia Fubiniego dzieląc zmienne $x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}$ na dwie grupy: $x_1, \ldots, x_d$ oraz x_{d+1} (dla zmiennej z $\mathbb{R}^d$ związanej z pierwszą grupą użyjemy oznaczenia x):

$$\lambda^{d+1}(\Gamma_f) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \chi_{\Gamma_f} d\lambda^{d+1} = \int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}} \chi_{\Gamma_f}(x, x_{d+1}) dx_{d+1}) dx$$



Rysunek 33. Użycie twierdzenia Fubiniego przy obliczaniu całki po zbiorze będącym wykresem funkcji.

Zauważmy, że dla ustalonego $x \in \mathbb{R}^d$ funkcja χ_{Γ_f} ma w punkcie (x, x_{d+1}) wartość różną od zera (mianowicie 1) wtw $(x, x_{d+1}) \in \Gamma_f$ wtw $x \in D$ oraz $x_{d+1} = f(x)$ — patrz rys. 33. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\lambda^{d+1}(\Gamma_f) &= \int_D (\int_{\{f(x)\}} 1 dx_{d+1}) dx \\ &= \int_D \lambda^1(\{f(x)\}) dx = \int_D 0 dx = 0.\end{aligned}$$

□

4. Całkowanie przez podstawienie. Współrzędne biegunowe i sferyczne.

Przedstawimy tu twierdzenie pozwalające na tzw. „zamianę zmiennych" w całce względem miary Lebesgue'a λ^d. Będzie to nieco podobne do zamian zmiennych (podstawiania) związanych z całkami oznaczonymi (a przy $d = 1$, w typowych sytuacjach, będzie to niemal identyczne). Stosowanie tego twierdzenia często znacznie upraszcza rachunki towarzyszące całkowaniu w wielu wymiarach.

◇ Zamiana zmiennych „pod" wielowymiarową całką Lebesgue'a

Niech U będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$ oraz niech $\Phi : U \to \mathbb{R}^d$ będzie funkcją różniczkowalną (może lepiej użyć tu słowa „przekształcenie" zamiast „funkcja", bowiem Φ ma opisywać

[199] Patrz zadanie 37.

właśnie ową „zamianę zmiennych”). Przypomnijmy, że w takiej sytuacji w każdym punkcie x zbioru U określony jest jakobian $J\Phi(x)$ funkcji Φ, będący wyznacznikiem różniczki $D\Phi(x)$. Pełni on rolę podobną do pochodnej funkcji wewnętrznej (zamiany zmiennych) pojawiającej się we wzorze na całkowanie przez podstawienie dla całki oznaczonej

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx. \tag{X.11}$$

Twierdzenie X.7 (o całkowaniu przez podstawienie). *Niech Φ będzie dyfeomorfizmem ze zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^d$ w $\mathbb{R}^d$ i niech $A \subset U$ oraz $f : \Phi(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ niech będzie funkcją mierzalną nieujemną lub funkcją całkowalną. Określmy $f_\Phi : A \to \overline{\mathbb{R}}$ wzorem*

$$f_\Phi(x) = f(\Phi(x)) \cdot |J\Phi(x)|, \quad \text{dla } x \in A.$$

Wówczas f_Φ jest mierzalna, a w przypadku całkowalności f — funkcja f_Φ jest całkowalna i w obu przypadkach

$$\int_A f_\Phi d\lambda^d = \int_{\Phi(A)} f d\lambda^d.$$

B.D.

$$\begin{tikzcd}
 & & \overline{\mathbb{R}} \\
A \arrow[rr, "\Phi"'] \arrow[urr, bend left, "f_\Phi := (f \circ \Phi) \cdot |J\Phi|"] & & \Phi(A) \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Rysunek 34. Całkowanie f po $\Phi(A)$ daje to samo co całkowanie f_Φ po A.

Podobnie jak w przypadku twierdzenia Fubiniego, tezę powyższą można zapisać w nieco bardziej tradycyjnej formie:

$$\int_A f(\Phi(x)) \cdot |J\Phi(x)|dx = \int_{\Phi(A)} f(x)dx. \tag{X.12}$$

◇ Porównanie z zamianą zmiennych dla całki oznaczonej

Przyjrzyjmy się przypadkowi $d = 1$. Wówczas $J\Phi(x)$ to po prostu pochodna Φ w punkcie x. Dziwić więc może, że we wzorze (X.12) na całkowanie przez podstawienie jakobian $J\Phi(x)$ pojawia się w module, podczas gdy modułu tego nie było przy $g'(x)$ we wzorze (X.11) dla całki oznaczonej. Wyjaśnienie tego problemu tkwi w notacji „$\int_a^b$”, która nie zawsze oznacza to samo co „$\int_{[a;b]}$”. Nawet założenie $a \leqslant b$, nie gwarantuje że $g(a) \leqslant g(b)$. Gdy g jest malejąca, to $g'(x) \leqslant 0$ i jednocześnie $g(a) \geqslant g(b)$. Stąd, przy założeniu, że po obu stronach mamy pod całką funkcje ciągłe, po przemnożeniu przez -1 wzór będzie miał następującą postać z użyciem zapisu dla całek Riemanna (czyli w zapisie: „po zbiorach” zamiast całek oznaczonych „od... do...”):

$$\int_{[a;b]} f(g(x))|g'(x)|dx = \int_{g([a;b]} f(x)dx,$$

czyli tak jak w (X.12).

Warto także zauważyć, że w twierdzeniu X.7 zakładamy, że Φ jest dyfeomorfizmem. W szczególności Φ jest różnowartościowa. Natomiast wzór dla całki oznaczonej działał także bez założenia o różnowartościowości g.

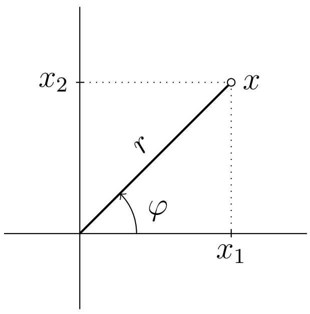
$\diamond$ Jak tego używać?

Najczęściej stosujemy twierdzenie X.7 w ten sposób, że dla danej funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ próbujemy przedstawić D w postaci $\Phi(A)$ dla tak dobranego Φ i A, że lewa strona wzoru (X.12) jest możliwa do wyliczenia w praktyce (zazwyczaj, już wtedy, poprzez użycie twierdzenia Fubiniego). Często bywa tak, że udaje się uzyskać jedynie $D =$ „ prawie $\Phi(A)$”, tzn. $\lambda^d(D \setminus \Phi(A)) = 0$, ale to w zupełności wystarcza, bo całka po zbiorze miary zerowej równa jest zero.

Opiszemy teraz dwa najczęściej chyba stosowane podstawienia — jedno dla $d = 2$, drugie dla $d = 3$.

$\diamond$ Współrzędne biegunowe w $\mathbb{R}^2$

Pomysł polega tu na tym, by punkt $x \in \mathbb{R}^2$ opisywać nie za pomocą jego współrzędnych kartezjańskich $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ale za pomocą tzw. *współrzędnych biegunowych*, tzn. kąta pomiędzy osią poziomą a wektorem x, oznaczonego tu jako φ oraz długości wektora x, oznaczanej tu przez r.



Rysunek 35. Geometryczny sens współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie.

Zachodzi zatem

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

przy czym $\varphi \in (0; 2\pi]$, $r \geqslant 0$ (patrz rys. 35). Jednak ponieważ w twierdzeniu X.7 musimy mieć zbiór otwarty U i dyfeomorfizm Φ, zatem musimy zakres rozważanych φ i r nieco ograniczyć. Definiujemy mianowicie przekształcenie $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$, gdzie $U = (0; 2\pi) \times (0; +\infty)$, zadane wzorem

$$\Phi(\varphi, r) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Łatwo wykazać, że Φ jest dyfeomorfizmem na swój obraz $V := \mathbb{R}^2 \setminus Z$ [200], gdzie $Z = [0; +\infty) \times \{0\}$, zatem $\lambda^2(Z) = 0$. Zatem $\mathbb{R}^2 =$„prawie $\Phi(U)$”... Policzmy jeszcze jakobian. Mamy

$$J\Phi(\varphi, r) = \det\begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} = -r\sin^2 - r\cos^2 = -r,$$

a stąd $|J\Phi(\varphi, r)| = r$ dla dowolnych $(\varphi, r) \in U$.

$\diamond$ Powierzchnia koła ponownie

Obliczmy ponownie pole powierzchni koła o promieniu $R > 0$ (patrz przykład 2 ze strony 32). Koło $K_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < R\}$ jest postaci $\Phi(A)$ „z dokładnością do zbioru miary zero” dla

[200] Najlepiej znaleźć wzór na Φ^{-1}, co nie jest trudne.

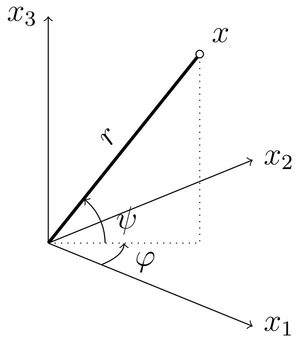
$A = (0; 2\pi) \times (0; R)$ (tzn. $K_R \setminus Z = \Phi(A)$). A zatem na mocy twierdzenia X.7, a następnie twierdzenia X.6 mamy:

$$\lambda^2(K_R) = \lambda^2(K_R \setminus Z) = \int_{K_R \setminus Z} 1dx = \int_{\Phi(A)} 1dx = \int_A 1 \cdot r d(\varphi, r) \ ^{201)} =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r dr \right) d\varphi = \int_0^R r dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 dy = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\pi = \pi R^2.$$

A zatem rachunki okazały się tu dużo prostsze niż przy bezpośrednim stosowaniu twierdzenia Fubiniego.

◇ Współrzędne sferyczne w $\mathbb{R}^3$

Sens geometryczny tych współrzędnych jest dość podobny do sensu zmiennych biegunowych, z tym, że użyty jest jeszcze jeden kąt, a sam pomysł jest dość dobrze znany z geografii. Spotkać się można nawet z określeniem „współrzędne geograficzne", odnoszacym się do omawianego podstawienia. Tu bowiem punkt x z $\mathbb{R}^3$ opisany jest przy pomocy „długości geograficznej" φ i „szerokości geograficznej" ψ wyrażonych w odpowiednich kątach, oraz przy pomocy długości r wektora x (patrz rys. 36). Tym razem rozważamy $\varphi \in (-\pi; \pi]$, $\psi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ oraz $r \geqslant 0$. Dla



Rysunek 36. Współrzędne sferyczne φ i ψ są blisko związane z długością i szerokością geograficzną.

celów twierdzenia X.7 określamy zatem $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$, gdzie $U := (-\pi; \pi) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \times (0; +\infty)$ oraz

$$\Phi(\varphi, \psi, r) = (r \cos\psi \cdot \cos\varphi, r \cos\psi \cdot \sin\varphi, r \sin\psi).$$

Tym razem Φ jest też dyfeomorfizmem na swój obraz $V := \mathbb{R}^3 \setminus Z$, gdzie Z ma miarę λ^3 zerową, przy czym $Z = (-\infty; 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Jak nietrudno wyliczyć (zad. 38), jakobian zadaje się tym razem wzorem

$$J\Phi(\varphi, \psi, r) = r^2 \cos\psi = |J\Phi(\varphi, \psi, r)|$$

bo dla $(\varphi, \psi, r) \in U \quad \cos\psi > 0$, gdyż $\psi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

◇ Objętość kuli

Obliczymy objętość kuli o promieniu $R > 0$, tzn. miarę zbioru $V_R := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < R\}$. Postępując podobnie jak w przykładzie poprzednim otrzymujemy $\lambda^3(V_R) = \lambda^3(\Phi(A))$ dla

201) Dla zmiennych kartezjańskich x_1, x_2 oznaczaliśmy „zmienną całkowania" jedną literą po prostu jako x — stąd „pod" całką było dx. Trudniej jednak jedną literą oznaczyć parę zmiennych oznaczanych jako φ, r... Oczywiście możnaby się tu umówić na jakieś jednoliterowe oznaczenie, ale chyba prościej pozostać przy $d(\varphi, r)$.

$A = (-\pi; \pi) \times (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \times (0; R)$, skąd

$$\lambda^3(V_R) = \int_{\Phi(A)} 1dx = \int_A 1 \cdot r^2 \cos\psi d\,(\varphi, \psi, r) = \int_{-\pi}^{\pi} (\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^R r^2 \cos\psi dr) d\psi) d\varphi =$$
$$= \int_0^R r^2 dr \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\,\psi \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\varphi = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Zadania do Rozdziału X

$\forall$ 1. Znajdź wszystkie:

   (a) σ–ciała podzbiorów X, gdy $X =$
   (i) $\{1, 2\}$, (ii) $\{1, 2, 3\}$;

   (b) elementy σ–ciała generowanego przez $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ dla $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

$\forall$ 2. Wykaż, że przecięcie dowolnej rodziny σ–ciał podzbiorów zbioru X jest też σ–ciałem (podzbiorów X). Znajdź przykład pokazujący, że analog powyższego dla sumy nie jest prawdziwy.

3. σ–ciało $\mathfrak{M}$ podzbiorów X nazywamy *cegiełkowym* wtw istnieje rodzina $\{A_i\}_{i\in I}$ podzbiorów X taka, że I jest skończony lub przeliczalny, A_i są parami rozłączne, $\bigcup_{i\in I} A_i = X$ oraz $\mathfrak{M} = \sigma(\{A_i\}_{i\in I})$ [202)] . Rodzina $\{A_i\}_{i\in I}$ nazywa się wówczas zbiorem (rodziną) *cegiełek* dla $\mathfrak{M}$ (a każdy A_i jest *cegiełką*).

   $\forall$ (a) Wykaż, że jeśli $\{A_i\}_{i\in I}$ jest zbiorem cegiełek dla $\mathfrak{M}$, to
   $$\mathfrak{M} = \{\bigcup_{i\in I'} A_i : I' \subset I\}.$$

   (b) Wykaż, że zbiór cegiełek σ–ciała cegiełkowego jest jednoznacznie wyznaczony.

   (c) Wykaż, że jeśli X jest zbiorem skończonym, to każde σ–ciało jego podzbiorów jest cegiełkowe (w szczególności zatem, moc każdego takiego σ–ciała równa jest 2^k dla pewnego $k \leqslant n$, gdzie n jest liczbą elementów w X).

   (d) Oblicz liczbę wszystkich σ–ciał podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ (może być dla $n = 10$).

   (e) Wykaż, że $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ nie jest σ–ciałem cegiełkowym.

4. Niech $X \cap Y = \emptyset$ i niech $\mathcal{A} \subset 2^x$, $\mathcal{B} \subset 2^Y$ oraz niech $Z = X \cup Y$. Wykaż, że $\sigma_Z(\sigma_X(\mathcal{A}) \cup \sigma_Y(\mathcal{B})) = \sigma_Z(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, gdzie $\sigma_W(\cdot)$ oznacza odpowiednie σ–ciało podzbiorów zbioru W, przy $W = X, Y, Z$.

$\forall$ 5. Udowodnij wniosek ze strony 175.

6. Rozważamy następujące rodziny podzbiorów $\mathbb{R}$:

   - $\mathcal{A}_1 = \{(a; b) : a, b \in \mathbb{R}\}$,
   - $\mathcal{A}_2 = \{[a; b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
   - $\mathcal{A}_3 = \{(-\infty; a] : a \in \mathbb{R}\}$,
   - $\mathcal{A}_4 = \{(a; +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$,
   - $\mathcal{A}_5 = \{(a; b] : a, b \in \mathbb{Q}\}$,
   - $\mathcal{A}_6 = \{U \subset \mathbb{R} : U$ — otwarty$\}$,
   - $\mathcal{A}_7 = \{K \subset \mathbb{R} : K$ — zwarty$\}$.

   Wykaż, że:

   $\forall$ (a) $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$,

   $\forall$ (b) $\sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3)$,

---

[202)] Czyli krócej: $\mathfrak{m}$ jest generowane przez pewne co najwyżej przeliczalne rozbicie zbioru X.

(c) $\sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_4)$,

$\forall$ (d) $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_5)$,

(e) $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_6)$, $(= \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ z definicji),

(f) $\sigma(\mathcal{A}_6) = \sigma(\mathcal{A}_7)$.

7. (a) Wykaż, że dla dowolnego $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ zachodzi $\mathbb{R}^k \times A \times \mathbb{R}^l \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k+1+l})$ (ew. tylko przypadek $k = 0, l = 1$);

   (b) Wykaż analogiczny wynik jak w a) dla $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ oraz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{k+1+l})$.

   Wskazówka do a): wykaż najpierw, że rodzina $\{A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{R}^k \times A \times \mathbb{R}^l \in B(\mathbb{R}^{k+l+1})\}$ jest σ–ciałem podzbiorów $\mathbb{R}$.

8. Wykaż, że jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są rodzinami generatorów dla $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, to $\{A \times B \subset \mathbb{R}^2 : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ jest rodziną generatorów dla $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$.

9. Korzystając z zadania 6 i 8 wykaż, że rodzina $\{[a;b] \times [c;d] : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ jest rodziną generatorów dla $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$.

$\forall$ 10. Wykaż, że są miarami:

   (a) δ_{x_0} z przykładu 2 strona 178;

   (b) # z przykładu 3 strona 178;

   (c) $\mu : \mathfrak{M} \to [0; +\infty]$ zadana na σ–ciele $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ podzbiorów zbioru $\{1,2,3\}$ w sposób następujący: $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{1\}) = a$, $\mu(\{2,3\}) = b$, $\mu(\{1,2,3\}) = a + b$, gdzie a, b są dowolnymi elementami z $[0; +\infty]$.

$\forall$ 11. Opisz wszystkie miary określone na σ–ciele cegiełkowym (patrz zadanie 3).

$\forall$ 12. Wykaż ogólne własności miary z faktu ze strony 177.

$\forall$ 13. Czy to prawda, że miara μ określona na σ–ciele generowanym przez rodzinę $\mathcal{A}$ jest jednoznacznie wyznaczona przez swe wartości na wszystkich generatorach?

$\forall$ 14. Czy powyżej zmieniłoby coś ograniczenie się do miar spełniających warunek $\mu(X) = 1$ (czyli *probabilistycznych*)?

   Wskazówka: rozważ miary określone na σ–ciele z zadania 1 b).

