density separability series and basis

3. Liniowa gęstość, ośrodkowość, szeregi i bazy Schaudera

W tym ostatnim podrozdziale omówimy kilka, wspomnianych w tytule, ogólnych pojęć przydatnych w teorii przestrzeni Banacha.

3.1 Liniowa gęstość i ośrodkowość

Przypominamy, że gęstość podzbioru C przestrzeni topologicznej X oznacza po prostu że $\overline{C} = X$. Dla przestrzeni unormowanej X zdefiniujemy słabszy warunek – liniową gęstość.

$\boxed{\text{Definicja}}$ Niech $C \subset X$.
C jest liniowo-gęsty wtw $\operatorname{lin} C$ jest gęsty
(tzn. $\overline{\operatorname{lin} C} = X$ *)).

Oczywiście z gęstości wynika liniowa gęstość (bo $\operatorname{lin} C \supset C$) jednak odwrotnie już nie. Można jednak uzyskać łatwo wynik niejako „pośredni". Oznaczmy

$\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} C :=$ zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów z C o współczynnikach wymiernych (w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bądź odpowiednio z $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

It's not the same that you can find

*) Jednak to nie to samo często, co $\operatorname{lin}(\overline{C}) = X$ … – warto

an ex.

znaleźć przykład … $\longrightarrow$.

Mamy więc
$$C \subset \operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} C \subset \operatorname{lin} C \qquad (1)$$
i zachodzi

$\boxed{\text{Fakt}}$

C jest liniowo gęsty wtw $\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} C$ jest gęsty.

$\boxed{\text{Dowód}}$ „$\Leftarrow$" – jasne z (1).

„$\Rightarrow$". Przypuśćmy, że C liniowo gęsty i niech $\forall \varepsilon > 0$. (x ∈ X oraz)
Wystarczy znaleźć $x' \in \operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} C$ takie, że $\|x' - x\| < \varepsilon$. Wybierzmy więc najpierw $\tilde{x} \in \operatorname{lin} C$ taki, że $\|\tilde{x} - x\| < \varepsilon/2$, ma on postać
$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{\lambda}_k c_k$$
dla pewnych $m \geq 1$, $\tilde{\lambda}_1, \dots \tilde{\lambda}_m \in \mathbb{K}$, $c_1, \dots c_m \in C$.
Wystarczy teraz znaleźć $\lambda'_1, \dots \lambda'_m \in \mathbb{Q}$ /odpowiednio $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ takie, że x' dany wzorem
$$x' := \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k c_k$$
spełnia warunek
$$\|x' - \tilde{x}\| < \varepsilon/2 .$$
Ale takie $\lambda'_1, \dots \lambda'_m$ istnieją, wystarczy bowiem ...

C.D. $\longrightarrow$ $\triangle$.

Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczna jest ośrodkowa [separability] wtw posiada podzbiór co najwyżej [at most] przeliczalny [countable], gęsty [dense].

Wiele przestrzeni Banacha, które będziemy rozważać będzie ośrodkowych, choć nie wszystkie. W niektórych problemach ośrodkowość odgrywa istotną rolę. Dlatego wygodny bywa następujący wynik, który pozwala się w tym przypadku zajmować podzbiorami „tylko" liniowo-gęstymi, zamiast „aż" gęstymi...

Fakt („Ośrodkowość z liniowej gęstości")

Przestrzeń unormowana jest ośrodkowa wtw posiada co najwyżej przeliczalny podzbiór liniowo gęsty.

Dowód

$\Rightarrow$ - oczywiste, bo podzbiór gęsty jest „tym bardziej" liniowo gęsty

$\Leftarrow$ Niech C będzie co najwyżej przeliczalnym podzbiorem X - unormowanej, liniowo gęstym w X. Niech $\tilde{C} := \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}} C$. Na mocy poprzedniego faktu $\tilde{C}$ jest [is] gęsty [dense]. Ponadto [Moreover] nietrudno sprawdzić (niewielkie [recall] przypomnienie Wstępu do Matematyki /Teorii Mnogości [set Theory] ...) $\longrightarrow$ *), że $\tilde{C}$ jest [is] też [also] zbiorem co najwyżej [at most] przeliczalnym [countable] *) (choć np. $\mathrm{lin}\, C$ już raczej nie...). $\tilde{C}$ jest więc ośrodkiem. $\square$

---

*) Wskazówka [Hint]: Proszę się najpierw zająć [Please do it first for] mocą zbioru złożonego z wszystkich [cardinality of the set consisting of all] kombinacji [combinations] m-elementowych [for m elements] o odpowiednich współczynnikach [of C], przy ustalonym [for fixed m ∈ N₁] $m \in \mathbb{N}_1$.

