Examples

$\boxed{\text{Przykłady}}$ (wreszcie tu $p \in [1; +\infty)$)

- $L^p(D)$ dla $D \subset \mathbb{R}^d$, D – mierzalny w sensie Lebesgue'a (measurable in Lebesgue'a sense) będziemy oznaczać $L^p(D, \ell_D)$, gdzie ℓ_D – standardowa miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^d$ „obcięta" do D.
  Zatem w tej przestrzeni, dla $[f] \in L^p(D)$
  $$\|[f]\|_p := \left(\int_D |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

- $\ell^p_w(\Omega)$ dla $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $w > 0$ zdefiniowana na str. PB-28/29 zgodnie z (Uwagą 1 (look at)) str. PB-36 utożsamiamy (izometrycznie) z $L^p(\Omega, w\,d\#)$.
  ↓ we can identify this and $\ell^p_w(\Omega)$

- $\ell^p(\mathbb{N})$ – to szczególny przypadek (is a special case of) powyższego $\ell^p_w(\Omega)$ z $\Omega = \mathbb{N}$ i $w \equiv 1$ – będziemy często go używać na wykładzie / ćwiczeniach. Przypominając, tu
  $$\|f\|_p \underset{\uparrow}{=} \|[f]\|_p := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |f(n)|^p \right)^{1/p}$$
  tu „mamy prawo" utożsamić f i $[f]$ ...

Najczęściej zetkniemy się tu z przypadkiem $p = 1$ i $p = 2$.

Dotąd, gdy mowa o L^p rozważaliśmy tylko $p \in [1, +\infty)$. Jednak w kolejnym – ostatnim podrozdziale zdefiniujemy też $L^\infty(\Omega, \mu)$ z normą $\|\ \|_{ess\,\infty}$ (*) – będzie to na ogół coś innego niż $\ell^\infty(\Omega)$ z $\|\ \|_\infty$ ...

(*) „ess" przed ∞ od ang. „essential" / fr. „essentiel" – istotny.

To be the Banach space – the most important proofs.

1.6. Banachowskość – najważniejsze dowody

By now, we only know that finite dim. sp. are Banach.
Dotąd jedynie o skończenie wymiarowych przestrzeniach unormowanych wiemy, że są przestrzeniami Banacha.
Now we should decide which between the previously described spaces are Banach.
Będziemy chcieli rozstrzygnąć, które z (pozostałych) przykładów przestrzeni unormowanych opisywanych licznie w tym podrozdziale są, a które nie są przestrzeniami Banacha.
We start from
Zaczniemy od przestrzeni $\ell^\infty(\Omega)$ (patrz str. PB-20).

Twierdzenie (On „O ℓ^∞")
$(\ell^\infty(\Omega), \|\,\|_\infty)$ jest (is) przestrzenią Banacha.

Dowód – właściwie powinien to być już fakt znany z Analizy I ew. Topologii (≈ „zupełność normy jednostajnej"). Na wszelki wypadek jednak przypominam:

1° Consider
Rozważamy ciąg Cauchy'ego $\{f_n\}_{n\geq 1}$ w $\ell^\infty(\Omega)$, stąd (so by) dzięki nierówności dla (for) $g \in \ell^\infty(\Omega)$

$$\forall_{t\in\Omega}\ |g(t)| \leq \|g\|_\infty \qquad (1)$$

We get … is C. sequence in $\mathbb{K}$. By completness
uzyskujemy, że $\forall_{t\in\Omega}\ \{f_n(t)\}_{n\geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{K}$, z zupełności $\mathbb{K}$ (of $\mathbb{K}$, it is convergent, to $c_t \in \mathbb{K}$, so we define) jest więc zbieżny – oznaczmy jego granicę $c_t \in \mathbb{K}$. Definiujemy więc $f : \Omega \to \mathbb{K}$ wzorem (by) $f(t) := c_t$.

and … is pointwise convergent to f, id est
W efekcie $\{f_n\}_{n\geq 1}$ jest punktowo zbieżny do f tzn.

$$\forall_{t\in\Omega}\ f_n(t) \longrightarrow f(t). \qquad (2)$$

2° We shall prove that … and
Wykażemy, że $f \in \ell^\infty(\Omega)$ oraz $f_n \xrightarrow[\|\,\|_\infty]{} f$.
To prove jest proste, ponieważ ciąg (TR sequences) Cauchy'ego $\{f_n\}_{n\geq 1}$ jest (is bdd in $\|\cdot\|_{\infty}$, i.e.) ograniczony w sensie $\|\,\|_\infty$, tzn. $\forall_{n\geq 1} \|f_n\| \leq M$, gdzie (where) $M \in \mathbb{R}$ – pewna stała (is a constant). Zatem (so) z (by) (1) oraz (and) (2) otrzymamy (we get) zaraz $\sup_{t\in\Omega} |f(t)| \leq M$, czyli (so) $f \in \ell^\infty(\Omega)$.
To prove that
By wykazać, że $f_n \xrightarrow[\|\,\|_\infty]{} f$ ustalmy (fix) $\varepsilon > 0$ i dobierzmy (and choose) $N \geq 1$ tak, by (to get) zgodnie z (by) war. Cauchy'ego (Cauchy's condition)

$$\forall_{m,n\geq N}\ \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon/2 \qquad (3)$$