$\forall$ 15. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ–ciałem podzbiorów X oraz $X' \in \mathfrak{M}$ i niech μ będzie miarą określoną na $\mathfrak{M}$. Wykaż, że $\mathfrak{M}' := \{A \in \mathfrak{M} : A \subset X'\}$ jest σ–ciałem podzbiorów X', oraz że $\mu' : \mathfrak{M}' \to [0; +\infty]$ zadana jako $\mu' = \mu|_{\mathfrak{M}'}$ jest miarą (w X').

$\forall$ 16. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ–ciałem podzbiorów X, μ — miarą na $\mathfrak{M}$, Y niech będzie dowolnym zbiorem oraz niech $f : X \to Y$. Określamy $\mathfrak{M}_f := \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}\}$ oraz $\mu_f : \mathfrak{M}_f \to [0; +\infty]$ zadajemy wzorem

$$\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A)) \text{ dla } A \in \mathfrak{M}_f.$$

   Wykaż, że $\mathfrak{M}_f$ jest σ–ciałem podzbiorów Y, f — funkcją $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_f$–mierzalną oraz μ_f — miarą w Y.

17. Wykaż, że suma (a także kombinacja liniowa z nieujemnymi współczynnikami) miar określonych na $\mathfrak{M}$ jest miarą.

$\forall$ 18. Czy poniższe własnosci są prawdziwe dla wszystkich miar $\mu : \mathfrak{M} \to [0; +\infty]$?

(a) Jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (A_n \in \mathfrak{M}$ oraz $A_{n+1} \subset A_n)$, to $\mu(\bigcap_{n\in N} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

(b) Jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (A_n \in \mathfrak{M}$ oraz $A_n \subset A_{n+1})$, to $\mu(\bigcup_{n\in N} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$

Czy sytuacja zmieni się, gdy założymy dodatkowo, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \mu(A_n) < +\infty$?

19. Niech μ będzie miarą określoną na σ–ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów X. Definiujemy $\mathcal{Z} := \{Z \subset X : \exists_{B\in\mathfrak{M}}\ (\mu(B) = 0 \text{ i } Z \subset B)\}$ oraz $\mathfrak{M}_u := \sigma(\mathfrak{M} \cup \mathcal{Z})$ (tzw. *σ-ciało uzupełnione względem μ*).

(a) Wykaż, że σ–ciało $\mathfrak{M}_u$ ma postać

$$\mathfrak{M}_u = \{A \cup Z \subset X : A \in \mathfrak{M} \text{ oraz } Z \in \mathcal{Z}\}$$

(b) Definiujemy $\mu_u : \mathfrak{M}_u \to [0; +\infty]$ wzorem

$$\mu_u(A \cup Z) = \mu(A)$$

dla dowolnych $A \in \mathfrak{M}$, oraz $Z \in \mathcal{Z}$. Wykaż, że definicja ta jest poprawna, tzn. że nie zależy od wyboru A i Z jak wyżej, ale jedynie od $A \cup Z$.

(c) Wykaż, że zdefiniowana wyżej funkcja μ_u jest miarą zupełną, oraz że $\mu_u|_{\mathfrak{M}} = \mu$.

$\forall$

20. W przedziale $[0; 1]$ rozważamy relację $\sim$ zdefiniowaną następująco: $x \sim y$ wtw $x - y \in \mathbb{Q}$.

(a) Wykaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.

(b) Niech $K = \{[x] : x \in [0; 1]\}$ — zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ i niech $w : K \to [0; 1]$ będzie pewną „funkcją wyboru” dla zbioru K, tzn. dla dowolnej klasy $k \in K$ $w(k) \in k$ (inaczej mówiąc „w wybiera z każdej klasy abstrakcji po jednym jej elemencie” — korzystamy tu z pewnika wyboru, by mieć gwarancję, że taka w istnieje). Wykaż, że $A_w := \{w(k) : k \in K\}$ nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a (w szczególności $A_w \notin \mathfrak{B}(\mathbb{R})$). Uwaga: ta konstrukcja pochodzi od G. Vitalego, a zbiór A_w nazywany bywa *zbiorem Vitalego.*

21. Określamy pewien ciąg przedziałów otwartych zawartych w $[0; 1]$ w sposób następujący (rekurencyjnie). W pierwszym kroku określamy jeden przedział o środku $\frac{1}{2}$ i długości $r_1 \in (0; 1)$. W $n + 1$–szym kroku rozważamy najpierw wszystkie przedziały domknięte, których rozłączną sumę stanowi różnica przedziału $[0; 1]$ i sumy wszystkich przedziałów otwartych uzyskanych w krokach $1, \ldots, n$. Następnie tworzymy przedziały otwarte biorąc jako ich środki wszystkie środki powyższych przedziałów domkniętych oraz wybierając wspólną długość r_{n+1}, tak by tworzone przedziały zawierały się w tych przedziałach domkniętych. Niech $\mathcal{C}$ będzie uzupełnieniem w $[0; 1]$ sumy wszystkich uzyskanych tak przedziałów. Gdy $r_n = \frac{1}{3^n}$, to uzyskujemy tzw. *zbiór Cantora.*

$\forall$ (a) Wykaż, że zbiór Cantora jest nieprzeliczalnym zbiorem (i nieskończonym) o mierze Lebesgue'a zerowej.

(b) Czy można tak dobrać ciąg $\{r_n\}_{n\geqslant 1}$, by uzyskać $\lambda^1(\mathcal{C}) > 0$?

$\forall$ 22. Znajdź przykład funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ niemierzalnej

(a) przy dowolnie przez siebie wybranym X i σ–ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów X;

(b) dla $X = \mathbb{R}$ i $\mathfrak{M} = \mathcal{L}(\mathbb{R})$ (Wskazówka: użyj zadania 20).

23. Wykaż, że funkcja $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna (przy zadanym σ–ciele $\mathfrak{M}$ w X, $D \subset X$) wtw $\forall_{r\in\mathbb{R}}\ \{x \in D : f(x) < r\} \in \mathfrak{M}$ oraz $D \in \mathfrak{M}$.

$\forall$ 24. Wykaż fakt ze strony 183 o mierzalności punktowej granicy ciągu funkcji mierzalnych.

25. Wykaż, że fakt ze strony 182 (o działaniach na funkcjach mierzalnych) można rozszerzyć na funkcje mierzalna o wartościach w $\overline{\mathbb{R}}$, pod warunkiem określoności działań.

26. Niech μ będzie miarą określoną na σ–ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów X. Określimy tzw. zbieżność *μ–prawie wszędzie* ciągu funkcyjnego $\{f_n\}_{n\geqslant n_0}$ o wyrazach $f_n : D \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $D \subset X$, do funkcji $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$; będziemy to oznaczać symbolem $f_n \underset{\text{p.w.}}{\longrightarrow} f$. Mianowicie $f_n \underset{\text{p.w.}}{\longrightarrow} f$ wtw $\exists_{\substack{Z\in\mathfrak{M}\\ \mu(Z)=0}}\ f_n|_{D\setminus Z} \longrightarrow f|_{D\setminus Z}$.

(a) Czy granica przy takiej zbieżności jest funkcją wyznaczoną jednoznacznie?

(b) Wykaż, że jeśli μ jest miarą zupełną, $f_n \underset{\text{p.w.}}{\longrightarrow} f$ oraz f_n są wszystkie mierzalne, to f też jest mierzalna.

(c) Wyjaśnij dlaczego założenie zupełności jest istotne w b), nawet przy założeniu, że $D \in \mathfrak{M}$.

$\forall$ 27. Wykaż, że jeśli f jest mierzalną funkcją, to f^+ i f^- także są mierzalne.

28. Wykaż, że każda funkcja mierzalna jest granicą punktową ciągu funkcji prostych. Wykaż, że ciąg ten można wybrać rosnącym, jeśli wyjściowa funkcja jest $\geqslant 0$.

$\forall$ 29. Wykaż informacje o całkowaniu względem miary Diraca δ_{x_0} zawarte w przykładzie 2. ze strony 185.

30. Wykaż informacje o całkowaniu względem miary liczącej $\#$ w $\mathbb{N}$ zawarte w przykładzie 3 ze strony 185.

$\forall$ 31. Wykaż, że jeśli $f \in L^1(D,\mu)$, to $|\int_D f d\mu| \leqslant \int_D |f| d\mu$.

32. Rozwiąż zadanie 17 wykorzystując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności majoryzowalnej (tw. X.3 (L)).

$\forall$ 33. Wykaż, że jeżeli $f \in L^1(D,\mu)$, $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ ($A_{n+1} \supset A_n$ i A_n jest mierzalny), oraz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = D$, to

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f d\mu = \int_D f d\mu.$$

34. Wykaż twierdzenie X.5 (o związku całki niewłaściwej z całką względem λ^1).

$\forall$ 35. Wykaż, ża całka Lebesgue'a dla funkcji f z przykładu 2. ze strony 190 jest nieokreślona.

$\forall$ 36. Znajdź przykład pokazujący, że w twierdzeniu Fubiniego (tw. X.6) funkcja $\mathcal{C}_2 f$ może nie być określona na całym zbiorze $\mathbb{R}^{d_1}$.

37. Wykaż mierzalność funkcji F z dowodu faktu ze strony 195. Wskazówka: użyj wyniku z zadania X.8 b).

38. Sprawdź wzór na jakobian „dla współrzędnych sferycznych” ze strony 199.

39. Oblicz:

$\forall$ (a) $\int_{[0;1]\times[0;2]} e^{x_1+x_2}dx$

(b) $\int_{[0;1]\times[1;\sqrt{3}]} \frac{x_1^2}{1+x_2^2}dx$

$\forall$ (c) $\int_{[-1;1]\times[0;1]}(x_1+x_2)^{2222}dx$

(d) $\int_{[1;2]\times[3;4]} \ln(x_1x_2)\cdot x_2dx$

$\forall$ (e) $\lambda^2(T)$, gdzie T — trójkąt „pełny” na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ o wierzchołkach 0; $(a,0)$; (c,h), gdzie $a,h,c>0$,

(f) $\lambda^2(A)$, gdzie $A=\{x\in\mathbb{R}^2 : x_1\geqslant 0, x_1^2\leqslant x_2\leqslant\sqrt{x_1}\}$,

$\forall$ (g) $\int_R x_1dx$, gdzie R — równoległobok „pełny” na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ o wierzchołkach 0; $(2,1)$; $(1,1)$; $(3,2)$. Wskazówka: użyj całkowania przez (odpowiednie) podstawienie (równoległobok jest afinicznym obrazem kwadratu $[0;1]\times[0;1]\ldots$),

(h) jak powyżej, ale dla wierzchołków: $(2,2)$; $(4,3)$, $(3,3)$, $(5,4)$,

(i) $\int_T \cos(x_1+x_2)dx$, gdzie T—„pełen” trójkąt ograniczony prostymi o równaniach: $x_1=0$, $x_2=\pi$, $x_1=x_2$,

(j) $\int_{K(0,1)} x_1x_2dx$,

(k) $\int_{K_{+++}} x_1x_2dx$, gdzie $K_{+++}=\{x\in\mathbb{R}^3 : x_1,x_2,x_3>0, \|x\|<1\}$,

$\forall$ (l) $\int_{K_{+-}} x_3dx$, gdzie $K_{+-}=\{x\in\mathbb{R}^3 : x_1>0, x_2<0, \|x\|<1\}$,

(m) $\int_{P_{1,2}} x_1^2+x_2^2dx$, gdzie $P_{1,2}$ — pierścień kołowy („pełny”) na płaszczyźnie, o środku 0 i promieniu 1 (wewnętrznym) oraz 2 (zewnętrznym),

$\forall$ (n) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_W \sqrt[n]{x_1x_2}dx$, gdzie $W=\{x\in\mathbb{R}^2 : \|x\|\leqslant 1, 0\leqslant x_1<x_2\}$,

(o) $\lambda^d(T_d(a))$, gdzie $T_d(a)=\{x\in\mathbb{R}^d : \sum_{k=1}^d x_k\leqslant a, \forall_{k=1,\ldots,d}\ x_k\geqslant 0\}, a>0$. Wskazówka: użyj indukcji „po d”,

(p) objętość elipsoidy $E=\{x\in\mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}\leqslant 1\}$, $a,b,c>0$,

$\forall$ (q) Objętość walca obrotowego o wysokości h i promieniu podstawy r,

(r) $\int_W x_1dx$, gdzie $W=\{x\in\mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2\leqslant 1,\ 0\leqslant x_3\leqslant 1\}$,

$\forall$ (s) Objętość stożka obrotowego o wysokości h i promieniu podstawy r,

(t) $\int_S |x_1x_2x_3|dx$, gdzie $S=\{x\in\mathbb{R}^3 : \rho\geqslant x_3\geqslant 3\sqrt{x_1^2+x_2^2}\}$,

(u) Objętość „pełnego” torusa powstałego przez obrót koła w płaszczyźnie „x_1,x_3” o środku $(R,0,0)$ i promieniu r wokół osi x_3 $(0<r<R)$,

$\forall$ (v) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2}dx$,

$\forall$ (w) $\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\|x\|^2}dx$. Wskazówka: wykorzystaj rezultat (nie metodę …) dla przypadku $\mathbb{R}^2$ powyżej.

(x) $\int_B x_1x_2dx$, gdzie $B=\{x\in\mathbb{R}^2 : x_1,x_2\leqslant 0,\ 1\leqslant 4x_1^2+x_2^2\leqslant 4,\ x_2\leqslant 2x_1\}$,

$\forall$ (y) $\int_{D_\alpha} x_1-x_2dx$, gdzie $D_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^2 : x_1\geqslant 1, x_1-\frac{1}{x_1^\alpha}\leqslant x_2\leqslant x_1+\frac{1}{x_1^\alpha}\}$ dla $\alpha>0$. Uwaga! Czy całka ta jest określona?

40. Wyprowadź wzór z zadania 2 na objętość bryły obrotowej.

XI Równania różniczkowe zwyczajne

[około 5 wykładów]

Równania różniczkowe to, mówiąc ogólnie, równania, w których szukanym obiektem jest funkcja i w których pojawiają się jej pewne pochodne pierwszego lub wyższych rzędów (w przypadku funkcji wielu zmiennych będą to pochodne cząstkowe) i ew. też sama szukana funkcja.

Zasadniczy podział równań różniczkowych to podział na równania różniczkowe *zwyczajne*, czyli takie, które dotyczą funkcji jednej zmiennej oraz na równania różniczkowe *cząstkowe*, tzn. dotyczące funkcji wielu zmiennych i zawierające pochodne cząstkowe szukanej funkcji. Przykłady równań różniczkowych zwyczajnych, to:

$$f' = f; \quad \sin\circ(f''\circ\cos) + f\cdot f' - \exp\circ(f''\cdot f) = \cos; \quad f'' = 0; \tag{XI.1}$$

a równaniem różniczkowym cząstkowym jest np.:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + 2\frac{\partial f}{\partial x_2} = \sin\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - \cos\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}.$$

Powyższe przykłady nie są zapewne żadnymi ważnymi równaniami ani z punktu widzenia matematycznego, ani z punktu widzenia zastosowań. A trzeba wiedzieć, że właśnie zastosowania matematyki, a nie czysto matematyczne powody, są głównym motorem rozwoju i zarazem celem obu teorii równań różniczkowych.

My zajmiemy się w tym rozdziale jedynie teorią równań różniczkowych zwyczajnych i to tylko w wąskim zakresie, ale uwzględnimy jej ważną rolę dla zastosowań i zbadamy nieco problemów, które związane są z matematycznym opisem pewnych realnych zjawisk. Wśród nich najwięcej uwagi poświęcimy problemom wzrostu różnego typu populacji.

1. Równania różniczkowe rzędu pierwszego i problem istnienia rozwiązań

Będziemy się zajmować przede wszystkim równaniami różniczkowymi zwyczajnymi rzędu 1, tzn. takimi, w których pojawia się jedynie pierwsza pochodna funkcji (poza ew. jej zerową pochodną, czyli samą funkcją). Jednak rozważania nasze będą dotyczyły równań nie tylko na funkcje skalarne, ale też na funkcje o wartościach w $\mathbb{R}^m$ dla $m > 1$. Równaniami rzędów wyższych zajmiemy się także — pod koniec rozdziału. Jak zobaczymy, dadzą się one sprowadzić do równań rzędu 1. Dlatego, między innymi, równania rzędu 1 są takie istotne.

◇ Zapis równań

Zaczniemy od spraw związanych z notacją. Otóż zapis równań różniczkowych zwyczajnych ma swoją tradycję i raczej rzadko spotykamy formę użytą w przykładach (XI.1), tzn. zapis bez użycia symboli zmiennych, uwypuklający fakt, że szukanym obiektem jest funkcja. Ponadto raczej popularniejsze jest użycie liter x bądź y na oznaczenie szukanej funkcji, zamiast typowo używanych przez nas dotąd f, g itp., a z kolei zmienną najczęściej oznacza się tu przez t a nie x, w związku z jej częstą rolą w zastosowaniach — zmiennej oznaczającej czas. Często również pierwszą pochodną oznacza się przez $\dot{}$ zamiast $'$, a drugą $\ddot{}$ zamiast $''$ (głównie właśnie wtedy, gdy chodzi o różniczkowanie „po czasie"). My zastosujemy tu pewien kompromis wobec powyższych zwyczajów. Przy rozważaniach ogólnych natury „teoretycznej" będziemy najczęściej używali y na oznaczenie szukanej funkcji, choć jednocześnie litery tej używać będziemy do oznaczania zmiennej — ale oczywiście nie tej dla funkcji y lecz dla funkcji, która będzie „kodowała” rozważane przez nas równania. Zmienną dla funkcji y będzie najczęściej t, a pochodną oznaczać będziemy przez $\,'\,$, a nie przez $\dot{}$. Np. równanie $f' = \sin \cdot f$ zapiszemy jako

$$y' = \sin(t) \cdot y \quad \text{lub } y'(t) = \sin(t) \cdot y(t).$$

Ogólniej, jako

$$y' = F(t, y),$$

gdzie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest funkcją kodującą to równanie (tj. jednoznacznie to równanie wyznaczającą), np. w powyższym przykładzie zadaną wzorem

$$F(t, y) = \sin(t) \cdot y.$$

Natomiast w przykładach i zadaniach stosować będziemy już rozmaite sposoby notacji, z nadzieję, że Czytelnik poradzi sobie z przetłumaczeniem jednego zapisu na inny.