[Hint to prove it]

Przykłady

1. $\ell^p(\mathbb{N})$ jest ośrodkowa dla $p\in[1;+\infty)$.
By to wykazać rozważmy dla każdego $n\in\mathbb{N}$ funkcję/ciąg $e_n \in \ell(\mathbb{N})$ zadaną wzorem
$$e_n(k):=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases},\qquad k\in\mathbb{N}.$$
Oczywiście $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ e_n\in\ell^p(\mathbb{N})$, ponadto łatwo zauważyć $(\to\triangle)$, że
$$\mathrm{lin}\{e_n : n\in\mathbb{N}\} = \ell_{fin}(\mathbb{N}).$$
Zatem liniowa gęstość zbioru $C:=\{e_n:n\in\mathbb{N}\}$ to gęstość $\ell_{fin}(\mathbb{N})$ w $\ell^p(\mathbb{N})$, którą nietrudno sprawdzić — zostawiam to jako (pouczające) ćwiczenie $\to\triangle$. W efekcie C jest przeliczalnym podzbiorem liniowo gęstym, stąd ośrodkowość dzięki poprzedniemu faktowi.

2. $\ell^p_w(\mathbb{I})$ jest ośrodkowa dla każdego $\emptyset\neq\mathbb{I}$ - co najwyżej przeliczalnego, $p\in[1;+\infty)$ oraz $w>0$. Dowód analogiczny do tego z przykł. 1 $\to\triangle$.

3. $\ell^\infty(\Omega)$ nie jest ośrodkowa, jeśli Ω jest zbiorem nieskończonym (a gdy Ω - skończony, to jest, bo ...). Dowód: $\to\triangle$ *)

Notice that it is not enough to prove that $\ell_{fin}(\mathbb{N})$ is not dense

---

*) Jednak bynajmniej, NIE jest dowodem fakt, że $\ell_{fin}(\mathbb{N})$ nie jest gęsty w $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (nawet dla $\Omega=\mathbb{N}$)

4. $C([a;b])$ jest ośrodkowa ($a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$). W tym wypadku jako przeliczalny podzbiór liniowo gęsty możemy wziąć zbiór wszystkich jednomianów $J := \{\mathbb{X}^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, gdzie $\mathbb{X}^n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{X}^n(t) = t^n$. *)
Mamy bowiem $\mathrm{lin}\, J$ – to zbiór wszystkich wielomianów $W([a;b])$ na $[a;b]$, a gęstość $W([a;b])$ (w normie $\| \ \|_\infty$) wynika z tw. Stone'a Weierstrassa.

Przytoczone tu przykłady można na różne strony uogólniać. W oparciu o Fakt "Ośrodkowość z lin. gęstości" daje się przy pewnym wsparciu topologii oraz teorii miary dowieść, że dla „dużej klasy" przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ przestrzeń $L^p(\Omega, \mu)$ jest ośrodkowa przy $p \in [1; +\infty)$. Innymi metodami można też często dowieść, że $L^\infty(\Omega, \mu)$ ośrodkowa nie jest...

Na koniec tego „pod-pod rozdziału" przypominam jeszcze ważny fakt z topologii metrycznej:

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O podprzestrzeni ośrodkowej")
Podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metrycznej jest ośrodkowa.
Any subspace of separable metric space is also separable.

---

*) Standardowym zwyczajem, dla $t=0$ i $n=0$ przyjmujemy $0^0 = 1$.

3.2 Szeregi w przestrzeniach unormowanych. Bazy Schaudera

◇ Szeregi

Część teorii szeregów znanej dobrze dla szeregów liczbowych daje się przenieść na grunt szeregów o wyrazach w przestrzeni unormowanej $(X, \| \ \|)$. Niech $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ $(n_0 \in \mathbb{Z})$ będzie pewnym ciągiem o wyrazach w X — będzie on tu dla nas „ciągiem wyrazów szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$". Przyjmiemy bowiem (tradycyjną) analogiczną do znanej nam z szeregów liczbowych terminologię:

- szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ to ściśle po prostu (tzw.) ciąg sum częściowych $\{S_n\}_{n \geq n_0}$ dany wzorem
$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} x_k \quad , n \geq n_0$$
(w szczególności $\{S_n\}_{n \geq n_0}$, tak jak $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ to ciąg o wyrazach w X).

- szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny wtw $\{S_n\}_{n \geq n_0}$ jest zbieżny w X, tzn. istnieje $G \in X$ t. że $S_n \xrightarrow[X]{} G$. W tej sytuacji G nazywamy sumą szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ (lepiej nie „granicą", choć „od biedy..."), mówimy (wtedy) też: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny do G.

