Egzamin AF I - sem. zim. 2016/17 3 II 2017

Uwaga. *W poniższych zadaniach:*

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$*;*
- *norma dla wskazanych przestrzeni unormowanych jest przyjęta jako ta standardowo w nich rozważana, jeśli nie została określona inaczej;*
- *na* $\mathbb{R}$ *i na* $[a; b]$ *jako miarę wybieramy miarę Lebesgue'a;*

---

1. **[16 p.]** Dla zespolonej przestrzeni **liniowej** $X = C((0;1))$ (funkcje ciągłe określone na (0; 1)) wskaż dwa przykłady X_1, X_2 jej podprzestrzeni liniowych nieskończonego wymiaru, różnych od X oraz norm $\|\cdot\|_i$ w X_i, $i = 1, 2$ takich, że $(X_1, \|\cdot\|_1)$ jest przestrzenią Banacha, a $(X_2, \|\cdot\|_2)$ nie jest. Wykaż poprawność wskazanych przykładów, powołując się szczegółowo na odpowiednie rezultaty z wykładu (podając nazwy lub sformułowania).

2. **[34 p.]** Sformułuj twierdzenie „Abstrakcyjne twierdzenie Hahna-Banacha" ("The Abstract Hahn-Banach Theorem") i przytocz jego **dowód** (wraz z odpowiednimi lematami i ich dowodami).

---

3. **[16 p.]** Niech $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ oraz

$$V := \{x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{4} x_n = \sum_{n=1}^{4} (-1)^n x_n = 0\}.$$

Niech $P_1, P_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ będą rzutami ortogonalnymi w $\mathcal{H}$, odpowiednio na V oraz na $V^\perp$. Znajdź $P_1 a$ i $P_2 a$ dla $a = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n \geqslant 1}$

4. **[34 p.]** Niech $\alpha = \frac{1}{2017}$. Rozważamy przekształcenie A określone na $X := L^2([0;1])$, przyporządkowujące każdemu $f \in L^2([0;1])$ element Af z $L^2([0;1])$ zadany jako (poniżej zapis nieformalny, "funkcyjny")

$$Af(t) = f(t^\alpha), \qquad t \in [0;1].$$

(i) Podaj 100% ścisłe sformułowanie definicji powyższego przekształcenia.

(ii) Wykaż, że A zdefiniowane w (i) jest poprawnie określonym operatorem liniowym w $L^2([0;1])$.

(iii) Zbadaj ciągłość A. W przypadku ciągłości oblicz normę A.

(iv) Zbadaj ciągłość operatora B odwrotnego do $A : X \longrightarrow Y$, gdzie $Y := \mathrm{Ran}(A)$ (Y traktujemy jako podprzestrzeń unormowaną X).

(v) Wykaż, że B opisany wyżej ma domknięty wykres.

(vi) Zbadaj, czy Y jest domkniętą podprzestrzenią X.