⋄ Rozwiązania równań o postaci normalnej

W tym podrozdziale rozważać będziemy głównie równania, które zapisujemy w postaci

$$y' = F(t, y), \tag{XI.2}$$

gdzie y oznacza pewną funkcję (szukaną) zmiennej rzeczywistej o wartościach w $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 1$), a F jest funkcją (— wspomnianą wyżej, kodującą to równanie) określoną w podzbiorze $D \subset \mathbb{R}^{1+m}$ i o wartościach w $\mathbb{R}^m$ Oczywiście w zapisie $F(t, y)$ zakładamy, że $t \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}^m$. A zatem (XI.2) jest pewnym skrótowym zapisem równania — a ścisły sens tego zapisu zawiera poniższa definicja, w której wyjaśniamy, co rozumiemy przez rozwiązanie powyższego równania.

Definicja. ***Rozwiązaniem*** *równania różniczkowego* (XI.2) *nazywamy każdą funkcję różniczkowalną y określoną na przedziale niezerowej długości $I \subset \mathbb{R}$, taką, że*

$$\forall_{t \in I}\ (t, y(t)) \in D \quad \textit{oraz}\ \ y'(t) = F(t, y(t)).$$

Równanie (XI.2) jest tzw. równaniem w postaci *normalnej*, tzn. „rozwikłanej” względem y'. Nie każde równanie rzędu pierwszego da się przedstawić w takiej postaci, choć rozwiązanie wielu równań sprowadza się „lokalnie” do rozwiązania równań tego typu. Zwróćmy uwagę na to, że równanie (XI.2) należy po prostu utożsamiać z funkcją F — dla tego mówimy , że koduje ona to równanie.

⋄ Problem istnienia i (nie)jednoznacznoiści

Podstawowe pytania dotyczące każdego równania różniczkowego, to pytania o istnienie i o jednoznaczność rozwiązań. W przypadku równań nie mających postaci normalnej nietrudno wskazać przykład, dla którego rozwiązań nie ma wcale, a jednocześnie postać równania zadana jest przy pomocy całkiem „regularnych” funkcji. Choćby równanie:

$$(y')^2 + (y - t)^2 = 0$$

(dlaczego?). O tego rodzaju przykład jest już trudniej, gdy ograniczymy się do równań typu (XI.2). Ale z drugiej strony, nawet najprostsze znane nam równania w postaci normalnej mają wiele różnych rozwiązań, nawet gdy rozważać będziemy jedynie rozwiązania zadane na „maksymalnych możliwych” dziedzinach I. Rozważmy bowiem równanie

$$y' = 1$$

— jak wiemy (skąd?) — wszystkie jego rozwiązania y to funkcje zadane wzorem $y(t) = t + c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ może być dowolne. Podobnie jest z równaniem

$$y' = y,$$

którego wszystkie rozwiązania $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mają postać $y(t) = c \cdot e^t$, gdzie znów $c \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą.

◇ Zagadnienie Cauchy'ego i warunek początkowy

W obu powyższych przykładach uzyskamy jednak dokładnie jedno rozwiązanie wśród rozwiązań określonych na całym $\mathbb{R}$, jeśli dodatkowo zażądamy by miało ono ustaloną wartość y_0 w ustalonym punkcie t_0. Np. jeśli $t_0 = 0$, to w pierwszym wypadku otrzymamy rozwiązanie $y(t) = t + y_0$, a w drugim $y(t) = y_0 e^t$. Okazuje się, że podobna sytuacja ma miejsce dla bardzo wielu równań postaci (XI.2), a co też bardzo istotne — takie ograniczenie problemu istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania jest bardzo często uzasadnione z punktu widzenia realnych zastosowań danych równań. Zadanie polegające na znalezieniu rozwiązań y równań (XI.2) spełniających warunek

$$y(t_0) = y_0 \tag{XI.3}$$

dla ustalonych $t_0 \in \mathbb{R}$ i $y_0 \in \mathbb{R}^m$ takich, że $(t_0, y_0) \in D$ nazywane jest *zagadnieniem Cauchy'ego* (ew. *zagadnieniem początkowym*), a sam warunek (XI.3) — *warunkiem początkowym*.

◇ Twierdzenie „lokalne" o istnieniu i jednoznaczności

Najbardziej podstawowe wyniki teorii równań różniczkowych zwyczajnych, stanowiace niejako jej punkt wyjścia, to grupa twierdzeń, których teza dotyczy istnienia i jednoznaczności rozwiązań właśnie dla zagadnienia Cauchy'ego. Noszą one wspólną nazwę „twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności". Większość z nich mówi o tzw. *lokalnym* istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego, tzn. o rozwiązaniach takich, które są określone jedynie na pewnym (być może „małym") otoczeniu punktu t_0. Najsłynniejsze z tych "lokalnych" to twierdzenie Picarda. Nie będziemy go jednak tu formułować, a jako przykład twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności, sformułujemy wynik mający charakter raczej globalny. Wcześniej wprowadzimy parę oznaczeń i pojęć, które przydadzą się nam przy jego formułowaniu.

◇ Przedłużenia i rozwiązania integralne

Mówimy, że rozwiązanie $y : I \to \mathbb{R}^m$ równania (XI.2) *przedłuża się* na przedział $\tilde{I}$ wtw $\tilde{I} \supset I$ oraz istnieje rozwiązanie $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ tego równania, także, że $\tilde{y}|_I = y$. Każde takie $\tilde{y}$ nazywamy *przedłużeniem* rozwiązania y. Takie rozwiązanie, dla którego nie istnieje przedłużenie określone na większym przedziale nosi nazwę rozwiązania *integralnego*[203)].

◇ Ciąg kolejnych przybliżeń

Załóżmy, że D ma postać $(a; b) \times \mathbb{R}^m$, gdzie $a < b$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$ oraz że $t_0 \in (a; b)$ i $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Załóżmy także, że funkcja $F : D \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła. Określmy rekurencyjnie funkcje p_n :

203) Niektórzy jednak zamiast nazwy „integralne" stosują nazwę „globalne", którą my używamy w sytuacji szczególnej — gdy dziedzina rozwiązania jest największą z tych, które w ogóle „dopuszcza" dziedzina D funkcji F z prawej strony równania w postaci normalnej. Co znaczy owo „dopuszczanie" należałoby właściwie doprecyzować, ale nie są to rozważania zanadto istotne i pominiemy je milczeniem...

$(a;b) \to \mathbb{R}^m$ dla $n \geqslant 0$ w sposób następujący:

$$p_0(t) = y_0; \quad p_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, p_n(s))ds \ ^{204)}$$

dla wszystkich $t \in (a;b)$ oraz $n \geqslant 0$. Zauważmy, że taka definicja jest poprawna (całka z prawej strony ma sens), gdyż F jest ciągła, więc przez indukcję można wykazać, że kolejne funkcje p_n są różniczkowalne, w efekcie na każdym kroku tej rekursji funkcja znajdująca się pod całką jest ciągłą funkcją „zmiennej s".

Ciąg funkcji $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ nazywa się *ciągiem kolejnych przybliżeń* dla zagadnienia Cauchy'ego z równaniem (XI.2) i warunkiem początkowym (XI.3). Funkcje p_n zostały tak skonstruowane, że dla każdego n zachodzi

$$p_n(t_0) = y_0 \quad \text{oraz} \quad p'_{n+1}(t) = F(t, p_n(t)).$$

Gdyby po lewej stronie było p_n zamiast p_{n+1} — mielibyśmy już rozwiązanie naszego zagadnienia Cauchy'ego! Tak jednak nie jest... Wydaje się natomiast, że gdyby ciąg $\{p_n\}$ był zbieżny w jakimś sensie do pewnej funkcji y, to y miałoby już szanse być szukanym rozwiązaniem.

⋄ Zbieżność ciągu funkcyjnego o wartościach w $\mathbb{R}^m$

Ciąg $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ to ciąg funkcji o wartościach wektorowych — w $\mathbb{R}^m$. Podobnie jak dla ciągów funkcji o wartościach liczbowych, także dla ciągów funkcji o wartościach w $\mathbb{R}^m$ można wprowadzić pojęcia zbieżności punktowej, jednostajnej oraz niemal jednostajnej. Każdy z tych rodzajów zbieżności dla ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ do „granicy" f oznacza po prostu odpowiednią zbieżność każdego z ciągów funkcyjnych „składowych" $\{(f_n)_k\}$ (które są już ciągami funkcyjnymi złożonymi z funkcji skalarnych) do k–tej składowej funkcji granicznej f, dla $k = 1, \ldots, m$.

⋄ Globalne twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności

Teraz możemy już sformułować zapowiadane twierdzenie.

Twierdzenie XI.1 (globalne twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności). *Niech $-\infty \leqslant a < t_0 < b \leqslant +\infty$ oraz $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Jeżeli $F : (a;b) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła, posiada w każdym punkcie pochodne cząstkowe $\partial_{y_j} F$ dla $j = 1, \ldots, m$ oraz dla dowolnego przedziału domkniętego*[205] *$K \subset (a;b)$ istnieje $C_K \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$\forall_{(t,y)\in K\times\mathbb{R}^m} \ \forall_{j=1,\ldots,m} \ \|\partial_{y_j} F(t,y)\| \leqslant C_K, \tag{XI.4}$$

to:

1. *Zagadnienie Cauchy'ego dla równania* (XI.2) *z warunkiem początkowym* (XI.3) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie y określone na przedziale $(a;b)$. Ponadto powyższe rozwiązanie y jest granicą niemal jednostajną ciągu kolejnych przybliżeń dla tego zagadnienia Cauchy'ego.*

2. *Każde rozwiązanie tego zagadnienia Cauchy'ego przedłuża się na przedział $(a;b)$.*

B.D.

Dzięki jednoznaczności, o której mowa w punkcie 1 twierdzenia, przedłużenie z punktu 2 jest oczywiście jednoznacznie wyznaczone przez t_0 i y_0 — jest nim powyższe jedyne rozwiązanie y z punktu 1.

---

204) Przypominam, że całka z funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach w $\mathbb{R}^m$ została zdefiniowana w podrozdziale 1 rozdziału IX. Co prawda chodziło tam o całkę Riemanna, a tu jest całka oznaczona, ale definicja w tej sytuacji jest analogiczna („po funkcjach składowych").

205) Patrz przypis 50) .

◇ **Zalety i wady...**

Przykłady zastosowań twierdzenia XI.1 zobaczymy w dalszych podrozdziałach, w których zajmiemy się równaniami bardziej konkretnych typów. Wcześniej jednak zwrócimy uwagę na to, że punkt 1 twierdzenia daje nam nie tylko wiedzę o istnieniu jakiegoś mglistego rozwiązania problemu. Pozwala on na konstruktywne przybliżanie rozwiązania funkcjami p_n. Ma to ogromne znaczenie dla praktycznych — numerycznych wyników, szczególnie gdy mamy do dyspozycji komputer i odpowiednią wiedzę „programistyczną” ...

Punkt 2 twierdzenia gwarantuje między innymi, że każde „lokalne” rozwiązanie przedłuża się do „globalnego” — tzn. określonego na całym $(a; b)$.

Jest to więc bardzo wygodne twierdzenie, o stosunkowo prostych założeniach. Prostych, ale niestety silnych... Jego sporym mankamentem jest to, że funkcja F, kodująca nasze równanie, musi być w tym przypadku określona na bardzo „dużym” zbiorze $(a; b) \times \mathbb{R}^m$ oraz że stała C_K musi być w warunku (XI.4) „uniwersalna” m. in. dla wszystkich $y \in \mathbb{R}^m$ (nie wystarczy się ograniczyć do y z pewnego zwartego podzbioru, tak jak to jest w przypadku t).

Przykład wskazujący na istotność tych założeń znajduje się w zadaniach (zad. 4).

2. Pewne równania rzędu 1 dla funkcji skalarnych

Omówimy tu dwa szczególne typy równań rzędu 1 w najprostszym przypadku — gdy $m = 1$, czyli w sytuacji gdy szukana funkcja y ma wartości skalarne.

◇ **Równanie o zmiennych rozdzielonych**

Nazwą z powyższego tytułu określa się równania postaci

$$y' = f(t) \cdot g(y), \tag{XI.5}$$

gdzie funkcja $f : (a; b) \to \mathbb{R}$, $g : (c; d) \to \mathbb{R}$ są obie ciągłe, $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ i $c < d$ oraz

$$\forall_{y \in (c;d)}\ g(y) \neq 0. \tag{XI.6}$$

Jest to więc szczególny przykład równania (XI.2) z $m = 1$ i funkcją F zadaną na $D = (a; b) \times (c, d)$ wzorem $F(y) = f(t) \cdot g(y)$. Ogólnie, przy takich jak powyżej założeniach o f i g, nie muszą być zatem niestety spełnione założenia twierdzenia XI.1.

◇ **Jak to rozwiązywać?**

Spróbujemy jednak rozwiązać to równanie metodami całkiem elementarnymi. Załóżmy więc najpierw, że $y : I \to \mathbb{R}$ jest pewnym rozwiązaniem równania (XI.5) spełniającym warunek początkowy (XI.3), gdzie $t_0 \in (a; b)$ oraz $y_0 \in (c; d)$. W szczególności zatem $t_0 \in I \subset (a; b)$ oraz

$$\forall_{s \in I}\ y'(s) = f(s) \cdot g(y(s))$$

Dzięki (XI.6) możemy obie strony powyższej równości podzielić przez $g(y(s))$ a następnie „scałkować” licząc dla dowolnego $t \in I$ całkę oznaczoną od t_0 do t [206]) Otrzymamy:

$$\forall_{t \in I}\ \int_{t_0}^{t} \frac{1}{g(y(s))} \cdot y'(s) ds = \int_{t_0}^{t} f(s) ds.$$

[206]) Całkowanie obu stron jest możliwe choćby dlatego, że skoro obie strony są równe a z prawej strony mamy funkcję ciągłą f, to i funkcja z lewej strony musi być ciągła (mimo, że nie zakładaliśmy, iż $y \in C^1(I)$ — to zresztą wynika z faktu, że y spełnia równanie (XI.5)).

Na mocy wzoru na całkowanie przez podstawienie (dla całek oznaczonych) mamy

$$\forall_{t\in I}\ \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(x)}dx = \int_{t_0}^{t} f(s)ds. \tag{XI.7}$$

Oznaczmy przez h funkcję określoną na (c,d) zadaną wzorem

$$h(v) = \int_{y_0}^{v} \frac{1}{g(x)}dx$$

dla $v \in (c;d)$ (h jest więc funkcją pierwotną funkcji $\frac{1}{g}$, taką, że $h(y_0) = 0$). Zauważmy, że ponieważ g jest ciągła i nie przyjmuje wartości 0, zatem ma stały znak na $(c;d)$ i tak samo jest więc z funkcją $h' = \frac{1}{g}$ (i ma ona wartości różne od zera). Funkcja h jest zatem ściśle monotoniczna i przekształca swoją dziedzinę $(c;d)$ na pewien przedział otwarty (być może nieskończonej długości). Niech więc $p,q \in \overline{\mathbb{R}}$ będą takie, że $h((c;d)) = (p;q)$. Zauważmy, że $p < 0 < q$, gdyż $h(y_0) = 0$. Dzięki ścisłej monotoniczności funkcja $h : (c;d) \to (p;q)$ jest funkcją odwracalną i $h^{-1} : (p;q) \to (c;d)$. Warunek (XI.7) można zapisać przy użyciu funkcji h:

$$\forall_{t\in I}\ h(y(t)) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

skąd

$$\forall_{t\in I}\ y(t) = h^{-1}\Big(\int_{t_0}^{t} f(s)ds\Big). \tag{XI.8}$$

Wykazaliśmy zatem, że jeżeli y jest pewnym rozwiązaniem określonym na przedziale I, to y musi być na tym przedziale zadane wzorem (XI.8). Zwróćmy uwagę na to, że prawa strona tego wzoru jest zadana jednoznacznie przez dane nam funkcje f i g oraz wartości t_0 i y_0.

⋄ Jaka dziedzina

Jednak na razie nie wiemy jeszcze prawie nic na temat tego jaki może być przedział I, poza tym, że $t_0 \in I \subset (a;b)$. Ale by zachodziło (XI.8) musiał być spełniony w szczególności warunek

$$\forall_{t\in I}\ \int_{t_0}^{t} f(s)ds \in (p;q) \tag{XI.9}$$

Znajdziemy największy możliwy przedział I zawierający t_0, który spełnia warunek (XI.9) [207]. Wyznaczymy jego lewy koniec α i prawy koniec β ($\alpha,\beta \in [a;b]$). Nietrudno zauważyć, że

$$\alpha = \begin{cases} a & \text{gdy } \forall_{t\in(a;t_0)}\ \int_{t_0}^{t} f(s)ds \in (p;q) \quad ^{208)} \\ \sup\{t \in (a;t_0) : \int_{t_0}^{t} f(s)ds \notin (p;q)\} & \text{w p.p.} \end{cases}$$

i analogicznie

$$\beta = \begin{cases} b & \text{gdy } \forall_{t\in(t_0;b)}\ \int_{t_0}^{t} f(s)ds \in (p;q) \\ \inf\{t \in (t_0;b) : \int_{t_0}^{t} f(s)ds \notin (p;q)\} & \text{w p.p..} \end{cases}$$

jednak pozostaje pytanie, czy końce α,β do szukanego przedziału I należą, czy nie. Odpowiedź brzmi: **nie**. Rozważmy bowiem α. Jeśli zachodzi pierwsza możliwość z definicji α, to $\alpha = a$ i oczywiście $a \notin I$, bo $I \subset (a;b)$. A gdy zachodzi druga możliwość, to łatwo wykazać, że $\int_{t_0}^{\alpha} f(s)ds$ jest równe p lub q, zatem $t = \alpha$ nie spełnia (XI.9), nie może więc należeć do I. Analogicznie postępujemy w przypadku β. Wykazaliśmy zatem, że $(\alpha;\beta)$ jest największym przedziałem zawierającym t_0 i spełniającym (XI.9), w szczególności dziedzina I rozwiązania f zawarta jest w (α,β).

[207] Opisana niżej konstrukcja tego przedziału jest jednocześnie dowodem istnienia największego przedziału o żądanej własności.

[208] w p.p. to skrót od „w przeciwnym przypadku”.

◇ Czy to jest rozwiązanie?