- symbol $G = \sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$, gdy $G \in X$ jest co prawda nieco mylący/dwuznaczny (bo $G \in X$, ale $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ to pewien ciąg w X...) ale będzie używany jako skrót zdania: G jest sumą $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$. W związku z tym symbol $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ używamy nie tylko na oznaczenie samego szeregu, ale również jako jego sumy, o ile ona istnieje (tu — należy do X, nieco inaczej niż dla szeregów nieujemnych, dla których suma $\pm\infty$ też była dopuszczana)

Ważnym pojęciem, też dosyć analogicznym do odpowiedniego „skalarnego" pojęcia jest zbieżność bezwzględna.

Definicja

Szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ jest <u>zbieżny bezwzględnie</u> wtw szereg (już nie w X lecz liczbowy...) $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|x_n\|$ jest zbieżny.

Poniższy wynik jest swego rodzaju uogólnieniem „skalarnego" twierdzenia o bezwzględnej zbieżności.

Twierdzenie („O bezwzględnej zbieżności w przestrzeniach unormowanych")

Jeśli X jest przestrzenią Banacha, to każdy szereg bezwzględnie zbieżny o wyrazach w X jest zbieżny.

Ponadto, jeśli X jest taką przestrzenią unormowaną, że każdy szereg bezwzględnie zbieżny o wyrazach w X jest zbieżny, to X — Banacha. **)

Dowód

Pierwsza część — podobnie jak dla szeregów liczbowych — to prosta konsekwencja zupełności i nierówności trójkąta. Mamy bowiem dla $m > n$

$$\|S_m - S_n\| = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\Big\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \qquad (1)$$

i jeśli $\varepsilon > 0$ to, dzięki zbieżności $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|x_n\|$, suma po prawej stronie (1) będzie $< \varepsilon$ d.d.d. n *) (gdy $m > n$). Czyli

*) d.d.d. = dla dostatecznie dużych.

**) Warto (→ ⚠ ...) w oparciu o to „przetworzyć" nieco dowód Tw. „OLP" (str. 42).

Ciąg sum częściowych jest Cauchy'ego, więc zbieżny.

Dla dowodu drugiej części użyjemy Faktu „O podciągowej zupełności" oraz konstrukcji użytej już (i zostawionej jako „△"...) raz na stronie PB – 55 (dającej wzór (4)).

Niech mianowicie $\{x_n\}_{n\geq 1}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w X i niech $\{k_n\}_{n\geq 1}$ – ściśle rosnący ciąg indeksów taki, że

$$\forall_{n\geq 1} \quad \| x_{k_n} - x_{k_{(n+1)}} \| < \frac{1}{2^n}. \qquad (2)$$

Niech $z_n := x_{k_{(n+1)}} - x_{k_n}$ dla $n \geq 1$, wówczas

$$\forall_n \quad x_{k_{(n+1)}} = x_{k_1} + \sum_{j=1}^{n} z_j \qquad (3)$$

Ale z (2) $\|z_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ dla wszystkich $n \geq 1$, zatem $\sum_{n=1}^{+\infty} \|z_n\|$ jest bezwzględnie zbieżny – jest więc zbieżny, tzn. jego ciąg sum częściowych $\left\{\sum_{j=1}^{n} z_j\right\}_{n\geq 1}$ jest zbieżny, a stąd na mocy (3) $\{x_{k_{(n+1)}}\}_{n\geq 1}$ jest zbieżny – a to podciąg ciągu $\{x_n\}_{n\geq 1}$. $\boxed{//}$

Warto jeszcze sformułować tu związaną nieco z powyższym wynikiem uwagę.

Uwaga Jeżeli w X – unormowanej $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny i jest on też bezwzględnie zbieżny, to $\left\| \sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \|x_n\|$.

Dowód: $\longrightarrow$ △.

Convergence of a serie of vectors $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ (and also of a sequence) doesn't depend only on the choice of the sequence, but also on the choise of the norm/space.

Oczywiście gdy mówimy o zbieżności szeregów tak rozumianych, to nie tylko wybór ciągu wyrazów $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ ma wpływ na zbieżność/rozbieżność *), ale także wybór przestrzeni unormowanej (zarówno X jak i normy $\|\ \|$ w niej) w której tę zbieżność zamierzamy rozważać. Tak samo zresztą jak w wypadku każdej zbieżności ciągów o wyrazach w przestrzeni unormowanej.

Przykład

Rozważmy ciąg wektorów $\{x_n\}_{n \geq 1}$, $x_n := \frac{1}{n} \cdot e_n \in \ell(\mathbb{N}_1)$.

