

część I — 1 godz. 20 min.

1. [50 p.] Podaj:

(i – 3 p.) przykład przestrzeni unormowanej (z opisem normy), która nie jest przestrzenią Banacha:

(ii – 4 p.) znane Ci warunki równoważne ciągłości dla funkcjonału liniowego określonego na przestrzeni unormowanej (przynajmniej dwa odmienne od *ciągłości*):

(iii – 3 p.) przykład niezerowego funkcjonału liniowego ciągłego określonego na przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$:

(iv – 4 p.) sformułowanie twierdzenia „Zasada minimalnej odległości” (“The Minimal Distance Principle”, dotyczące punktu i podzbioru w przestrzeni Hilberta):

(v – 4 p.) definicję i znane Ci własności dopełnienia ortogonalnego poprzestrzeni Y przestrzeni Hilberta:

(vi – 4 p.) definicję przestrzeni sprzężonej (do p. unormowanej) i włożenia kanonicznego X w X^{**} :

(vii – 4 p.) przykład nieodwracalnego operatora liniowego otwartego („pomiędzy” przestrzeniami unormowanymi):

(viii – 3 p.) definicję operatora liniowego domkniętego („pomiędzy” przestrzeniami unormowanymi):

(ix – 3 p.) definicję operatora liniowego zwartego („pomiędzy” przestrzeniami unormowanymi):

(x – 3 p.) definicję widma operatora liniowego w przestrzeni liniowej:

(xi – 3 p.) definicję operatora sprzężonego (hilbertowsko) do operatora $A \in B(X, Y)$:

(xii – 12 p.) sformułowanie i dowód twierdzenia „O zupełności $B(X, Y)$ ”:

część II — 1 godz. 20 min.

Uwaga.

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$;
 - norma dla wskazanych przestrzeni unormowanych jest przyjęta jako ta standardowo w nich rozważana, jeśli nie została określona inaczej.
-

Dla poniższych czterech zadań oznaczamy:

$$\mathcal{H} := l^2(\mathbb{N}), \quad X := C([0; 1]).$$

2. [10 p.] Rozważamy przekształcenie $A : X \longrightarrow \mathcal{H}$ zadane wzorem

$$(A(f))(n) := \int_{[0; \frac{1}{2^n}]} f(s) ds \quad \text{dla } f \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wykaż, że przekształcenie to jest poprawnie określone oraz, że jest operatorem liniowym ograniczonym.

3. [15 p.] Znajdź normę operatorową powyższego A , a także operatora $A_0 : X_0 \longrightarrow \mathcal{H}$, zadanego jako $A_0 := A|_{X_0}$, gdzie $X_0 := \{f \in X : f(0) = 0\}$.
4. [12,5 p.] Zbadaj, czy operator A jest zwarty.
5. [12,5 p.] Zbadaj, czy operator A_0 ma gęsty obraz.