Możemy teraz przystąpić do drugiej części rozważań, a mianowicie zbadamy, czy to co opisaliśmy powyżej jest rzeczywiście rozwiązaniem (wcześniej rozstrzygnęliśmy raczej problem jednoznaczności). Określimy funkcję $y : (\alpha; \beta) \to \mathbb{R}$ wzorem (XI.8) dla dowolnego $t \in (\alpha; \beta)$. Jest to złożenie funkcji różniczkowalnych: $u : (\alpha; \beta) \to (p; q)$ zadanej wzorem $u(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$ oraz h^{-1}, przy czym h^{-1} jest różniczkowalna, gdyż h jest różniczkowalna i $h'(z) = \frac{1}{g(z)} \neq 0$). Mamy ponadto dla $t \in (\alpha, \beta)$:

$$y'(t) = \frac{1}{h'(h^{-1}(u(t)))} \cdot u'(t) = g(h^{-1}(u(t))) \cdot f(t) = g(y(t)) \cdot f(t)$$

A zatem tak określone y jest rozwiązaniem naszego równania, a przy tym $y(t_0) = h^{-1}(0) = y_0$.

◇ Co wykazaliśmy?

Tym sposobem udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie XI.2 (o równaniu „o zmiennych rozdzielonych"). *Załóżmy, że funkcje f i g spełniają poczynione wyżej założenia oraz że $t_0 \in (a; b)$, $y_0 \in (c; d)$. Wówczas:*

1. *Funkcja y zadana wzorem* (XI.8) *na przedziale $I = (\alpha; \beta)$ będącym największym spośród przedziałów zawierających t_0, które spełniają warunek* (XI.9) *jest rozwiązaniem integralnym zagadnienia Cauchye'go dla równania* (XI.5) *z warunkiem początkowym* (XI.3).

2. *Każde rozwiązanie tego zagadnienia Cauchy'ego przedłuża się do rozwiązania y z punktu 1.*

Albo nieco krócej: opisana wyżej funkcja y jest jedynym rozwiązaniem integralnym rozważanego zagadnienia Cauchy'ego i każde rozwiązanie tego zagadnienia przedłuża się jednoznacznie do rozwiązania integralnego.

Zwróćmy uwagę na fakt, że w tym twierdzeniu rozwiązanie może nie dać się przedłużyć do rozwiązania „globalnego", w rozumieniu poprzednim, tj. określonego na całym przedziale $(a; b)$ (będącym dziedziną funkcji f). Jest to główna „jakościowa" różnica odróżniająca tezę tego twierdzenia od tezy twierdzenia XI.1.

Przyjrzyjmy się teraz pewnym przykładom zastosowania uzyskanego rezultatu.

◇ Model „narodzin i śmierci" dla wzrostu populacji

Jest to najprostszy model opisujący zależność wielkości populacji od czasu (sformułowany pod koniec XVIII w przez T. R. Malthusa). Załóżmy że dla $t \in \mathbb{R}$ wielkość $y(t)$ opisuje liczebność pewnej populacji liczonej np. w tysiącach osobników w chwili t (czas liczymy np. w latach). Populacja ta charakteryzuje się stałym współczynnikiem urodzeń w_b (od ang. birth) oznaczającym liczbę urodzeń nowych osobników przypadającą na każdy tysiąc osobników w ciągu 1 roku. Podobnie jest ze współczynnikiem w_d (od ang. death) opisującym w analogiczny sposób liczbę zgonów. Idealizując nieco tę sytuację poprzez założenie, że funkcja y jest różniczkowalna (w szczególności trzeba raczej zrezygnować z założenia, że $y(t) \in \mathbb{Q}$ dla dowolnego t, co wynikało z postaci $y(t) = \frac{n}{1000}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$) oraz poprzez utożsamienie $y'(t)$ z przyrostem $y(t + 1) - y(t)$ uzyskamy następujące równanie różniczkowe opisujące przedstawione wyżej prawa, które obowiązują dla funkcji y.[209)]

$$y' = (w_b - w_d)y \tag{XI.10}$$

[209)] W zastosowaniach, równania, które opisują prędkość zmian („w czasie") pewnych obiektów, noszą na ogół nazwę *równań ewolucyjnych*.

Pomińmy trywialny przypadek, gdy $w_b = w_d$ i załóżmy, że $w_b \neq w_d$. Załóżmy, że opisywana przez nas populacja w roku t_0 liczyła y_0 tysięcy osobników, gdzie $y_0 > 0$. Możemy zatem uznać, że mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem zagadnienia Cauchy'ego dla równania (XI.5) o zmiennych rozdzielonych, w którym $(c; d) = (0; +\infty)$ (gdyż wielkość populacji powinna być dodatnia) oraz $g(y) = k \cdot y$, gdzie $k = w_b - w_d \neq 0$, a f jest funkcją stale równą 1 (bo brak zależności prawej strony równania od czasu t). Możemy też przyjąć $(a; b) = \mathbb{R}$. Mamy zatem:

$$h(v) = \int_{y_0}^{v} \frac{1}{kx} dx = \frac{1}{k} \ln(\frac{v}{y_0})$$

dla $v > 0$, skąd $(p; q) = h((0; +\infty)) = \mathbb{R}$ oraz $h^{-1} : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$ zadana jest wzorem $h^{-1}(x) = y_0 e^{kx}$. Ponieważ $(p; q) = \mathbb{R}$, zatem $(\alpha; \beta) = (a, b) = \mathbb{R}$, czyli w tym wypadku istnieje globalne rozwiązanie y naszego zagadnienia zadane dla każdego $t \in \mathbb{R}$ wzorem

$$y(t) = h^{-1}(\int_{t_0}^{t} 1 ds) = y_0 e^{k(t-t_0)} = (y_0 e^{-kt_0}) e^{kt}.$$

W przypadku, gdy współczynnik wzrostu populacji k jest dodatni mamy do czynienia z eksponencjalnym wzrostem jej liczebności, a gdy $k < 0$ wzór powyższy opisuje eksponencjalny zanik. W tej pierwszej sytuacji widać np., że podwojenie się liczebności populacji następuje każdorazowo po upływie stałego czasu równego $\frac{\ln(2)}{k}$ lat. Warto wspomnieć, że do badania tego przykładu, zamiast użytej tu metody, równie dobrze nadaje się opisywana nieco dalej metoda rozwiązywania równań liniowych jednorodnych.

Model ten (mimo przyjętych przez nas idealizacji) opisuje bardzo dobrze zjawiska populacyjne, o ile założenie dotyczącego stałości współczynników w_b i w_d są dla rozważanych populacji realistyczne, co jednak dość rzadko ma miejsce...

◇ Model „logistyczny”dla wzrostu populacji

W tym modelu modyfikuje się założenia dotyczące stałości współczynników w_b i w_d, które obowiązywały w modelu „narodzin i śmierci”. Zakłada się mianowicie, że opisywana populacja rozwija się w środowisku o ograniczonej „pojemności”, co objawia się w ten sposób, że śmiertelność liczona współczynnikiem w_d jest proporcjonalna do liczebności y. Ściślej, że współczynnik ten ma teraz postać $w_d(y) = ry$, gdzie $r > 0$ jest pewną stałą. Założenie dotyczące stałości współczynnika w_b (tu $w_b > 0$) pozostaje natomiast bez zmian. Równanie ewolucyjne opisujące liczebność populacji ma zatem w tym wypadku postać:

$$y' = (w_b - ry)y \tag{XI.11}$$

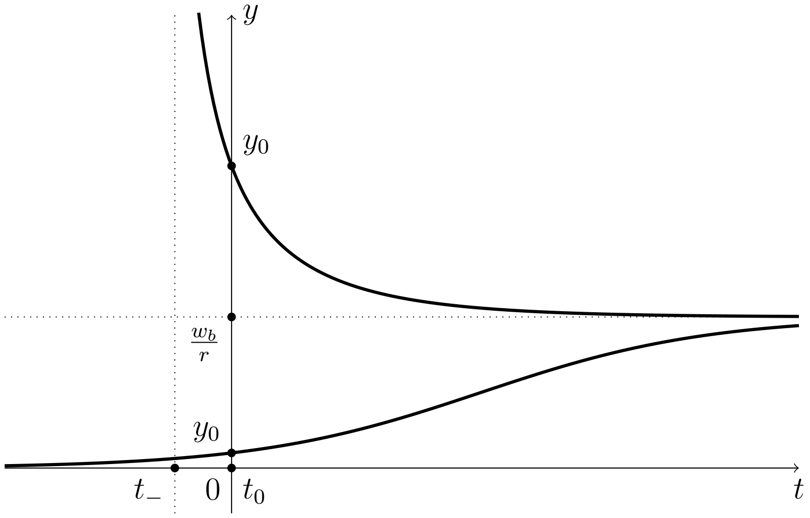
Jest to tzw. *równanie logistyczne* (zaproponowane w I połowie XIX wieku przez P. Verhulsta jako poprawiona wersja równania podanego przez Malthusa).

Możemy zatem znów próbować użyć twierdzenia dotyczącego równania o zmiennych rozdzielonych — tak jak poprzednio moglibyśmy wziąć $(a; b) = \mathbb{R}$ i f — stale równą 1 oraz $(c; d) = (0; +\infty)$ i $g(y) = (w_b - ry)y$. Jednak napotkamy na istotny problem — mianowicie $\frac{w_b}{r} > 0$ i $g(\frac{w_b}{r}) = 0$ zatem założenie (XI.6) nie jest tu spełnione ... Wybrnąć z tego kłopotu można następująco.

Po pierwsze zauważmy, że na pewno funkcja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stale równa $\frac{w_b}{r}$ spełnia równanie logistyczne (po obu stronach jest 0). Jest to więc pewne rozwiązanie (nawet globalne) zagadnienia Cauchy'ego dla tego równania z warunkiem początkowym $y(t_0) = \frac{w_b}{r}$ (niezależnie od wyboru t_0). Można wykazać (— patrz nieco dalej), że każde rozwiązanie tego zagadnienia z powyższy warunkiem początkowym jest stale równe $\frac{w_b}{r}$.[210)]

[210)] Najłatwiej byłoby tu użyć niesformułowanego tw. Picarda...

Rozbijmy to co zostało z przedziału $(0+\infty)$ po wyrzuceniu punktu $\frac{w_b}{r}$ na dwa przedziały $(0;\frac{w_b}{r})$ i $(\frac{w_b}{r};+\infty)$, a następnie zastosujmy naszą metodę dla każdego z tych przedziałów osobno. Tzn. przyjmiemy raz $(c;d)=(0;\frac{w_b}{r})$, a drugi raz $(c;d)=(\frac{w_b}{r};+\infty)$. W obu przypadkach da się bez większego trudu znaleźć dokładne wzory opisujące rozwiązania integralne. Zostawiamy to jako zadanie dla Państwa, a teraz omówimy jedynie z grubsza — „jakościowo" zachowanie się tych rozwiązań (patrz rys. 37).



Rysunek 37. Rozwiązania integralne równania logistycznego.

W pierwszym przypadku rozwiązanie integralne l_1 okazuje się być globalnym, tzn. określone jest na całym $(a;b)=\mathbb{R}$ oraz jest funkcją rosnącą o granicy w $-\infty$ równej 0 a w $+\infty$ równej $\frac{w_b}{r}$. W drugim przypadku rozwiązanie integralne l_2 nie jest globalne. Jest ono określone na przedziale $(t_-;+\infty)$, gdzie t_- jest pewną liczbą zależną od w_b, r, t_0 oraz y_0 (same funkcje l_1 i l_2 oczywiście też zależą od wyboru t_0 i y_0). Ponadto jest funkcją malejącą o granicy w t_- równej $+\infty$ i o granicy w $+\infty$ równej także $\frac{w_b}{r}$. A zatem w obu przypadkach granica w $+\infty$ wynosi $\frac{w_b}{r}$, co pokrywa się z wartością rozważanego wcześniej rozwiązania stałego. Ta właśnie wartość nazywana jest w tym modelu *pojemnością środowiska*, o której wspomnieliśmy na początku tego przykładu. Okazuje się na dodatek, że korzystając z własności tych dwóch rodzajów rozwiązań można w pełni rozwiązać problem postawiony na początku, tj. z $(c;d)=(0;+\infty)$. Pozostawiam Państwu do wykazania fakt, że wówczas każde rozwiązanie przedłuża się do:

— rozwiązania l_1, gdy $y_0\in(0;\frac{w_b}{r})$,
— rozwiązania l_2, gdy $y_0>\frac{w_b}{r}$,
— rozwiązania stałego $y(t)=\frac{w_b}{r}$, gdy $y_0=\frac{w_b}{r}$.

Aby skomentować oba przykłady warto podkreślić, że jak pokazują obserwacje (i zdrowy rozsądek ...) żaden z przedstawionych tu modeli nie nadaje się raczej do opisu ogólnoświatowych tendencji demograficznych, tj. do opisu zachowania się populacji ludności świata. Choć np. model logistyczny jest całkiem dobrym przybliżeniem rzeczywistości dla niektórych populacji bakterii.

◇ Równanie „liniowe" (a raczej afiniczne)

Rozważać będziemy równania różniczkowe postaci

$$y'=f(t)\cdot y+g(t) \tag{XI.12}$$

gdzie $f,g:(a;b)\to\mathbb{R}$ są obie funkcjami ciągłymi, $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$. W przypadku gdy g jest stale równa zero, mówimy o równaniu *liniowym jednorodnym*. Podobnie jak równanie o

zmiennych rozdzielonych, (XI.12) to szczególny przypadek równania różniczkowego (XI.2). W tym wypadku $D = (a; b) \times \mathbb{R}$ oraz $F : D \to \mathbb{R}$ zadana jest wzorem

$$F(t, y) = f(t)y + g(t).$$

A zatem $\partial_y F(t, y) = f(t)$ dla dowolnych $(t, y) \in D$. Skoro f jest ciągła, zatem jest ograniczona po obcięciu do dowolnego przedziału domkniętego $K \subset (a; b)$, czyli w tym wypadku są spełnione założenia twierdzenia XI.1, które gwarantuje m.in. istnienie globalnego rozwiązania (i to tylko jednego) zagadnienia Cauchy'ego. Naszym celem będzie wyznaczenie jawnego wzoru opisującego to rozwiązanie przy pomocy funkcji f i g oraz t_0 i y_0. Ponieważ jednoznaczność tego rozwiązania mamy już zagwarantowaną oraz wiemy, że dziedziną y jest cały przedział $(a; b)$, zatem aby znaleźć ten wzór możemy się posłużyć niejako odgadywaniem. Tzn., jeżeli znajdziemy jakąkolwiek funkcję y określoną na $(a; b)$, spełniającą nasze równanie oraz warunek początkowy, to będziemy mieli gwarancję, że jest to właśnie **ten** szukany y. Rozdzielimy to odgadywanie na dwa etapy.

⋄ Etap 1 — równanie jednorodne

Szukamy więc pewnej funkcji $y : (a; b) \to \mathbb{R}$ spełniającej warunki

$$y' = f(t) \cdot y, \qquad y(t_0) = y_0.$$

Jak widać, gdyby odrzucić z rozważanej dziedziny D punkty o zerowej współrzędnej y, mielibyśmy do czynienia z niedawno rozważanym równaniem o zmiennych rozdzielonych. Używając więc opisanej już metody, znaleźlibyśmy łatwo wzór opisujący rozwiązanie tego problemu, pomijając sytuację gdy $y_0 = 0$ (z którą też łatwo możemy się uporać ... — jak?). Jednak zamiast tego, skoro wspomnieliśmy już o odgadywaniu — będziemy konsekwentni i opiszemy jedną z przydatnych niekiedy metod odgadywania rozwiązań pewnych równań.

Spróbujmy znaleźć takie rozwiązanie y zagadnienia jednorodnego, które miałoby postać

$$y(t) = y_0 e^{\varphi(t)}$$

gdzie $\varphi : (a; b) \to \mathbb{R}$ jest pewną pomocniczą funkcją — będziemy starali się ją wyznaczyć. Ponieważ dla y tej postaci zachodzi

$$y(t_0) = y_0 e^{\varphi(t_0)}$$

oraz

$$y'(t) = y_0 \varphi'(t) e^{\varphi(t)} = \varphi'(t) \cdot y(t),$$

zatem by y było rozwiązaniem naszego zagadnienia, wystarczy aby

$$\varphi(t_0) = 0 \text{ oraz } \varphi' = f.$$

A φ spełniające powyższe warunki znamy dobrze — zadane jest wzorem:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

W efekcie, rozwiązaniem zagadnienia jednorodnego jest funkcja opisana wzorem:

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} f(s)ds} \text{ dla } t \in (a; b). \tag{XI.13}$$

$\diamond$ Etap 2 — „uzmiennianie stałej"

Spróbujemy teraz znaleźć rozwiązanie y dla równania (XI.12) w ogólnej postaci, opierając się na następującym pomyśle, od którego pochodzi powyższa, może nieco dziwna, nazwa tego etapu. Rozwiązanie równania jednorodnego zadane wzorem (XI.13) zawiera w swym opisie stałą y_0. I to właśnie ją będziemy „uzmienniać". Oznacza to, że będziemy próbowali znaleźć takie rozwiązanie y równania (XI.12), które byłoby zadane wzorem

$$y(t) = z(t)e^{\int_{t_0}^{t} f(s)ds} \text{ dla } t \in (a;b) \tag{XI.14}$$

— a zatem po prostu zamiast „stałej" y_0 wstawiamy tu pewną funkcję „zmienną" — $z : (a;b) \to \mathbb{R}$, którą postaramy się wyznaczyć. Mamy

$$y'(t) = z'(t) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} f(s)ds} + z(t)e^{\int_{t_0}^{t} f(s)ds} \cdot f(t) = f(t) \cdot y(t) + z'(t)e^{\int_{t_0}^{t} f(s)ds}$$

Zatem y będzie rozwiązaniem (XI.12) wtw

$$z'(t)e^{\int_{t_0}^{t} f(s)ds} = g(t),$$

czyli

$$z'(t) = g(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} f(s)ds} \quad \text{dla } \ t \in (a;b).$$

Nakładając jeszcze dodatkowo warunek początkowy $y(t_0) = y_0$ uzyskujemy

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s) \cdot e^{-\int_{t_0}^{s} f(u)du} ds \ \text{[211]} \qquad \text{dla } t \in (a;b) \tag{XI.15}$$

Udowodniliśmy zatem twierdzenie:

Twierdzenie XI.3 (o równaniu „liniowym"). *Załóżmy, że $f, g : (a;b) \to \mathbb{R}$ są ciągłe oraz że $y_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in (a;b)$. Wówczas funkcja y zadana wzorami* (XI.14), (XI.15) *jest jedynym określonym na $(a;b)$ rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania* (XI.12) *z warunkiem początkowym* (XI.3)*. Ponadto każde rozwiązanie tego zagadnienia przedłuża się na cały przedział $(a;b)$.*

Znów, oczywiście, przedłużenie o którym mowa powyżej jest jednoznaczne i jest nim to rozwiązanie opisane wzorami (XI.14), (XI.15).