Oczywiście $\forall_n\ x_n \in \ell^p(\mathbb{N}_1)$ przy wszystkich możliwych $p \in [1; +\infty]$

Nietrudno wykazać, że $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny w $\ell^p(\mathbb{N}_1)$ dla $p \in (1; +\infty]$ oraz rozbieżny dla $p = 1$. Ponadto dla żadnego z tych p szereg taki nie jest bezwzględnie zbieżny. Wszystko to proszę sprawdzić samodzielnie...

$\longrightarrow$ ⚠.

---

*) rozbieżność definiujemy oczywiście jako brak zbieżności (i dla ciągów i w szczególności dla szeregów).

◇ Bazy Schaudera

Z kwestią zbieżności szeregów związane jest pojęcie baz Schaudera *), wspominanych już na początku rozdziału (PB-4 w *)) przy okazji zupełnie innych baz – w sensie liniowym.

Definicja

Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ o wyrazach w przestrzeni Banacha *) X jest bazą Schaudera wtw każdy $x\in X$ daje się jednoznacznie zapisać w postaci

$$x=\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x_n ,$$

dla pewnego $a=\{a_n\}_{n\geqslant n_0}\in \ell(\mathbb{N}_{n_0})$.

(tzn. $\forall_{x\in X} \; \exists!_{a\in \ell(\mathbb{N}_{n_0})} \; x=\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n x_n$).

Uwagi

1. Baza Schaudera musi być w szczególności układem liniowo niezależnym $\longrightarrow$

---

*) Juliusz Schauder i Stefan Banach. Obaj są przedstawicielami tzw. lwowskiej szkoły matematycznej. Banach nieco bardziej znany (choćby przez „swoje" przestrzenie). Obaj Polacy (Schauder – pochodzenia żydowskiego). Banach zmarł zaraz po wojnie (II, w 1945), Schauder został zabity przez hitlerowców podczas wojny (w 1943). Obaj związani blisko z Hugonem Steinhausem ... [szukaj dalej].

2. Zbiór wyrazów każdej bazy Schaudera musi być liniowo gęsty w X $\longrightarrow$ $\triangle$. W szczególności, jeśli X posiada bazę Schaudera (a nie musi – w odróżnieniu chociby od posiadania „zwykłej" bazy), to X – ośrodkowa. Jednak nie każdy zbiór liniowo gęsty daje się „ustawić" w ciąg będący (w przestrzeni Banacha) bazą Schaudera

3. Z oczywistych względów tak zdefiniowane bazy Schaudera mogą dotyczyć jedynie przestrzeni wymiaru nieskończonego.

Przykłady

1. W każdej z przestrzeni $\ell^p(\mathbb{N})$ dla $p \in [1; +\infty)$ i w c_0 ciąg $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ stanowi bazę Schaudera ($\longrightarrow$ $\triangle$).

In each space for also in is a

2. Ciąg $\{x^n\}_{n\geq 0}$ <u>nie</u> jest bazą Schaudera w $C([0;1])$ ($\longrightarrow$ $\triangle$), choć zbiór jego wyrazów jest liniowo gęsty.

II Operatory ograniczone, funkcjonały

Omawiamy tu wstępne sprawy dotyczące operatorów liniowych – głównie operatorów ciągłych (=ograniczonych...) pomiędzy przestrzeniami unormowanymi.
W szczególności będzie tu mowa o równoważnych warunkach ciągłości operatorów liniowych, o izomorfizmach (przestrzeni unormowanych, o przestrzeni $B(X,Y)$ (– pewnej nowej konstrukcji przestrzeni unormowanych) i o ciągłości funkcjonałów liniowych – w tym o przestrzeni sprzężonej X^*. To wszystko jednak na razie tylko w „podstawowym zakresie" – głębsze wyniki dotyczące tych wszystkich spraw będą omawiane w dalszych rozdziałach...

Podrozdziały

Boundness and operator norm

1. Ograniczoność i norma operatorowa

1.0. Przypomnienie i notacja dla operatorów liniowych

Niech X, Y – przestrzenie liniowe nad $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$, jak zwykle). W dalszym ciągu tego kursu AF I będziemy na ogół na przekształcenie liniowe $A : X \longrightarrow Y$ mówili krótko operator *) (z X w Y). Przypominam, że $\mathcal{L}(X,Y)$ to zbiór i zarazem przestrzeń liniowa wszystkich (liniowych...) operatorów z X w Y (patrz np. str. PB-3).