$\diamond$ Model dla „populacji z migracją"

Pierwszy przykład będzie zastosowaniem sformułowanego przed chwilą wyniku do opisu zachowania się pewnej populacji rozwijającej się w dość szczególny sposób.

Rozważamy populację, w której obowiązują (tak jak w przykładzie ze str. 212) stałe współczynniki w_b i w_d, ale w której ponadto występuje zjawisko migracji. Polega ono na tym, że w ciągu każdego roku w tej populacji stała liczba m osobników (wyrażamy tę liczbę w tysiącach, jeśli w_b, w_d były współczynnikami liczonymi na tysiąc osobników populacji) przybywa, bądź ubywa (w zależności od znaku m) w ramach migracji (czyli przeprowadzki) z lub do innej populacji. Jest to więc uogólnienie przykładu z modelem „narodzin i śmierci", który uzyskamy rozważając $m = 0$. Postępując więc analogicznie jak we wcześniejszych przykładach widzimy, że prawa „demograficzne" obowiązujące w tej populacji można opisać równaniem

$$y' = ky + m, \tag{XI.16}$$

[211] Mimo, że wzór ten będzie za chwilę przywołany w treści twierdzenia, nie zachęcam jednak do zapamiętywania go (wzoru). Lepiej zapamiętać samą metodę, a sam wzór daje się szybko wyprowadzić.

gdzie $k = w_b - w_d$. Jeśli założymy, że w chwili t_0 populacja ta liczyła y_0 osobników, to na mocy twierdzenia XI.3 uzyskamy następujące rozwiązanie opisujące liczebność tej populacji w chwili t:

$$y(t) = (y_0 + \frac{m}{k})e^{k(t-t_0)} - \frac{m}{k}, \tag{XI.17}$$

o ile $k \neq 0$, a gdy $k = 0$:

$$y(t) = m(t - t_0) + y_0.$$

Jak więc widać, gdy np. $k > 0$ i przy założeniu emigracji, tzn. $m < 0$, model ten ma szansę opisywać rzeczywisty rozwój populacji tylko o ile $k \cdot y_0 \geqslant |m|$, co zresztą powinniśmy byli założyć na samym początku, formułując prawa rządzące tym procesem (bez tego założenia populacja po pewnym czasie spadłaby poniżej zera ...).

Drugi przykład dotyczy zastosowań w genetyce.

Przykład (model dla „mutacji na ustalonej pozycji w genie"). Geny zakodowane są w cząsteczce DNA w postaci skończonego ciągu sąsiadujących ze sobą „cegiełek" — tzw. nukleotydów. Są cztery rodzaje nukleotydów — oznaczane literami A,T,C,G — przy czym dwa egzemplarze nukleotydu jednego typu są nierozróżnialne (mają identyczną budowę chemiczną). Każdy gen można utożsamiać ze skończonym ciągiem złożonym z powyższych liter. Pod wpływem działania różnych czynników zewnętrznych geny mogą zostać uszkodzone — dochodzi do tzw. mutacji genu. Jednym z objawów mutacji, obserwowanym „z punktu widzenia ustalonej pozycji n" w ciągu — genie, może być zamiana danego nukleotydu znajdującego się na tej pozycji na inny nukleotyd. Spróbujemy opisać możliwy rozwój sytuacji na takiej ustalonej n–tej pozycji genu w języku prawdopodobieństwa.

Załóżmy, że organizm, w którym obserwujemy dany gen znajduje się w środowisku charakteryzującym się obecnością czynnika, mogącego powodować mutację. Pomiar średniej wartość tego czynnika w czasie jednej jednostki czasu (np. 1 s) daje wynik stały (nie zależy od momentu rozpoczęcia pomiaru).

Zakładamy zatem, że prawdopodobieństwo zamiany nukleotydu X ($X \in \{A, T, G, C\}$), znajdującego się na n–tej pozycji na **ustalony inny** nukleotyd po upływie jednej jednostki czasu wynosi $p \in [0; \frac{1}{3}]$ [212), tzn. jeśli na danej pozycji jest nukleotyd X, to każda zamiana typu „$X \to Y$", gdzie $X, Y \in \{A, T, G, C\}$ oraz $X \neq Y$ może zajść w tym czasie z tym samym prawdopodobieństwem p (i p nie zależy to od momentu rozpoczęcia obserwacji takiej zamiany). Załóżmy, że w chwili 0 na n–tej pozycji znajdował się nukleotyd X_0. Nasze pytanie jest następujące:

> *Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po czasie t (t jest „duże" w porównaniu z jednostką czasu) na n–tej pozycji będzie się znajdował nukleotyd Y?*

Oznaczmy szukane prawdopodobieństwo przez $P_Y(t)$. Wartość $P_Y(t+1)$ jest zatem prawdopodobieństwem zdarzenia, że w chwili $t+1$ na n–tej pozycji mamy nukleotyd Y. Mogło dojść do tego na dwa różne sposoby:

1. W chwili t mieliśmy już Y (prawdopodobieństwo tego to $P_Y(t)$) i po upływie 1 jednostki czasu nie nastąpiła zamiana (prawdopodobieństwo tego jest $1 - 3p$ — patrz poprzedni przypis). Prawdopodobieństwo takiego rozwoju wypadków wynosi $P_Y(t) \cdot (1 - 3p)$.
2. W chwili t mieliśmy jakiś nukleotyd $X \neq Y$ (prawdopodobieństwo tego to $1 - P_Y(t)$) i nastąpiła zamiana z X na Y (dla każdego $X \neq Y$ prawdopodobieństwo to wynosi p). Prawdopodobieństwo równe jest więc $(1 - P_Y(t)) \cdot p$.

W efekcie mamy:

$$P_Y(t+1) = P_Y(t) \cdot (1 - 3p) + (1 - P_Y(t)) \cdot p = P_Y(t)(1 - 4p) + p,$$

czyli

$$P_Y(t+1) - P_Y(t) = -4pP_Y(t) + p.$$

Dokonując, tak jak we wcześniejszych przykładach, małego „oszustwa" i zastępując iloraz różnicowy funkcji P_Y pomiędzy t a $t+1$ jej pochodną w chwili t, otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$P_Y' = -4pP_Y + p. \tag{XI.18}$$

A jaki mamy warunek początkowy? Jeżeli $Y = X_0$, to $P_Y(0) = 1$, a jeżeli $Y \neq X_0$, to $P_Y(0) = 0$, bo $P_Y(0)$, to prawdopodobieństwo zdarzenia, że w chwili 0 mamy nukleotyd Y. Musimy więc rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego w obu tych sytuacjach (dla $t \geqslant 0$). Na szczęście równanie (XI.17) to szczególny przypadek zbadanego już przez nas równania (XI.15). Po prostych obliczeniach widzimy, że gdy $p \in (0; \frac{1}{3}]$, to

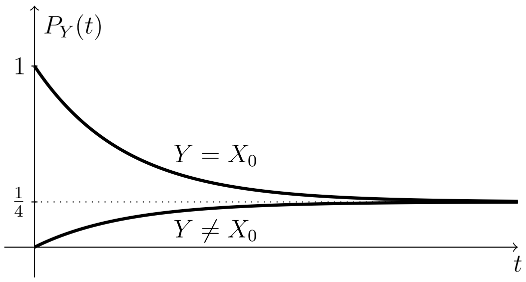
$$P_Y(t) = (P_Y(0) - \frac{1}{4})e^{-4pt} + \frac{1}{4} \tag{XI.19}$$

212) Należy raczej oczekiwać, że p jest „bardzo małą" liczbą ze względem na krótki czas trwania jednej „jednostki" czasu i na to, że obserwujemy to co się dzieje tylko na jednej wybranej spośród wielu pozycji nukleotydów w DNA. Ponieważ zamiany np. $A \to T$, $A \to G$, $A \to C$ wzajemnie się wykluczają, zatem prawdopodobieństwo tego, że po upływie jednostki czasu pozostanie ten sam nukleotyd, który był, wynosi $1-3p$, co w „rozsądnych" warunkach powinno być „bliskie" 1, gdyż mutacja w krótkim czasie i w ustalonym miejscu jest na ogół niezwykle mało prawdopodobna.

oraz dla $p = 0$ wzór ten też obowiazuje, tzn. $P_Y(t) = P_Y(0)$. Warto zauważyć, że wynik taki ma szansę mieć coś wspólnego rzeczywiście z prawdopodobieństwem, zgodnie z interpretacją funkcji P_Y. Mamy bowiem w obu przypadkach (dla $X_0 = Y$ albo dla $X_0 \neq Y$) spełniony warunek

$$P_Y(t) \in [0;1] \text{ dla } t \geqslant 0.$$

A co chyba jeszcze ciekawsze, w obu przypadkach, **niezależnie od wartości** p, o ile tylko $p > 0$, granica funkcji P_Y w $+\infty$ wynosi $\frac{1}{4}$ (patrz rysunek 38)!



Rysunek 38. Wykresy rozwiązań P_Y dla obu możliwych warunków początkowych i ich wspólna graniczna wartość $\frac{1}{4}$.

Nietrudno stwierdzić, że ma to bezpośredni związek z liczbą możliwych nukleotydów (patrz zadanie). Należy mieć tylko nadzieję, że w praktyce p jest liczbą tak małą, że ta graniczna wartość $\frac{1}{4}$ jest w rzeczywistości bardzo odległa od $P_Y(t)$ dla czasu t zbliżonego do średniej długości ludzkiego życia ...

Nieco więcej o równaniach liniowych w ogólniejszej (tj. m-wymiarowej, przy $m \geqslant 1$) sytuacji powiemy w podrozdziale 4.

3. Układy równań skalarnych 1–go rzędu

⋄ Wiele równań i „niewiadomych”

Często zdarza się, że mamy do czynienia nie z jednym równaniem różniczkowym na jedną funkcję skalarną y, ale z wieloma (np. k) równaniami na wiele (np. m) funkcji skalarnych, przy czym każde z równań może dotyczyć nie jednej, ale kilku spośród tych funkcji. Zajmiemy się szczególną sytuacją, gdy $k = m$ oraz i–te równanie ma postać *normalną względem i–tej funkcji* y_i, tzn. rozważymy układ równań postaci

$$\begin{cases} y_1' = F_1(t, y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ y_i' = F_i(t, y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ y_m' = F_m(t, y_1, \ldots, y_m), \end{cases} \tag{XI.20}$$

gdzie wszystkie funkcje F_i są określone na tym samym zbiorze $D \subset \mathbb{R}^{1+m}$ i mają wartości w $\mathbb{R}$.

⋄ Zapis jako jedno równanie wektorowe

W takiej sytuacji wygodnie jest zastąpić ten układ przez tylko jedno równanie różniczkowe na jedną funkcję, ale za to już nie na funkcję skalarną lecz wektorową, o wartościach w $\mathbb{R}^m$. Można to zrobić bardzo łatwo. Należy bowiem rozważyć funkcję „szukaną” y o wartościach w $\mathbb{R}^m$ taką, że jej i–ta funkcja współrzędna to właśnie y_i. Podobnie, określimy $F : D \to \mathbb{R}^m$ dla $y \in \mathbb{R}^m$ [213] i $t \in \mathbb{R}$ takich, że $(t, y) \in D$ wzorem

$$F(t; y) = (F_1(t, y), \ldots, F_m(t, y)).$$

[213] Czyli tu znów y „na chwilę” oznacza nie funkcję lecz element $\mathbb{R}^m$.

A zatem układ równań (XI.20) będzie (przy przyjętych oznaczeniach) równoważny jednemu równaniu

$$y' = F(t, y),$$

czyli rozważanemu na początku rozdziału równaniu w postaci (XI.2).

⋄ Równanie autonomiczne

Szczególnym przypadkiem powyższego równania jest tzw. równanie *niezależne od czasu* lub inaczej *autonomiczne*, tzn. takie, w którym D ma postać $V \times U$ ze zbiorami $V \subset \mathbb{R}$ i $U \subset \mathbb{R}^m$ — najlepiej otwartymi oraz funkcja F nie zależy od zmiennej t, a jedynie od y. Równanie takie można wtedy zapisać jako

$$y' = G(y), \tag{XI.21}$$

dla pewnej funkcji $G : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ (a o zbiorze V i dziedzinie D można już właściwie zapomnieć...).

Jak wkrótce zobaczymy, kwestie związane z równaniami autonomicznymi można w wygodny sposób ująć w pewne ramy geometryczne, co pozwala łatwiej wyobrazić sobie czym jest zarówno równanie różniczkowe jak i jego rozwiązanie.

⋄ Dołączanie czasu — sprowadzanie do postaci autonomicznej

Jest sprawą ważną i przydatną, że każde równanie w postaci (XI.2) można zapisać w sposób równoważny jako pewne równanie autonomiczne. Jednak to co przy tym „tracimy” — to wymiar — powiększa się on z m do $m+1$. Metodę tę można nazwać *dołączaniem czasu*. Jest ona następująca. Zamiast funkcji $I \ni t \rightsquigarrow y(t) \in \mathbb{R}^m$ rozważamy funkcję $I \ni t \rightsquigarrow (t, y(t)) \in \mathbb{R}^{m+1}$, którą oznaczmy przez $\tilde{y}$. Funkcja $\tilde{y}_1$, czyli pierwsza funkcja współrzędna $\tilde{y}$ to po prostu funkcja identycznościowa — spełnia ona równanie różniczkowe

$$\tilde{y}_1'(t) = 1,$$

a ponadto przy dowolnie ustalonym t_0 spełnia też $\tilde{y}_1(t_0) = t_0$. W efekcie, jeżeli określimy $\tilde{F} : D \to \mathbb{R}^{1+m}$ dla $\tilde{y} \in D$ wzorem

$$\tilde{F}(\tilde{y}) = (1, F(\tilde{y})),$$

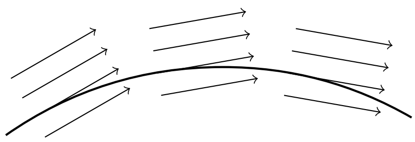
to widzimy, że zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

równoważne jest, przy oznaczeniach powyższych, zagadnieniu

$$\begin{cases} \tilde{y}' = \tilde{F}(\tilde{y}) \\ \tilde{y}(t_0) = (t_0, y_0), \end{cases} \tag{XI.22}$$

czyli *autonomicznemu zagadnieniu Cauchy'ego*, w którym równanie ma postać (XI.21), z $\tilde{F}$ jako G oraz zbiorem D jako U.



Rysunek 39. Pole wektorowe i pewna trajektoria rozwiązania.

⋄ Geometria równania autonomicznego

Poświęćmy więc trochę czasu „geometryzacji” ogólnego równania autonomicznego (XI.21). Pamiętamy (mam nadzieję ...) z rozważań na początku rozdziału IX, że pochodną funkcji y jednej zmiennej o wartościach w $\mathbb{R}^m$ w punkcie t należy interpretować geometrycznie jako wektor styczny do obrazu tej funkcji — czyli do *trajektorii* y — w punkcie $y(t)$. Na dodatek, jeśli funkcję $y : I \to U \subset \mathbb{R}^m$ wyobrazimy sobie jako ruch po zbiorze U, a dokładniej „wzdłuż trajektorii $y(I)$ funkcji y, to wektor $y'(t)$ jest nie tylko styczny do trajektorii (po „zaczepieniu” w $y(t)$), ale jednocześnie kierunek tego wektora pokazuje kierunek ruchu po $y(I)$, a jego długość — prędkość „skalarną” tego ruchu w chwili t. [214)]

Z drugiej strony, równanie (XI.21) mówi, że $y'(t)$, tj. wektor styczny do trajektorii w punkcie $y(t)$, musi być równy wartości funkcji G w punkcie $y(t)$. Z tego właśnie względu funkcję G zwykło się nazywać *polem wektorowym* [215)] . To nazwa chyba dość sugestywna — wygodnie wyobrażać to sobie jako „pole” wektorów „zaczepionych” w każdym punkcie zbioru U (ale „leżących” w $\mathbb{R}^m \supset U$). Wektor taki dla punktu $u \in U$ (to tzw. „wektor związany”) uzyskujemy z wektora („swobodnego”) $G(u)$ przesuwając go równolegle tak by był zaczepiony w u zamiast w 0, co pozwala łatwiej „naocznie” obserwować ową styczność do trajektorii, gdy $y(t) = u$.

Rozwiązanie równania (XI.21) polega więc, z geometrycznego punktu widzenia, na znalezieniu takiej drogi — czyli trajektorii zawartej w zbiorze U, że w każdym punkcie tej drogi prosta styczna do niej ma kierunek taki, jaki wyznacza wartość pola wektorowego w tym punkcie. Jednak to jeszcze nie wszystko. Szukamy bowiem nie tylko drogi (trajektorii), ale ruchu po niej (funkcji y jednej zmiennej, a nie tylko jej obrazu)! Musimy zatem, mając już samą drogę, tak się poruszać po niej by prędkość skalarna i zwrot ruchu zgadzały się odpowiednio z długością i kierunkiem wektora pola. Ten kierunek i ten zwrot można dość łatwo narysować — szczególnie w przypadku dwuwymiarowym (patrz rysunek 39), ale sprawa prędkości skalarnej wymaga już dobrej wyobraźni.

Oczywiście, jeśli chcemy rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego to oprócz zadanego pola wektorowego mamy jeszcze zadany punkt $y_0 \in U$, taki, że w chwili „początkowej” t_0 nasza trajektoria „startuje” z punktu y_0, tj. $y(t_0) = y_0$.

⋄ Niezmienniczość w czasie

Warto w tym momencie zwrócić uwagę na bardzo ważną cechę równań autonomicznych. Mianowicie na tzw. *niezmienniczość w czasie*, która polega na tym, że trajektoria (przy zadanym polu) nie będzie zależała od wyboru t_0. Ściślej, jeżeli $y : I \to U$ jest rozwiązaniem równania (XI.21) takim, że $y(t_0) = y_0$, to dla dowolnego innego czasu początkowego $\hat{t}_0$, „przesuwając” jedynie zmienną czasową, tj. tworząc nową funkcję zadaną wzorem

$$t \rightsquigarrow y(t + (t_0 - \hat{t}_0))$$

214) Zachęcam do skorzystania z obrazka 26 (należy jedynie zamienić f na y oraz a na t).

215) Zatem samo równanie można po prostu utożsamiać z polem wektorowym, bowiem równanie jest zakodowane przez G.

(dla $t + (t_0 - \hat{t}_0) \in I$) uzyskamy także rozwiazanie naszego równania (o tej samej trajektorii) mające wartość y_0 w chwili $\hat{t}_0$. Oznaczając bowiem tę nową funkcję przez $\hat{y}$ mamy

$$\hat{y}'(t) = y'(t + (t_0 - \hat{t}_0)) = G(y(t + (t_0 - \hat{t}_0))) = G(\hat{y}(t)).$$

◇ Orbity

Trajektorią nazwaliśmy wcześniej po prostu obraz $y(I)$ jakiegokolwiek rozwiązania y równania (XI.21). Najważniejsze z tych rozwiązań to takie, które nie dadzą się już przedłużyć do rozwiązania określonego na większym przedziale[216)] — nazwaliśmy je rozwiązaniami integralnymi. *Orbitą* nazwiemy każdą trajektorię rozwiązania integralnego równania (XI.21). Gdy pole wektorowe G jest *gładkie*, tzn. G jest funkcją klasy C^1 określoną na otwartym zbiorze U, to przy pomocy wspominanegojuż tu twierdzenia Picarda „o lokalnym istnieniu jednoznaczności" można uzyskać następujący rezultat.

Twierdzenie XI.4 (o orbitach). *Jeżeli G jest gładkim polem wektorowym określonym na zbiorze U, to*

1. *U jest sumą wszystkich orbit,*
2. *Każde dwie różne orbity są rozłączne,*
3. *Zbiór jednopunktowy $\{y_0\}$ jest orbitą wtw $G(y_0) = 0$.*

B.D.

A zatem w szczególności orbity zadają nam pewne rozbicie całego zbioru U na rozłączne podzbiory. Ponadto oczywiście dwa punkty z jednego takiego podzbioru dadzą się połączyć pewną trajektorią. Typowy obraz ilustrujący taki rozkład przedstawia rysunek 27 na stronie 148.

Jak wynika z punktu 3 pow. twierdzenia orbity jednopunktowe odpowiadają dokładnie miejscom zerowania się pola wektorowego G — takie orbity odpowiadają rozwiązaniom stałym. Z kolei orbity „zamknięte" odpowiadają rozwiązaniom okresowym.

◇ Całki pierwsze

Opisane tu rozbicie zbioru G na orbity przypomina podział zbioru na poziomice pewnej funkcji. Byłoby bardzo wygodnie znać jakąś funkcję, której zbiór poziomic byłby równy zbiorowi orbit dla pola G. Byłby to bowiem poważny krok na drodze do znalezienia wszystkich rozwiązań równania (XI.21) — mielibyśmy już wszystkie trajektorie rozwiązań integralnych, a brakowałoby nam jedynie znalezienia sposobu poruszania się wzdłuż nich — zgodnie z polem wektorowym G, czyli znalezienia odpowiedniej ich parametryzacji. Ponieważ U jest zbiorem m–wymiarowym, a orbity są na ogół 1–wymiarowe, zatem należałoby oczekiwać, że funkcja, która spełniałaby nasze oczekiwania miałaby wartości w $\mathbb{R}^{m-1}$, inaczej mówiąc orbity byłyby wtedy przecięciami $m-1$ poziomic funkcji skalarnych stałych na rozwiązaniach naszego równania. W praktyce znalezienie aż tylu takich funkcji skalarnych jest na ogół trudne, ale nawet jedna bywa pomocna przy poszukiwaniu rozwiązań. Jeżeli G jest polem wektorowym gładkim, to każdą funkcję skalarną klasy C^1, która jest określona na U i po obcięciu do każdej orbity jest stała nazywamy *całką pierwszą* [217)] (równania lub pola wektorowego).

216) Przy „zapisie autonomicznym" (XI.21) dziedzina U nie obejmuje w ogóle zmiennej „czasowej" t, by jednak być ścisłym należy przejść do zapisu (XI.2) z dziedziną dla F postaci $D = \mathbb{R} \times U$. Tzn., mniej ściśle, nie robimy z góry żadnych ograniczeń na dziedzinę rozwiązania.
217) Związek tego z całkowaniem oznaczanym przez „$\int$" jest odległy. Słowo „całkowanie" ma jednak również znaczenie „rozwiązywania", w przypadku równań różniczkowych.

◇ **Energia jako całka pierwsza**

Jako przykład rozważymy ruch punktu materialnego w tzw. *polu potencjalnym*. Założymy dla uproszczenia, że masa punktu wynosi 1 oraz że jest to ruch jednowymiarowy. Tzn. położenie punktu opisane jest funkcją x jednej zmiennej (— czasu t) o wartościach w $\mathbb{R}$. Wówczas *pęd* $p(t)$ tego punktu w chwili t i jego prędkość $v(t) := x'(t)$ to to samo, a przyspiesznie to $a(t) = p'(t)$. Zakładamy, że ruch tego punktu jest wynikiem działania pewnej znanej nam siły. Ogólnie siła ta może zależeć np. od chwili czasu t i od wartości położenia $x(t)$, a także nawet od prędkości $v(t)$ — tzn. opisna może być pewną funkcją F (ogólnie — wektorową, a tu, ze względu na jednowymiarowość ruchu — skalarną) trzech zmiennych, której wartość dla chwili czasu t, położenia x i prędkości v wynosi $F(t, x, v)$. Zgodnie z *drugą zasadą dynamiki Newtona* („siła równa się masa razy przyspieszenie") zachodzi wówczas

$$p'(t) = F(t, x(t), p(t)).$$

Oczywiście powyższe nie jest „samowystarczalnym" równaniem różniczkowym opisującym całość sytuacji, gdyż zawiera dwie funkcje x i p, których wzajemny związek $x' = p$ nie został jeszcze uwzględniony. Gdy jednak to uczynimy, uzyskamy układ równań

$$\begin{cases} x'(t) = p(t) \\ p'(t) = F(t, x(t), p(t)). \end{cases}$$

Przy tak ogólnych założeniach o sile F trudno jest powiedzieć wiele o rozwiązaniach powyższego układu. Jeśli jednak ograniczymy się do dość często występującego w fizyce przypadku (np. ruch w polu grawitacyjnym, elektrycznym) niezależnej od czasu siły potencjalnej, tzn. funkcji F, która zależy tylko od położenia (zakładając, że wszelkie charakterystyczne wielkości takie jak masa, ładunek itp. rozważanego punktu są ustalone) i to w szczególny sposób — mianowicie ma postać w przypadku ogólnym (wielowymiarowym) „gradientową":

$$F(t, x, v) = -(\operatorname{grad} V)(x)$$

(w szczególności F jest *de facto* zależna jedynie od x). Taka funkcja V bywa nazywana *potencjałem* (choć fizycy używają tej nazwy raczej tylko wtedy, gdy odpowiednia charakterystyczna wielkość, wspomniana wyżej, ma wartość jednostkową). Dla przypadku jednowymiarowego $(\operatorname{grad} V)(x) = V'(x)$, zatem nasz układ równań przybiera postać (już „zakodowaną" tak jak zwykle)

$$\begin{cases} x' = p \\ p' = -V'(x). \end{cases}$$

Inaczej mówiąc, mamy tu dwuwymiarowe autonomiczne równanie pierwszego rzędu $y' = G(y)$, gdzie oznaczyliśmy $y = (x, p)$ oraz $G(x, p) = (p, -V'(x))$. *Energią* E *(całkowitą)* nazywa się funkcję będącą sumą tzw. *energi kinetycznej* i *potencjalnej*, czyli w naszym wypadku

$$E(x, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(x).$$

Łatwo zauważyć, że jest to całka pierwsza naszego równania. Aby sprawdzić, że E jest stała na każdym rozwiązaniu, wystarczy bowiem sprawdzić, że jeśli $y = (x, p)$ jest rozwiązaniem tego równania, to funkcja ϕ zadana jako $\phi(t) = E(x(t), p(t)) = \frac{1}{2}p(t)^2 + V(x(t))$ jest stała. Policzmy jej pochodną:

$$\phi'(t) = p(t)p'(t) + V'(x(t))x'(t) = -p(t)V'(x(t)) + V'(x(t))p(t) = 0.$$

Czyli rzeczywiście ϕ jest stała.

Drugi przykład całki pierwszej wiąże się z pewnym układem równań opisującym wzajemne współistnienie dwóch populacji.

Przykład (całka pierwsza dla układu Lotki–Volterry). Układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{cases} y_1' = (k - \alpha y_2)y_1 \\ y_2' = (\beta y_1 - \gamma)y_2. \end{cases}$$

nazywany jest układem Lotki–Volterry (k, α, β, γ — pewne stałe) i opisuje prawo obowiązujące dla zmian liczebności żyjących razem na tym samym obszarze dwóch populacji: ofiar (y_1) i drapieżników (y_2). Okazuje się, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(u) = |u_1|^\gamma e^{-\beta u_1} |u_2|^k e^{-\alpha u_2}$$

w przypadku $\gamma, k > 0$ jest całką pierwszą dla tego układu (tzn. dla równania autonomicznego, które uzyskamy przechodząc od tego układu do jednego równania „wektorowego"). Sprawdzenie tego faktu to zadanie dla Państwa (zad. 11).

Warto znajdować całki pierwsze dla równań „wielowymiarowych" — nie tylko dlatego, że ułatwia to znajdować rozwiązania, ale także dlatego, że pomaga powiedzieć coś więcej na temat „geometrii" orbit dla danego równania.

4. Układy równań różniczkowych „liniowych"

◇ Zapis „macierzowy"

Szczególny rodzaj układów równań to tzw. układy równań „liniowych" (a raczej należałoby powiedzieć — afinicznych), czyli takich, że każda funkcja F_i pojawiająca się w układzie (XI.20) ma postać

$$F_i(t, y) = a_{i1}(t)y_1 + \dots + a_{im}(t)y_m + \beta_i(t), \tag{XI.23}$$

gdzie $F_i : (a; b) \times \mathbb{R}^m$, przy czym $a_{ij}, \beta_i : (a; b) \to \mathbb{R}$ są pewnymi funkcjami ciągłymi dla $i, j = 1, \dots, m$. A zatem, jeśli zastąpimy taki układ równań jednym równaniem wektorowym, tak jak opisaliśmy to na początku podrozdziału IX.4, otrzymamy równanie na funkcję wektorową y o wartościach w $\mathbb{R}^m$ postaci

$$y' = A(t)(y) + \beta(t), \quad ^{218)} \tag{XI.24}$$

gdzie dla $t \in \mathbb{R}$ symbol $A(t)$ oznacza przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^m$ o macierzy (w standardowej bazie) $(a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,m}$, natomiast $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ (tzn. $\beta : (a; b) \to \mathbb{R}^m$). Jest to więc uogólnieniem na przypadek dowolnego m sytuacji opisanej już wcześniej dla $m = 1$.

◇ Istnienie rozwiązań globalnych

Podobnie jak w tym szczególnym przypadku, także i teraz równanie to spełnia założenia twierdzenia XI.1. Jeśli bowiem określimy $F : (a; b) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ wzorem

$$F(t, y) = A(t)(y) + \beta(t),$$

to dla wszystkich $j = 1, \dots, m$ mamy

$$\partial_{y_j} F(t, y) = (a_{1j}(t), \dots, a_{m_j}(t)),$$

skąd, dzięki ciągłości funkcji a_{ij}, uzyskujemy ograniczoność normy $\|\partial_{y_j} F(t, y)\|$ po ograniczeniu się do $t \in K$, gdzie K jest domkniętym przedziałem zawartym w $(a; b)$. A zatem tu także twierdzenie to gwarantuje istnienie globalnych rozwiązań równania, tzn. rozwiązań określonych na całym przedziale $(a; b)$. Co więcej każde rozwiązanie równania przedłuża się do takiego rozwiązania globalnego i przedłużenie to jest jednoznacznie wyznaczone warunkami początkowymi.

---

218) Bardzo często pomija się drugie nawiasy w $A(t)(y)$ i pisze się $A(t)y$ zgodnie z przyjętym dość powszechnie zwyczajem pomijania nawiasów dla argumentów przekształceń liniowych.

◇ **Dla $m > 1$ trudniej...**

Niestety, znacznie gorzej wygląda już sprawa opisania bezpośredniego wzoru na rozwiązanie (co udało się uzyskać, gdy mieliśmy $m = 1$). Gdybyśmy próbowali, tak jak przy $m = 1$, rozbić poszukiwanie rozwiązań na dwa etapy, największy problem pojawiłby się w przypadku jednorodnym — tzn. już przy $\beta \equiv 0$. Tu nie ma ogólnego algorytmu dającego konstruktywne rozwiązanie. Jednak jeśli w jakimś szczególnym przypadku znalezienie ogólnej postaci rozwiązań równania jednorodnego uda się znaleźć, to warto wiedzieć że drugi etap, czyli „uzmiennianie stałej", daje się już uogólnić na przypadek wielowymiarowy. Jest to nieco bardziej skomplikowane i nie będziemy tego szczegółowo opisywać. Ale popróbujecie Państwo zrobić to samodzielnie w szczególnych przypadkach — patrz np. zadanie 3 e, g.

Ważnym przypadkiem równań jednorodnych dla których rozwiązania dają się wypisać jawnymi wzorami są równania liniowe jednorodne o *stałych współczynnikach*, tzn. sytuacja gdy wszystkie funkcje a_{ij} są stałe. Szczegółowy wzór wymaga umiejętności sprowadzania macierzy do tzw. postaci Jordana, której to umiejętności nie posiedliście Państwo jednak na wykładzie z GAL–u. Dlatego my ograniczymy się tylko do sformułowania wyniku dotyczącego ogólnej postaci rozwiązań w tym przypadku.

◇ **Rozwiązania zespolone**

Dla powyższego celu najwygodniej posłużyć się funkcjami mającymi wartości zespolone — a więc ogólniejszymi niż rozważane dotąd funkcje rzeczywiste (albo o wartosciach w $\mathbb{C}^m$ zamiast, jak dotąd, w $\mathbb{R}^m$). Ale jak należałoby rozumieć spełnianie przez funkcję $y : (a; b) \to \mathbb{C}^m$ równania (XI.24)? Zauważmy, że nie ma żadnego problemu z określeniem tego, co mielibyśmy po prawej stronie równania, bowiem przekształcenie liniowe $A(t)$ z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^m$ można w naturalny sposób przedłużyć do przekształcenia liniowego z $\mathbb{C}^m$ w $\mathbb{C}^m$ — będzie ono zadane tą samą macierzą co przekształcenie z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^m$. A zatem dla takiej funkcji y o wartościach w $\mathbb{C}^m$ „napis" $A(t)(y(t)) + \beta(t)$ z prawej strony (XI.24) oznaczałby po prostu element $\mathbb{C}^m$, którego j–ta współrzędna ma postać

$$a_{j1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{jm}(t)y_m(t) + \beta_j(t).$$

Pozostaje więc wyjaśnić sens lewej strony, tzn. $y'(t)$. Otóż mówimy, że taka funkcja y jest różniczkowalna w punkcie t, o ile dla dowolnego $j = 1, \ldots, m$ są różniczkowalne w t funkcje $\operatorname{Re} y_j$ oraz $\operatorname{Im} y_j$ i wówczas $y'(t) := (y_1'(t), \ldots, y_m'(t))$, gdzie $y_j'(t) = (\operatorname{Re} y_j)'(t) + i(\operatorname{Im} y_j)'(t)$. A zatem różniczkowanie funkcji zmiennej rzeczywistej, ale o wartościach w $\mathbb{C}^m$, sprowadza się najpierw do różniczkowania funkcji o wartościach w $\mathbb{C}$, a następnie — poprzez rozpatrywanie części rzeczywistej i części urojonej funkcji o wartościach zespolonych — do dobrze nam znanego różniczkowania funkcji o wartościach w $\mathbb{R}$.

Nazwijmy więc *rozwiązaniem zespolonym* (globalnym [219]) równania (XI.24) każdą funkcję $y : (a; b) \to \mathbb{C}^m$, która spełnia to równanie w powyżej opisanym sensie. W szczególności (ponieważ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) rozwiązaniami zespolonymi są oczywiście także dotychczas rozważane przez nas rozwiązania (globalne) mające wartości w $\mathbb{R}^m$ — będziemy o nich czasem mówić *rozwiązania rzeczywiste*.

Wprowadziliśmy tu pojęcie rozwiązania zespolonego, nie po to jednak, by zajmować się ogólniejszą teorią „samą dla siebie", ale po to, by w pewnych sytuacjach ułatwić sobie znajdowanie rozwiązań rzeczywistych [220]. Są one dla nas najważniejsze, bo to raczej rozwiązania

[219] Będziemy rozważali jedynie rozwiązania globalne, tzn. określone na całym $(a; b)$, bo jak już wiemy, w przypadku „zwykłych", tzn. tych dotychczas rozważanych rozwiązań równania (XI.24), wystarczyło się do takich ograniczyć.

[220] To zapewne nie pierwszy raz, gdy spotykacie się Państwo z zastosowaniem liczb zespolonych do rozwiązywania problemów o „charakterze rzeczywistym".

rzeczywiste, a nie zespolone, będą na ogół opisywać zjawiska występujące w naszej rzeczywistości (sic!).

Jedną z takich sytuacji gdy mogą przydać się rozwiązania zespolone jest właśnie zapowiadane wcześniej równanie jednorodne o stałych współczynnikach, tzn.

$$y' = Ay, \tag{XI.25}$$

gdzie teraz A oznacza liniowe przekształcenie z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^m$, bądź jego rozszerzenie do $\mathbb{C}^m$. Zauważmy, że obecnie nasze wcześniejsze $A(t)$ stale równe jest A, zatem jako $(a; b)$ śmiało można wybrać całe $\mathbb{R}$, co niniejszym czynimy. Co prawda tu można się obejść też bez użycia rozwiązań zespolonych, ale choćby sama postać funkcji pojawiających się przy opisie rozwiązań jest łatwiejsza w zapisie dla wersji zespolonej (— a co za tym idzie łatwiejsza do zapamiętania i zrozumienia).