Ponadto oznaczamy:

$$X^{\#} := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

i elementy tego zbioru (przestrzeni) będziemy nazywali funkcjonałami liniowymi, również często skracając to do samego „funkcjonał" (z liniowością w domyśle... + zastrzeżenie podobne do tego z *)...)

Dla $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ oraz $x \in X$ często używamy skrótu:

$$Ax := A(x).$$

Poza znanymi działaniami dodawania operatorów liniowych i mnożenia

---

*) Choć oczywiście nie każde przekształcenie (funkcja) pomiędzy przestrzeniami liniowymi musi być liniowe – jednak będziemy starali się używać słów „przekształcenie", „funkcja", gdy nie zakładamy liniowości... a nie „operator"!

poza liczby z $\mathbb{K}$ warto pamiętać o mnożeniu operatorów, zdefiniowanym po prostu jako złożenie, tzn.

dla X, Y, Z - liniowych i $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$

oznaczamy (również skrótowo):

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "AB"'] & Y \arrow[r, "A"] & Z
\end{tikzcd}
$$

$$AB := A \cdot B := A \circ B$$

i AB nazywamy iloczynem A i B — oczywiście $AB \in \mathcal{L}(X,Z)$.

W szczególnym wypadku, gdy $X = Y$, oznaczamy krócej

$$\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$$

i ważnymi elementami $\mathcal{L}(X)$ są wówczas 0 i I - operator zerowy (tzn. $\forall_{x \in X}\ 0x = 0$) i odpowiednio identycznościowy (tzn. $\forall_{x\in X}\ Ix = x$)

Jak wiadomo (ew. łatwo sprawdzić ...) $(\mathcal{L}(X), \cdot, I)$

algebra with unity over

jest algebrą z jedynką nad $\mathbb{K}$ *).

Co więcej oczywiście

$$0 = I \quad \text{wtw (iff)} \quad X = \{0\}. \qquad \text{(OI)}$$

---

when A ~~[illegible]~~ is a linear space over $\mathbb{K}$

*) Gdy $\mathcal{A}$ przestrzeń liniowa (nad $\mathbb{K}$), $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$, $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, to (then)

$(\mathcal{A}, \cdot, \mathbb{1})$ jest (is) algebrą z jedynką (with unit over) nad $\mathbb{K}$ wtw (iff) $\forall_{a,b,c \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{K}}$ 1) $a\cdot(b\cdot c) = (a \cdot b)\cdot c$

2) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a \cdot c$, $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c \cdot a$ 3) $\lambda(a\cdot b) = (\lambda a)\cdot b = a \cdot (\lambda b)$

4) $\mathbb{1}\cdot a = a \cdot \mathbb{1} = a$.

Remark: Some people add extra condition that $\mathbb{1} \neq 0$.

Uwaga: niektórzy (my NIE - patrz (OI)) zakładają „z góry", że $\mathbb{1} \neq 0$.

Bounded = continuous

1.1. Ograniczony = ciągły

Niech teraz X, Y – przestrzenie unormowane.

◆ Operatory ograniczone

Definicja

Niech $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Operator A jest <u>ograniczony</u> wtw dla każdego ograniczonego podzbioru C w X zbiór $A(C)$ jest ograniczony w Y.

Uwaga 1

Należy być ostrożnym, bo to myląca terminologia: mimo, że operator (liniowy) jest w szczególności funkcją, to termin <u>operator ograniczony</u> jest czymś istotnie różnym od "funkcja liniowa i ograniczona". Co gorsza, każdy operator A liniowy różny od 0 (pomiędzy przestrzeniami unormowanymi) <u>nie jest</u> funkcją ograniczoną – tzn. $A(X)$ nie jest ograniczony w Y, bo $\{0\} \neq A(X) = \mathrm{Ran}(A) \underset{lin}{\subset} Y$. Niemniej jest pewien prosty związek pojęcia ograniczoności operatora i pojęcia ograniczoności funkcji (patrz Wniosek str.6)*).

---

*) (a "jeszcze gorsza", w Teorii Operatorów używa się też dość powszechnie nazwy „operator nieograniczony", co niekiedy wcale nie jest zaprzeczeniem pojęcia ograniczoności w klasie operatorów liniowych, ale wręcz pewnym rozszerzeniem pojęcia operatora liniowego z X w Y... (rozważa się operatory liniowe określone na jakichkolwiek <u>podprzestrzeniach liniowych</u> $\tilde{X} \subset X$ o wartościach w Y).

$\boxed{\text{Uwaga 2}}$

Jeśli $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ oraz $X \neq \{0\}$ *), to

$$\sup_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

$\boxed{\text{Dowód}}$

Obviously — is an upper bound of the set

Oczywiście $c := \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$ jest ograniczeniem górnym zbioru

or it is = — If

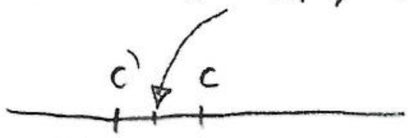
$D := \{\|Ax\| : x \in K(0,1)\}$ lub jest równe $+\infty$. Jeżeli

then — then — for some

zatem $c' < c$, to dla pewnego $x_0 \in \overline{K}(0,1)$ $\|Ax_0\| > c'$.

But — so

Ale $\forall_{n\in \mathbb{N}_1}\ x_n := (1-\frac{1}{n})x_0 \in K(0,1)$, więc $x_n \in D$



and

oraz $\|Ax_n\| = \|(1-\frac{1}{n})Ax_0\| = (1-\frac{1}{n})\|Ax_0\| \xrightarrow[n]{} \|Ax_0\| > c'$

Thus — For some — so — is not an upper bound of — That is — which means the first equality

Zatem dla pewnego $n \in \mathbb{N}_1$ $\|Ax_n\| > c'$, więc c' nie jest ograniczeniem górnym D. Czyli $c = \sup D$, co oznacza pierwszą równość.

The second is clear by — and

Druga jest jasna stąd, że $S(0,1) \subset \overline{K}(0,1)$ oraz że dla $0 \neq x \in \overline{K}(0,1)$ $\tilde{x} := \frac{1}{\|x\|}x \in S(0,1)$ *and* i $\|A\tilde{x}\| = \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \geqslant \|Ax\|$.

$\boxed{///}$

When — the first from — holds — both sides are 0 — The second doesn't have sense because

*) Gdy jednak $X = \{0\}$, to pierwsza z „=" zachodzi – po obu stronach są 0. Druga nie ma zaś sensu, bo $S_X(0,1) = \emptyset$...

Uwaga 3

$A \in \mathcal{L}(X,Y)$ jest ograniczony wtw $A(\overline{K}(0,1))$ (równoważnie też: $A(K(0,1))$, a również $A(S(0,1))$) jest ograniczony w Y.

Dowód „$\Longrightarrow$" – jasne
It's clear

„$\Longleftarrow$" Równoważność wyboru $K(0,1)$, $\overline{K}(0,1)$ i $S(0,1)$ wynika z Uwagi 2. Założmy, że $A(\overline{K}(0,1))$ jest ograniczony – niech $M \in \mathbb{R}$ będzie taki, że $A(\overline{K}(0,1)) \subset \overline{K}(0,M)$.
The equivalence of the choice ... follows from ... Assume ... is bdd ... let ... be s.t.

Jeżeli C – ograniczony podzbiór X, to dla pewnego $r>0$ $C \subset \overline{K}(0,r)$, czyli $\frac{1}{r}\cdot C \subset \overline{K}(0,1)$, skąd
if ... is bdd subset of ... then for some ... so ... thus

$$A\left(\tfrac{1}{r}C\right) \subset \overline{K}(0,M).$$

Ale $A(C) = r\cdot A\left(\frac{1}{r}C\right)$ dzięki liniowości A, więc
But ... thanks to linearity of A, so

$$A(C) \subset r\cdot \overline{K}(0,M) = \overline{K}(0,r\cdot M). \qquad \boxed{\text{CL}}$$

Dla $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mamy zatem:
For ... we have:

Wniosek A jest operatorem ograniczonym wtw $A_{|\overline{K}(0,1)}$ (równoważnie ... $|K(0,1)$ / ... $|S(0,1)$) jest funkcją ograniczoną.

◆ „Ważne warunki równoważne"

Poza warunkami równoważnymi ograniczoności z Uwagi 3 są jeszcze inne — pozornie bardziej zaskakujące (w tym głównie ten z poniższego tytułu ...)

Fakt („O warunkach równoważnych ciągłości")

Jeżeli $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, to NWSPR *)

(i) A jest ograniczony (tzn. jako operator...);

(ii) A jest ciągły w 0;

(iii) A jest ciągły;

(iv) A jest jednostajnie ciągły;

(v) A jest lipschitzowski;

(vi) $\exists_{C \in \mathbb{R}} \forall_{x \in X} \quad \|Ax\| \leq C\|x\|$;

(vii) $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$.

Dowód

(i) $\Leftrightarrow$ (vii) — jasne z Uwagi 3. clear from

(vii) $\Leftrightarrow$ (vi) „$\Leftarrow$" — oczywiste. obvious „$\Rightarrow$" niech Let $C := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < +\infty$.