⋄ Zespolone e^z

Do opisu tego przyda się rozszerzenie potęgi o podstawie e na przypadek nie tylko wykładników rzeczywistych, ale także zespolonych. Gdy $z = u + iv$, gdzie $u, v \in \mathbb{R}$, to zakładając, że potęgowanie z zespolonymi wykładnikami ma własności algebraiczne podobne do potęgowania rzeczywistego, powinniśmy uzyskać

$$e^z := e^u \cdot e^{iv} = e^u(\cos(v) + i\sin(v)),$$

gdzie druga równość to konsekwencja znanego zapewnie niektórym z Czytelników wzoru na potęgę z wykładnikiem „czysto urojonym". Dla tego definiujemy

$$e^z := e^u(\cos(v) + i\sin(v)).$$

W szczególności dla $z \in \mathbb{R}$ mamy $e^z = e^u$, zatem pokrywa się to z definicją dla rzeczywistych wykładników, gdyż wtedy $z = u$.

Jak wiemy w przypadku gdy $\lambda \in \mathbb{R}$, funkcja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $y(t) = e^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem równania

$$y' = \lambda y$$

(a więc ogólnej postaci równania jednorodnego o stałych współczynnikach dla $m = 1$) z warunkiem początkowym

$$y(0) = 1.$$

Okazuje się, że dokładnie tak samo jest dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$! Mamy bowiem dla $\lambda = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$

$$y(t) = e^{\lambda t} = e^{(ut+ivt)} = e^{ut}\cos(vt) + ie^{(ut)}\sin(vt),$$

zatem

$$\begin{aligned} y'(t) &= ue^{ut}\cos(vt) - e^{ut}v\sin(vt) + i(ue^{ut}\sin(vt) + e^{ut}v\cos(vt)) \\ &= (u + iv)(e^{ut}\cos(vt) + ie^{ut}\sin(vt)) = \lambda y(t). \end{aligned}$$

⋄ Ogólne rozwiązania zespolone przy stałych współczynnikach

Nie powinno zatem dziwić, że funkcje takiej postaci będą się też pojawiać w opisie ogólnej formy rozwiązań zespolonych równania jednorodnego o stałych współczynnikach dla $m > 1$.

Twierdzenie XI.5 (o postaci rozwiązań zespolonych równania jednorodnego). *Jeżeli $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$ jest zespolonym rozwiązaniem równania jednorodnego* (XI.25)*, to każda z funkcji y_j dla $j = 1, \dots, m$ jest liniową kombinacją (o współczynnikach zespolonych) funkcji $e_{\lambda,s} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ zadanych wzorami*

$$e_{\lambda,s}(t) = t^s e^{\lambda t}, \tag{XI.26}$$

gdzie λ jest wartością własną A, $s = 0, \dots, \mathrm{kr}(\lambda, A) - 1$ i $\mathrm{kr}(\lambda, A)$ oznacza krotność λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego dla A.

B.D.

◇ Znajdowanie rozwiązań równania jednorodnego

Powyższe twierdzenie może być użyte w praktyce do rozwiązywania równań typu (XI.25). Aby wyznaczyć współczynniki liczbowe w kombinacjach liniowych, o których mowa w twierdzeniu traktujemy je jako szukane parametry. Po podstawieniu rozwiązań zapisanych przy ich użyciu do równania oraz do warunków początkowych otrzymamy równania algebraiczne na te parametry. Aby je uzyskać należy wykorzystać następujący fakt, którego dowód jest zadaniem dla Państwa (patrz zadanie 12).

Fakt. *Zbiór funkcji* $\{e_{\lambda,s} : \lambda \text{ jest wartością własną } A,\ s = 0, \dots, \mathrm{kr}(\lambda, A) - 1\}$ *jest układem liniowo niezależnym (m-elementowym).*

Przykład. Rozważmy dwie funkcje y_1, y_2 opisujące zachowanie się pewnych dwóch wielkości fizycznych zależnych od czasu, dla których spełnione są następujące wzajemne relacje. Prędkość zmiany pierwszej wielkości w chwili t jest proporcjonalna do wartości drugiej wielkości ze (stałym) współczynnikiem α. Prędkość zmiany sumy tych wielkości jest proporcjonalna do wartości pierwszej wielkości ze (stałym) współczynnikiem β. Tzn. $y_1'(t) = \alpha y_2(t)$, $(y_1 + y_2)'(t) = \beta y_1(t)$.

Spróbujemy wyznaczyć te funkcje przy założeniu, że w chwili początkowej $t = 0$ obie wielkości miały wartość 1, dla następujących przypadków:

a) $\alpha = 1$, $\beta = 2$;

b) $\alpha = 4$, $\beta = -1$;

c) $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

Z powyższego opisu, po prostym przekształceniu widzimy, że szukane funkcje są rozwiązaniami układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} y_1' = \alpha y_2 \\ y_2' = \beta y_1 - \alpha y_2, \end{cases} \tag{XI.27}$$

co odpowiada równaniu jednorodnemu w postaci (XI.25) z przekształceniem A o macierzy

$$\mathbb{M}_A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny ma zatem postać (λ oznacza tu zmienną dla tego wielomianu):

$$\det(\mathbb{M}_A - \lambda I) = (-\lambda)(-\alpha - \lambda) - \alpha\beta = \lambda^2 + \alpha\lambda - \alpha\beta.$$

$\diamond$ Jednokrotne rzeczywiste wartości własne

Dla przypadku a) mamy więc $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$, czyli wartościami własnymi A (a także $\mathbb{M}_A$) są 1 oraz -2 — obie jednokrotne.

Na mocy twierdzenia XI.5 mamy więc dla pewnych stałych A_1, B_1, A_2, B_2

$$y_1(t) = A_1 e^t + B_1 e^{-2t},$$

$$y_2(t) = A_2 e^t + B_2 e^{-2t}.$$

Stąd, po wstawieniu do (XI.27) otrzymujemy

$$y_1'(t) = A_1 e^t + (-2B_1)e^{-2t} = A_2 e^t + B_2 e^{-2t},$$

$$y_2'(t) = A_2 e^t + (-2B_2)e^{-2t} = (2A_1 - A_2)e^t + (2B_1 - B_2)e^{-2t}.$$

Dzięki liniowej niezależności funkcji „e^t" i „e^{-2t}" (na mocy faktu sformułowanego przed tym przykładem) uzyskujemy następujący układ równań na współczynniki A_1, B_1, A_2, B_2:

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ -2B_1 = B_2 \\ A_2 = 2A_1 - A_2 \\ -2B_2 = 2B_1 - B_2. \end{cases}$$

Jak widać, nie są one niezależne — 3–cie równoważne jest 1–mu, a 4-te — 2–giemu. Jednak mamy też warunki początkowe $y_1(0) = y_2(0) = 1$ skąd

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 1 \\ A_2 + B_2 = 1. \end{cases}$$

W efekcie jedynym rozwiązaniem spełniającym oba układy równań na współczynniki jest

$$A_1 = 1 = A_2, B_1 = 0 = B_2,$$

czyli ostatecznie $y_1(t) = e^t = y_2(t)$.

$\diamond$ Dwukrotna wartość własna

Dla przypadku b) mamy wielomian charakterystyczny $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, czyli -2 jest dwukrotną wartością własną A. A zatem tym razem mamy

$$y_1(t) = (A_1 + B_1 t)e^{-2t},$$

$$y_2(t) = (A_2 + B_2 t)e^{-2t},$$

skąd

$$y_1'(t) = (-2A_1 + B_1 + 2B_1 t)e^{-2t} = (4A_2 + 4B_2 t)e^{-2t},$$

$$y_2'(t) = (-2A_2 + B_2 - 2B_2 t)e^{-2t} = (-A_1 - 4A_2 - B_1 t - 4B_2 t)e^{-2t}.$$

Korzystając więc z liniowej niezależności funkcji „e^{-2t}" i „te^{-2t}" uzyskujemy

$$\begin{cases} -2A_1 + B_1 = 4A_2 \\ -2B_1 = 4B_2 \\ -2A_2 + B_2 = -A_1 - 4A_2 \\ -2B_2 = -B_1 - 4B_2, \end{cases}$$

ale znów nietrudno zauważyć, że układ złożony z dwóch pierwszych równań jest równoważny układowi złożonemu z dwóch ostatnich (co oznacza, że moglibyśmy poprzestać na wypisaniu tylko równań na współczynniki wynikających z równań na y_1' [221]). Warunki początkowe dają nam tym razem

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 1. \end{cases}$$

więc szukanymi współczynnikami są $A_1 = A_2 = 1$, $B_1 = 6$, $B_2 = -3$, czyli $y_1(t) = (1+6t)e^{-2t}$, $y_2(t) = (1-3t)e^{-2t}$.

◇ Nierzeczywista wartość własna

Jak dotąd nie widać było potrzeby rozważania rozwiązań zespolonych, jednak gdy rozważamy przypadek c) uzyskamy wielomian charakterystyczny $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, który nie posiada pierwiastków rzeczywistych ($\Delta = -4$) lecz dwa (jednokrotne) pierwiastki zespolone $-1-i$ oraz $-1+i$. A zatem

$$y_1(t) = A_1 e^{(-1-i)t} + B_1 e^{(-1+i)t}$$
$$y_2(t) = A_2 e^{(-1-i)t} + B_2 e^{(-1+i)t}$$

skąd

$$y_1'(t) = A_1(-1-i)e^{(-1-i)t} + B_1(-1+i)e^{(-1+i)t} = 2A_2 e^{(-1-i)t} + 2B_2 e^{(-1+i)t}$$

i pomijając (przezornie ...) równanie na y_2', ale uwzględniając warunek początkowy uzyskujemy układ równań na współczynniki

$$\begin{cases} (-1-i)A_1 = 2A_2 \\ (-1+i)B_1 = 2B_2 \\ A_1 + B_1 = 1 \\ A_2 + B_2 = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu to $A_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, $B_1 = \overline{A_1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ oraz $A_2 = \frac{1}{2} - i$, $B_2 = \overline{A_2} = \frac{1}{2} + i$. A zatem, stosując wzór

$$ze^{(u+iv)t} + \bar{z}e^{(u-iv)t} = 2e^{ut}\left(\operatorname{Re} z \cos(vt) - \operatorname{Im} z \sin(vt)\right) \tag{XI.28}$$

uzyskujemy

$$y_1(t) = e^{-t}(\cos(t) + 3\sin(t)),$$
$$y_2(t) = e^{-t}(\cos(t) - 2\sin(t)).$$

◇ Jak ominąć rozwiązania zespolone

Doświadczenie nabyte po rozwiązaniu powyższego przykładu — pkt. c) pozwala na sformułowanie następującej uwagi

Uwaga. Ponieważ macierz przekształcenia A ma wyrazy rzeczywiste, zatem wielomian charakterystyczny dla A ma rzeczywiste współczynniki. Jeżeli więc $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ jest wartością własną A, to także $\bar{\lambda}$ jest taką wartością własną oraz krotności λ i $\bar{\lambda}$ są te same[222] . Jeżeli zatem poszukujemy rzeczywistego rozwiązania równania jednorodnego, (XI.25), które jest kombinacją opisaną w twierdzeniu XI.5 posiadającą przy $t^s e^{\lambda t}$ współczynnik z, to musi ona posiadać przy $t^s e^{\bar{\lambda} t}$ współczynnik $\bar{z}$. Jeżeli więc $\lambda = u + iv$, to na mocy (XI.28) mamy

$$zt^s e^{\lambda t} + \bar{z}t^s e^{\bar{\lambda} t} = 2t^s e^{ut}(\operatorname{Re} z \cos(vt) - \operatorname{Im} z \sin(vt)).$$

[221] Warto pomyśleć nad pytaniem, czy jest w tym jakaś reguła ...
[222] To znany fakt algebraiczny, ale zachęcam do samodzielnego dowodu.

A zatem parę funkcji $e_{\lambda,s}$, $e_{\overline{\lambda},s}$ z twierdzenia XI.5 możemy w tej sytuacji zastąpić parą zadaną wzorami
$$t^s e^{ut}\cos(vt), \quad t^s e^{ut}\sin(vt).$$
Często tak zmieniony układ funkcji — choć może trudniejszy do zapamiętania — jest wygodniejszy w użyciu, gdy chcemy znaleźć jawną postać rozwiązania y_i. Warto używając tej modyfikacji jeszcze raz rozwiązać punkt c) — proszę spróbować.

◇ Algebraiczne własności zbioru rozwiązań równania liniowego

Na koniec rozważań dotyczących układów równań liniowych zajmiemy się właśnie ową liniowością, która jak się okazuje nie dotyczy jedynie samej postaci rozważanych równań, ale ma także swoje odzwierciedlenie we własnościach całego zbioru rozwiązań równania. Rozważmy osobno wersję jednorodną ogólnego równania (XI.24):
$$y' = A(t)(y). \tag{XI.29}$$
Niech $\mathrm{Fun}_m(a;b)$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich funkcji określonych na $(a;b)$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$.[223)]

Fakt. *Zbiór Y_0 wszystkich globalnych rozwiązań*[224)] *równania* (XI.29) *jest m–wymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni* $\mathrm{Fun}_m(a;b)$. *Jeżeli $\tilde{y}$ jest pewnym rozwiązaniem globalnym ogólnego równania* (XI.24)*, to zbiór Y wszystkich rozwiązań globalnych tego równania ma postać*
$$\tilde{y} + Y_0 := \{\tilde{y} + y : y \in Y_0\}.$$

Dowód.
Niech $x, y \in Y_0$. A zatem dla dowolnego $t \in (a;b)$ mamy $x'(t) = A(t)(x(t))$ oraz $y'(t) = A(t)(y(t))$. Stąd na mocy liniowości $A(t)$
$$(x+y)'(t) = x'(t) + y'(t) = A(t)(x(t)) + A(t)(y(t)) = A(t)(x(t) + y(t)) = A(t)((x+y)(t)).$$
A zatem $x + y \in Y_0$. Podobnie, gdy $\alpha \in \mathbb{R}$, to $\alpha x \in Y_0$. Zatem Y_0 jest podprzestrzenią liniową $\mathrm{Fun}_m(a;b)$. Ustalmy pewne $t_0 \in (a;b)$ i niech dla $v \in \mathbb{R}^m$ symbol y_v oznacza takie globalne rozwiązanie równania (XI.29), które spełnia warunek początkowy $y_v(t_0) = v$. Rozważmy przekształcenie $\Phi : \mathbb{R}^m \to Y_0$ zadane dla $v \in \mathbb{R}^m$ wzorem
$$\Phi(v) = y_v.$$
Zauważmy najpierw, że
$$\Phi(v + w) = y_{v+w} = y_v + y_w,$$
gdyż $y_v + y_w$ jest rozwiązaniem globalnym (XI.29) oraz $(y_v + y_w)(t_0) = y_v(t_0) + y_w(t_0) = v + w$. Zatem $\Phi(v + w) = \Phi(v) + \Phi(w)$. Analogicznie dowodzi się, że $\Phi(\alpha v) = \alpha y_v = \alpha\Phi(v)$, więc Φ jest przekształceniem liniowym. Oczywiście Φ jest „na" Y_0, gdyż każdy element $y \in Y$ jest pewnym rozwiązaniem globalnym (XI.29), więc $y = y_v$ dla $v = y(t_0)$. Ponadto jeżeli $\Phi(v) = 0$, to w szczególności $y_v(t_0) = 0$, ale $y_v(t_0) = v$, więc $v = 0$. Zatem $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$. Φ jest zatem izomorfizmem liniowym na Y_0, stąd $\dim Y_0 = \dim \mathbb{R}^m = m$. Aby wykazać, że $Y = \tilde{y} + Y_0$ zauważmy najpierw, że gdy $y \in Y_0$, to dla $t \in (a;b)$ zachodzi
$$(\tilde{y} + y)'(t) = \tilde{y}'(t) + y'(t) = A(t)(\tilde{y}(t)) + \beta(t) + A(t)(y(t)) = A(t)((\tilde{y} + y)(t)) + \beta(t),$$

223) Chodzi tu oczywiście o przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$ ze zwykłymi działaniami na funkcjach — np. $(f+g)(t) := f(t) + g(t)$ dla $t \in (a;b)$. Ma ona wymiar nieskończony.

224) Jeśli chcielibyśmy rozważać rozwiązania zespolone to $\mathrm{Fun}_m(a;b)$ powinno oznaczać przestrzeń liniową nad $\mathbb{C}$ funkcji o wartościach w $\mathbb{C}^m$ i wtedy treść tego faktu przenosi się w pełni.

skąd $\tilde{y} + y \in Y$. Mamy więc $Y \supset \tilde{y} + Y_0$. Jeżeli $y \in Y$, to dla $t \in (a;b)$ zachodzi $(y - \tilde{y})'(t) = A(t)(y(t)) + \beta(t) - A(t)(\tilde{y}(t)) - \beta(t) = A(t)((y - \tilde{y})(t))$. Oznacza to, że $y - \tilde{y} \in Y_0$, czyli $y \in \tilde{y} + Y_0$, co daje „$\subset$". □

Udowoniony fakt pozwala na znalezienie wszystkich rozwiązań ogólnego równania (XI.24), o ile umiemy znaleźć choć jedno jego rozwiązanie globalne i wszystkie rozwiązania globalne równania jednorodnego. A ze względu na to, że $\dim Y_0 = m$, aby znać wszystkie rozwiązania równania jednorodnego wystarczy, że będziemy znali jakikolwiek układ złożony z m liniowo niezależnych rozwiązań globalnych — układ taki stanowi bowiem bazę przestrzeni Y_0 — nazywany jest także *układem fundamentalnym*.

5. O równaniach skalarnych wyższych rzędów

Mówiliśmy dotąd właściwie wyłącznie o równaniach rzędu 1, tzn. takich, w których najwyższy rząd pochodnej pojawiający się w równaniu wynosił 1. Co jednak można zrobić, gdy pojawiają się pochodne wyższych rzędów? Okazuje się, że gdy ograniczymy się do równań skalarnych dających się zapisać w postaci

$$y^{(n)} = F(t, y^{(0)}, \ldots, y^{(n-1)}), \tag{XI.30}$$

gdzie y jest szukaną funkcją zmiennej rzeczywistej t o wartościach w $\mathbb{R}$, a F jest pewną funkcją określoną na podzbiorze D zbioru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}$, to znajdowanie rozwiązań łatwo sprowadzić do rozwiązywania równania rzędu 1 typu (XI.2). Choć już wektorowego, nie skalarnego! Dla ścisłości należy tylko wyjaśnić, że rozwiązaniem równania zapisanego skrótowo w postaci (XI.30) nazywamy (podobnie jak w przypadku równania (XI.2)) każdą funkcję $y : I \to \mathbb{R}$ różniczkowalną n–krotnie (I — przedział niezerowej długości) spełniającą dla dowolnego $t \in I$

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)).$$

◇ Sprowadzanie równania rzędu n do układu rzędu 1

Pomysł metody sprowadzania równania (XI.30) do równania (XI.2) przypomina nieco pomysł użyty przy sprowadzaniu równania (XI.2) do postaci autonomicznej, omawiany w podrozdziale 3. Zacznijmy od przykładu.

Przykład. Jak zabrać się za rozwiązywanie następujacego równania skalarnego rzedu 2

$$y'' = y' + 7y + t\ ?$$

Zauważmy, że to samo równanie można równoważnie zapisać w postaci układu dwóch równań:

$$(y)' = y', \quad (y')' = 7y + y' + t,$$

i choć pierwsze z nich wydaje się bezwarościowe, to jednak może się okazać istotne, gdy potraktujemy y i y' jako odrębne poszukiwane funkcje skalarne. Tzn. zróbmy tak: zwiążmy z poszukiwanym skalarnym rozwiązaniem $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ pomocniczą funkcję wektorową $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zadaną wzorem

$$x(t) := (y(t), y'(t)),$$

tzn. $x(t) = (x_0(t), x_1(t))$, gdzie $x_0(t) = y(t)$ oraz $x_1(t) = y'(t)$ (tu, przez analogię do numeracji rzędu pochodnej, współrzędne numerujemy od 0, zamiast od 1). Teraz zatem widzimy, że spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = 7x_0 + x_1 + t, \end{cases}$$

który umiecie Państwo rozwiązać w oparciu o wiedzę z poprzednich podrozdziałów (jak...?). Można też oczywiście ten układ zapisać w postaci jednego równania pierwszego rzędu na funkcję wektorową x:

$$x' = \tilde{F}(t, x),$$

gdzie $\tilde{F}(t, x_0, x_1) := (x_1, 7x_0 + x_1 + t)$.

⋄ Jak to zrobić ogólnie

Teraz widać już chyba co należy zrobić ogólnie. Tym razem dla funkcji $I \ni t \rightsquigarrow y(t) \in \mathbb{R}$ rozważmy wyznaczoną przez nią jednoznacznie funkcję $I \ni t \rightsquigarrow (y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{R}^n$ i oznaczmy ją przez $\tilde{y}$. Fakt, że y spełnia (XI.30) oznacza dokładnie to samo, co fakt, że

$$\begin{cases} y'(t) = y^{(1)}(t) \\ (y^{(1)})'(t) = y^{(2)}(t) \\ \vdots \\ (y^{(n-1)})'(t) = F(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)). \end{cases}$$

A zatem przy przyjętych oznaczeniach, y jest rozwiązaniem (XI.30) wtw $\tilde{y}$ jest rozwiązaniem równania

$$\tilde{y}' = \tilde{F}(t, \tilde{y}), \tag{XI.31}$$

gdzie $\tilde{F} : D \to \mathbb{R}^n$ dla $(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D$ określona jest wzorem

$$\tilde{F}(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) := (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, F(t, y_0, \ldots, y_{n-1})).$$

⋄ Zagadnienie Cauchy'ego ponownie

Zagadnienie Cauchy'ego dla równania (XI.31) to problem, w którym poza samym równaniem zadana jest ustalona wartość rozwiązania w pewnym punkcie t_0, czyli $\tilde{y}(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$. Odpowiada to warunkom

$$\begin{cases} y(t) = (y_0)_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t) = (y_0)_n. \end{cases} \tag{XI.32}$$

Dlatego też zagadnienie znalezienia rozwiązania równania (XI.30) spełniającego warunki (XI.32) nazywa się *zagadnieniem Cauchy'ego dla równania n–tego rzędu* (XI.30).

⋄ Rozwiązywanie liniowych jednorodnych równań rzędu n o stałych współczynnikach

Szczególnym przypadkiem równania rzędu n jest tzw. *równanie liniowe jednorodne rzędu n o stałych współczynnikach:*

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y^{(1)} + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}, \tag{XI.33}$$

gdzie $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Opisana wyżej metoda sprowadza problem rozwiązania tego równania, do problemu

$$\tilde{y}' = A\tilde{y},$$

gdzie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem liniowym o macierzy

$$\mathbb{M}_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{XI.34}$$

Oczywiście możemy także mówić o zespolonych rozwiązaniach równania (XI.33) (liczę, że potrzebne formalne definicje każdy ze słuchaczy jest w stanie sformułować samodzielnie). Dzięki twierdzeniu XI.5 uzyskujemy natychmiast następujący rezultat (należy tylko zauważyć, że y z równania (XI.33) odpowiada teraz funkcji $(\tilde{y})_1$).

Fakt. *Jeżeli $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jest zespolonym rozwiązaniem równania jednorodnego rzędu n–tego* (XI.33)*, to y jest kombinacją liniową funkcji $e_{\lambda,s}$ z twierdzenia XI.5, gdzie A jest przekształceniem liniowym o macierzy* (XI.34)*.*

Oczywiście, gdy szukamy rozwiązań rzeczywistych, warto pamiętać o uwadze ze strony 228, która pozwala czasem zbiór powyższych funkcji typu $e_{\lambda,s}$ zmodyfikować do nieco innej formy.

◇ Oscylator harmoniczny

Jako przykład rozważmy równanie różniczkowe opisujące zachowanie się tzw. *oscylatora harmonicznego*, znanego być może niektórym z Państwa z lekcji fizyki. Ma ono postać

$$y'' = -ky,$$

gdzie k jest pewną dodatnią stałą. Funkcja y opisuje w przybliżeniu np. wychylenie wahadła wykonującego „małe” drgania w polu grawitacyjnym Ziemi, w zależności od czasu. Wówczas $k = \frac{g}{l}$, gdzie g — to znana stała — przyspieszenie grawitacyjne Ziemi, a l — długość wahadła.

W tym wypadku mamy

$$\mathbb{M}_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix},$$

więc wielomian charakterystyczny ma postać $\lambda^2 + k$. Ponieważ $k > 0$, zatem pierwiastki (wzajemnie sprzężone), to $\pm\sqrt{k}i$. Rozwiązanie ma zatem postać

$$y(t) = \alpha \cos(\sqrt{k}t) + \beta \sin(\sqrt{k}t),$$

przy czym α i β mogą być dowolne (można to sprawdzić choćby podstawiając do równania) i można je wyznaczyć, gdy zadamy konkretne warunki początkowe w chwili $t_0 = 0$, tzn. $y(0)$ oraz $y'(0)$. Mamy bowiem $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \sqrt{k}t\beta$. Funkcja y jest więc okresowa — ma okres $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$. Można też, korzystając ze wzorów trygonometrycznych, zapisać ją w postaci

$$y(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\sqrt{k}t + \phi_0),$$

gdzie

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\phi_0) = \alpha, \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\phi_0) = \beta.$$

Zadania do Rozdziału XI

$\forall$ 1. Rozważamy równanie różniczkowe skalarne $y' = y$ z warunkami początkowym $y(0) = y_0$, gdzie y_0 jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Wylicz wartość n–tego wyrazu ciągu kolejnych przybliżeń y_n dla rozwiązania tego równania w punkcie $t \in \mathbb{R}$ dla wszystkich n oraz t. **Nie** korzystając z twierdzenie XI.1 sprawdź, że $y_n \to y$, gdzie y — rozwiązanie globalne (określone na $\mathbb{R}$) powyższego zagadnienia Cauchy'ego.

$\forall$ [225] 2. Znajdź rozwiązania (w miarę możliwości globalna albo integralne) poniższych równań różniczkowych skalarnych pierwszego rzędu z zadanymi warunkami początkowymi

(a) $y' = te^{3t}$, $y(0) = 1$
(b) $\frac{dy}{dt} = \sin^3(t)$, $y(\pi) = \frac{2}{3}$
(c) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y(t)}$, $y(0) = 1$
(d) $f(t)' = \frac{1}{(f(t))^3}$, $f(1) = -2$
(e) $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1$
(f) $\dot{x} = x^2$, $x(0) = -1$
(g) $y' = 17y$, $y(2) = 3$
(h) $y' = 17y + 5$, $y(2) = -1$
(i) $y' = \cos^2(y) \cdot \sin^2(t)$, $y(0) = 0$
(j) $y' = y \cdot \ln(t)$, $y(1) = 7$
(k) $\frac{dy}{dt} = y^5 \cdot \operatorname{arctg}(t)$, $y(1) = -2$
(l) $f' = e^f$, $f(0) = -1$
(m) $x' = 7x + t$, $x(0) = 1$
(n) $\frac{dx}{dt} = -x + t^2$, $x(0) = 0$
(o) $f'(x) = -2f(x) + \sin(x)$, $f(0) = 2$
(p) $y' = y + t^n e^t$, $y(1) = 1$ ($n \in \mathbb{N}$, n ustalone)
(q) $y' = 2y + t^5 e^t$, $y(0) = 0$
(r) $f'(x) = f(x) + \sin(x)$, $f(0) = -\frac{1}{2}$.

$\forall$ [226] 3. Znajdź rozwiązania globalne (określona na $\mathbb{R}$) poniższych układów równań z zadanymi warunkami początkowymi

(a)
$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 7y_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} y_1' = -2y_2 \\ y_2' = 2y_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

[225] Przynajmniej 5 spośród a — l i 3 spośród (m) — (r).
[226] Przynajmniej 5 przykładów, w tym (e) lub (g).

(d)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 3 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = y_2 + t \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}, \quad y_1(0) = y_2(0) = 1$$

(g)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + e^t \\ y_2' = y_1 - e^t \end{cases}, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

(h)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 2 \\ y_3(0) = 3 \end{cases}$$

$\forall$ 4. Niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ dla $y \in \mathbb{R}$.

(a) Wykaż, że zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

posiada conajmniej dwa różne rozwiązania określone na całym $\mathbb{R}$.

(b) Czy nie stanowi to sprzeczności z twierdzeniem o równaniu „o zmiennych rozdzielonych" (tw. XI.2) lub z globalnym twierdzeniem o istnieniu i jednoznaczności (tw. XI.1)?

(c) Wykaż, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje nieskończenie wiele różnych rozwiązań tego zagadnienia Cauchy'ego określonych na $(-\epsilon; \epsilon)$.

(d) Czy każde rozwiązanie powyższego równania posiada jednoznaczne przedłużenie do rozwiązania integralnego?

$\forall$ 5. Padający równomiernie deszcz ze stałą intensywnością 2 l/m^2 na 1 godz. kapie do odkrytej walcowatej beczki o wysokości 2 m i powierzchni podstawy $0,5m^2$. Beczka ta ma we dnie dziurę. Wyciekanie wody przez dziurę jest proporcjonalne do ciśnienia wody w beczce i dla wycieku liczonego w litrach na 1 godzinę oraz ciśnienia wyrażonego w kG/m^2 współczynnik proporcjonalności wynosi a. Znajdź równanie różniczkowe opisujące zachowanie się wysokości wody w beczce w zależności od czasu (liczonego w godzinach), przy założeniu, że beczka nie jest pełna ani pusta w opisywanym momencie. Znajdź rozwiązania globalne uzyskanego równania i przy ich użyciu opisz zachowanie się rzeczywistej wysokości wody w beczce w zależności od wysokości $w_0 \in (0; 2)$ w chwili początkowej $t = 0$ oraz wartości współczynnika $a \geqslant 0$. W szczególności zbadaj przypadki $a = \frac{1}{2}; 1; 2$.

$\forall$ 6. Szybkość stygnięcia rozgrzanego przedmiotu jest proporcjonalna do różnicy temperatury tego przedmiotu i temperatury otaczającego je powietrza. Zakładamy, że w procesie stygnięcia tego przedmiotu otaczające powietrze nagrzewa się w sposób „pomijalny". Otaczające powietrze ma temperaturę 20° C, a przedmiot ostygł z temperatury 100° C do 60° C w ciągu 20 minut. W ciągu ilu kolejnych minut jego temperatura obniży się do 30° C? A do 20° C?

$\forall$ 7. Do zamkniętego izolowanego naczynia wypełnionego powietrzem o temperaturze 20° C wrzucono kawałek metalu o temperaturze 100° C. Szybkość stygnięcia tego kawałka metalu jest proporcjonalna w każdej chwili do różnicy temperatury metalu i jego otoczenia i podobnie szybkość nagrzewania się powietrza w naczyniu jest proporcjonalna do tej różnicy, ale z 5–cio krotnie większym współczynnikiem proporcjonalności. Po upływie 1 godziny różnica temperatur metalu i powietrza wyniosła $40°C$. Po jakim czasie różnica ta wyniesie 20° C? Jaka będzie wówczas temperatura metalu?

8. Znajdź wzory opisujące rozwiązania integralne (włącznie z ich dziedzinami) równania logistycznego (XI.11), w którym prawa strona traktowana jest jako funkcja „od y" określona na

   (a) $(0; \frac{w_b}{r})$,

   (b) $(\frac{w_b}{r}; +\infty)$.

   Wykaż, że w obu przypadkach granica każdego takiego rozwiązania w $+\infty$ równa jest $\frac{w_b}{r}$.

9. Uogólnij przykład dla modelu mutacji ze strony 217 na hipotetyczny przypadek N różnych rodzajów nukleotydów. Znajdź wzór opisujący P_Y i granicę P_Y w $+\infty$.

$\forall$ 10. Naszkicuj obrazek przedstawiający pole wektorowe, znajdź i naszkicuj orbity oraz znajdź pewną nietrywialną (różną od stałej) całkę pierwszą dla równań wektorowych odpowiadających następującym układom równań różniczkowych skalarnych:

   (a)
   $$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{cases}$$

   (c)
   $$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{cases}$$

   (d)
   $$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

11. Sprawdź, że funkcja określona w przykładzie 2 ze strony 223 jest całką pierwszą dla układu Lotki–Volterry przy $\gamma, k > 0$.

12. Wykaż fakt ze strony 226.

$\forall$ [227] 13. Znajdź wszystkie globalne (określone na $\mathbb{R}$) rozwiązania poniższych równań różniczkowych wyższych rzędów z zadanymi dodatkowymi warunkami

   (a) $f'' = 2f' + 3f$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$

   (b) $\ddot{x} = -\dot{x} + x$, $x(1) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$

   (c) $y'' = 3\sqrt{3}y' - 6y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \sqrt{3}$

[227] Przynajmniej 5 przykładów w tym d) oraz j) lub k).

(d) $y'' = 2y' - y$, $y(0) = y(1) = 0$

(e) $y'' = -2y' - 3y$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$

(f) $y'' = -y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(g) $y'' = 17$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 11$

(h) $y''' = \frac{1}{2}(y' + y'')$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

(i) $y''' = \frac{8}{7}(y + y' + y'')$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$

(j) $y'' = \frac{1}{2}(y' + e^t)$, $y(0) = y'(0) = 1$

(k) $y'' = \frac{1}{2}(y + e^t)$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Spis symboli i skrótów

Skorowidz

[228] Niels Henrik Abel (ur. 1802, zm. 1829): norweski matematyk

[229] Archimedes z Syrakus (ur. 287 p.n.e., zm. 212 p.n.e.): grecki matematyk

[230] Jakub Bernoulli (ur. 1654, zm. 1705): szwajcarski matematyk

[231] Bernard Bolzano (ur. 1781, zm. 1848): czeski matematyk

[232] Georg Cantor (ur. 1845, zm. 1918): niemiecki matematyk

[233] Augustin Louis Cauchy (ur. 1789, zm. 1857): francuski matematyk

[234] Ernesto Cesaro (ur. 1859, zm. 1906): włoski matematyk

[235)] Jean Le Rond d'Alembert (ur. 1717, zm. 1783): francuski matematyk
[236)] Jean Darboux (ur. 1842, zm. 1917): francuski matematyk
[237)] Guillaume de l'Hospital (ur. 1661, zm. 1704): francuski matematyk
[238)] Abraham de Moivre (ur. 1667, zm. 1754): francuski matematyk
[239)] Augustus de Morgan (ur. 1806, zm. 1871): angielski matematyk

[240)] Paul Dirac (ur. 1902, zm. 1984): angielski matematyk
[241)] Johann Dirichlet (ur. 1805, zm. 1859): niemiecki matematyk

242) Leonard Euler (ur. 1707, zm. 1783): szwajcarski matematyk
243) Joseph Fourier (ur. 1768, zm. 1830): francuski matematyk
244) Guido Fubini (ur. 1879, zm. 1943): włoski matematyk

245) Otto Hölder (ur. 1859, zm. 1937): niemiecki matematyk

[246] Eduard Heine (ur. 1821, zm. 1881): niemiecki matematyk
[247] Otto Hesse (ur. 1811, zm. 1874): niemiecki matematyk
[248] Carl Jakobi (ur. 1804, zm. 1851): pruski matematyk
[249] Johan Jensen (ur. 1859, zm. 1925): duński matematyk
[250] Joseph Lagrange (ur. 1736, zm. 1813): francuski matematyk
[251] Henri Lebesgue (ur. 1875, zm. 1941): francuski matematyk
[252] Gottfried Leibniz (ur. 1646, zm. 1716): niemiecki uczony

[253] Alfred Lotka (ur. 1880, zm. 1949): amerykański matematyk
[254] Colin Maclaurin (ur. 1698, zm. 1746): szkocki matematyk
[255] Thomas Malthus (ur. 1766, zm. 1834): angielski matematyk
[256] Franz Mertens (ur. 1840, zm. 1927): niemiecki matematyk

[257] sir Izaak Newton (ur. 1643, zm. 1727): angielski uczony

258) Giuseppe Peano (ur. 1858, zm. 1932): włoski matematyk
259) Charles Picard (ur. 1856, zm. 1941): francuski matematyk

[260] Joseph Raabe (ur. 1801, zm. 1859): szwajcarski matematyk
[261] Georg Riemann (ur. 1826, zm. 1866): niemiecki matematyk
[262] Michel Rolle (ur. 1652, zm. 1719): francuski matematyk

[263] Otto Stolz (ur. 1842, zm. 1905): matematyk austriacki
[264] James Sylwester (ur. 1814, zm. 1897): angielski matematyk

265) Brook Taylor (ur. 1685, zm. 1731): angielski matematyk
266) Leonid Tonelli (ur. 1885, zm. 1946): włoski matematyk

267) Pierre Verhulst (ur. 1804, zm. 1849): belgijski matematyk
268) Giuseppe Vitali (ur. 1875, zm. 1932): włoski matematyk
269) Vito Volterra (ur. 1860, zm. 1940): włoski matematyk
270) Karl Weierstrass (ur. 1815, zm. 1897): niemiecki matematyk