---

*) NWSPR = NWSR = „następujące warunki są równoważne (tzn. parami równoważne ...)".

for   thus

dla $x \neq 0$ $\quad x = \|x\| \cdot \tilde{x}$, $\tilde{x} := \frac{1}{\|x\|} \cdot x \in \overline{K}(0,1)$ więc (liniowość A

and property of norms)   so

i wł. normy) $\|Ax\| = \|x\| \cdot \|A\tilde{x}\| \leq \|x\| \cdot C$, skąd (vi).

from   there exists   s.t.

(vi) $\Longrightarrow$ (v)   z (vi) istnieje $C \in \mathbb{R}$ t.że $\|Ax - Ay\| =$

for any

$= \|A(x-y)\| \leq C\|x-y\|$ dla wszystkich $x, y \in X$.

obvious

(v) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) — oczywiste.

If   continuous at 0, then there ∃

(ii) $\Longrightarrow$ (vi)   Jeśli A – ciągły w 0, to istnieje $r > 0$

s.t.

t.że $\quad K_X(0,r) \subset A^{-1}(K_Y(A(0),1)) = A^{-1}(K_Y(0,1))$.

So   if   that is

Zatem   gdy $\|x\| < r$, to $\|Ax\| < 1$, czyli

if   so

gdy $0 \neq x$, to $\left\|\frac{r}{2\|x\|} \cdot x\right\| = \frac{r}{2} < r$, więc

$$\|Ax\| = \frac{2\|x\|}{r} \cdot \left\|A\left(\frac{r}{2\|x\|} \cdot x\right)\right\| \leq \frac{2}{r}\|x\|.$$

$\boxed{\text{L}}$

Norma operatorowa

Oznaczmy

bounded

$$B(X,Y) := \{A \in \mathcal{L}(X,Y) : A - \text{ograniczony}\}$$

for the moment   it is "only"   a set,   a subset of $\mathcal{L}(X,Y)$, which

– na razie to „jedynie" pewien zbiór, podzbiór $\mathcal{L}(X,Y)$, który

by the previous facts   is equal to   continuous

na mocy poprzedniego faktu równy jest $\{A \in \mathcal{L}(X,Y) : A - \text{ciągły}\}$.

Also, thanks to the above fact   we can define

Również dzięki temu faktowi możemy zdefiniować

by the formula

$\|\ \| : B(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad , \quad A \in B(X,Y). \qquad \text{(NO)}$$

$\boxed{\text{OF-8}}$

We shall see soon (see the next subsection) that $\|\cdot\|$ is a norm.

Jak się niedługo przekonamy (patrz następny podrozdział II.2) ta funkcja $\| \ \|$ jest rzeczywiście normą (a sama $B(X,Y) \underset{lin}{\subset} \mathcal{L}(X,Y)$).

and

First we prove only some elementar formula

Na razie wykażemy jedynie alternatywne formuły na $\| \ \|$.*)

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O stałej Lipschitza")

Niech $A \in B(X,Y)$. Wówczas:

1) $\forall_{x\in X} \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

2) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|Ax\| = \inf\{C\in[0;+\infty) : \forall_{x\in X} \|Ax\| \leq C\|x\|\}$, a jeśli ponadto $X \neq \{0\}$, to także $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Zbiór $\{C\in[0;+\infty) : \forall_{x\in X} \|Ax\| \leq C\|x\|\}$ posiada element najmniejszy.**)

$\boxed{\text{Uwaga}}$

Jednak $\{\|Ax\| : \|x\|\leq 1\}$ może NIE posiadać elementu największego! ($\longrightarrow \triangle$).

---

*) Faktycznie ten sam symbol używamy tu jednocześnie w 3 znaczeniach: jako normy z X, normy z Y oraz normy (na razie „normy") zadanej przez (NO). Tak postępujemy dla skrócenia zapisu, ale w razie istotniejszego ryzyka nieporozumienia, będziemy te normy rozróżniać w odpowiedni sposób.

**) Dlatego (patrz tez ze str 7) $\|A\|$ jest „najlepszą" (= najmniejszą) stałą ... dowód „(vi) $\Rightarrow$ (v)" Faktu

OF − 9

$\boxed{\text{Dowód}}$ (Faktu)

Let
Niech $G := \{C \in [0;+\infty) : \forall_{x \in X} \|Ax\| \le C\|x\|\}$.

Since ... it follows
Ponieważ $\|0\| \le C \cdot \|0\|$, zatem

$$G = \left\{C \in [0;+\infty) : \forall_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le C\right\}$$ it is tzn.

is simple a set of non negative upper bounds of the set
G jest po prostu zbiorem nieujemnych ograniczeń górnych zbioru

If ... then ... and
$D := \left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\}\right\}$. Gdy $X = \{0\}$, to $D = \emptyset$ i $G = [0;+\infty)$

and ... When ... then ... and
i $0 = \min G$.*) Gdy $X \ne \{0\}$, to $D \ne \emptyset$ i $D \subset [0;+\infty)$,

so ... is the set of all upper bounds of ... But
zatem G to zbiór wszystkich ograniczeń górnych D. Jednak

because for
ponieważ dla $x \in X \setminus \{0\}$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \quad \text{and i} \quad \frac{x}{\|x\|} \in S(0,1) \qquad (1)$$

and ... for ... so ... again "simply"
oraz dla $x \in S(0,1)$, $x = \frac{x}{\|x\|}$, zatem (znów „po prostu"...)

$$D := \{\|Ax\| : x \in S(0,1)\} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

So let ... Because ... is non empty
Niech więc $X \ne \{0\}$. Ponieważ $A \in B(X,Y)$, D jest niepusty

and bdd from above, so – by Dedekind axiom – ... posseses min
i ograniczony z góry, więc – z aksjomatu Dedekinda – G posiada „min",

and by the def. of
i z definicji „sup"

$$\sup D = \min G.$$

Thus by ... finishes the proof of 2), and from (1) we get 1).
To na mocy Uwagi 2 (str. OF-5) kończy dowód 2), a z (1) wynika 1). ☒

---

which proves ... when ... and ... is then obvious
*) Co dowodzi 2) przy $X = \{0\}$, a 1) jest oczywiste..

Isomorphisms

◇ Izomorfizmy

Recall that when X, Y are "only" linear spaces, then
Przypomnijmy, że gdy rozważaliśmy X, Y – „tylko" liniowe,

from to denoted simply
to „izomorfizm liniowy" z X na Y oznaczał po prostu

any which is a ~~bije~~ bijection
jakiekolwiek $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, które jest bijekcją (czyli $\operatorname{Ker} A = \{0\}$,

But when are norm spaces, we assume
$\operatorname{Ran} A = Y$). Gdy jednak X, Y są unormowane, tak jak wszędzie

it everywhere here, then isomorphism even without "linear"
tu zakładamy, to słowo izomorfizm (nawet bez „liniowy") będzie tu zawsze

will be always an abbreviation of isomorphism of norm spaces. (i.n.s.)
skrótem od izomorfizm przestrzeni unormowanych (i.p.u.)

Definicja Def.

is c.n.s. of and *) iff bold operator is a
A jest i.p.u. (X i Y)*) wtw $A \in \mathbf{B}(X,Y)$; A jest bijekcją

and
X na Y oraz $A^{-1} \in \mathbf{B}(Y,X)$.

In particular each isometry is an isomorphism
W szczególności zatem każda izometria jest izomorfizmem

see page
(patrz str. PB – 9).

Fakt

Let Then TFCAE
Niech $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Wówczas NWSR:

is
(i) A jest izomorfizmem X i Y;

and
(ii) $A \in \mathbf{B}(X,Y)$, $\exists_{c \in \mathbb{R}_+} \forall_{x \in X} \ \|Ax\| \geq c\|x\|$ i $\operatorname{Ran} A = Y$;

and in
(iii) A jest bijekcją X na Y i w X $\| \ \| \equiv \| \ \|_A$ **).

Dowód $\longrightarrow$ △.

---

eventually of X onto Y. and so on.
*) ew. X na Y itp

transfer ~~norm~~ by A of the norm $\|\cdot\|$ from to
**) $\| \ \|_A$ to przeniesienie przez A normy $\| \ \|$ (z Y do X) –

– patrz str. PB – 9.

It's worth to note (concerning (iii)) that

Warto zauważyć (a propos (iii) powyżej), że

when A is isometrią, then in X we just have

gdy A jest izometrią, to w X mamy po prostu:

$$\| \ \| = \| \ \|_A .$$

Uwaga

Remark

W tym „pod-podrozdziale" (1.1.) o żadnej z przestrzeni unormowanych X, Y nie zakładamy, że są one przestrzeniami Banacha. Jak za czas pewien zobaczymy, założenie (dodatkowe) banachowskości pozwoli znacznie uprościć warunki z (ii). Znane twierdzenie, które dotyczy tej kwestii to Twierdzenie „O odwzorowaniu odwrotnym" – jeden z kluczowych wyników Teorii Przestrzeni Banacha.

In this sub sub section (1.1) we don't assume that X and Y are Banach. But we shall see soon ~~an essen~~ the extra assumption that they are Banach will allow us to essentially simplify the condition ~~fro~~ from (ii). It will be seen from the famous theorem "On Inverse map" which is one of the key result for Banach space theory.