Let … We have from (2) and continuity of $|\cdot|$ and (3)
Niech $n \geq N$. Mamy z (2) (i z ciągłości $|\cdot|$…) oraz z (3)

$$\forall_{t\in\Omega}\ |f_n(t) - f(t)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon/2$$

and thus
i stąd $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. *) ■

*) Observe that to get this extimation the information that $f \in \ell^\infty$ was not important. And in fact it could omit the proof of it.
Zauważmy, że do dowodu tego szacowania z góry na $\|f_n - f\|_\infty$ nie potrzebowaliśmy wykazanego wcześniej faktu, że $f \in \ell^\infty$ – co więcej, można było właściwie go nie wykazywać… – wynika on bowiem z tego, że f_n i $(f_n - f) \in \ell^\infty$ np. dla $n = N$.
since f_n and $(f_n - f) \in \ell^\infty$ $\Rightarrow f \in \ell^\infty$.

Pora na drugi poznany typ przestrzeni unormowanej.

$\boxed{\text{Twierdzenie}}$ („O L^p") On

$\left(L^p(\Omega,\mu), \| \ \|_p\right)$ jest (is) przestrzenią Banacha, dla (for) $p \in [1; +\infty)$.

$\boxed{\text{Dowód}}$ Proof (See Lina's notes).

"On norm from seminorm" it sufficient to prove

Na mocy (By) Faktu „O (of) normie z półnormy" wystarczy wykazać pół-zupełność (half-completness) $(\widetilde{L}^p, ||| \ |||_p)$.

Niech $\{f_n\}_{n\geq 1}$ – ciąg pół-Cauchy'ego w $\widetilde{L}^p$. Wykażemy, że posiada on podciąg pół-zbieżny, co zakończy dowód (patrz Fakt „O podciągowej pół-zupełności" str. PB-34). Potrzebny nam podciąg wybierzemy konstruując rekurencyjnie ściśle rosnący ciąg indeksów $\{k_n\}_{n\geq 1}$:

- jako $k_1 \geq 1$ wybierzmy jakikolwiek indeks, który spełnia:

$$\forall_{m,m' \geq k_1} \quad ||| f_m - f_{m'} |||_p^p < \frac{1}{4^1} \qquad (1)$$

- gdy zdefiniowany już k_n $(n \geq 1)$, to jako k_{n+1} wybierzmy jakikolwiek indeks, który spełnia:

$$k_{n+1} > k_n \quad i \quad \forall_{m,m' \geq k_{n+1}} \quad ||| f_m - f_{m'} |||_p^p < \frac{1}{4^{n+1}} \qquad (2)$$

– w obu przypadkach istnienie odpowiednich indeksów zagwarantowane jest przez warunek pół-Cauchy'ego. (Ewent. pół-warunek Cauchy'ego, jeśli ktoś woli ...).

Tak zdefiniowany ciąg indeksów $\{k_n\}$ jest ściśle rosnący dzięki (2), zatem $\{g_n\}_{n\geq 1} := \{f_{k_n}\}_{n\geq 1}$ jest podciągiem $\{f_n\}_{n\geq 1}$ oraz

$$\forall_{n\geq 1} \forall_{s \geq n} \quad ||| g_n - g_s |||_p^p < \frac{1}{4^n} \qquad (3)$$

na mocy (1) i (2).

Niech teraz $\Omega_n := \left\{ t \in \Omega : |g_n(t) - g_{n+1}(t)|^p \geq \frac{1}{2^n} \right\} \in \mathfrak{M}$.

Dzięki (3) („z $s = n+1$") dla $n \geq 1$ mamy

$$\frac{1}{4^n} > ||| g_n - g_{n+1} |||_p^p = \int_\Omega |g_n - g_{n+1}|^p d\mu \geq \int_{\Omega_n} |g_n - g_{n+1}|^p d\mu \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_n} \frac{1}{2^n} d\mu = \frac{\mu(\Omega_n)}{2^n},$$

zatem

$$\forall_{n\geq 1} \quad \mu(\Omega_n) < \frac{1}{2^n}. \qquad (4)$$

Rozważmy teraz zbiór

$$\widetilde{\Omega} := \left\{ t \in \Omega : \exists_{N \geq 1} \forall_{n \geq N} \ t \notin \Omega_n \right\} =$$

$$= \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n \geq N} (\Omega \setminus \Omega_n). \qquad (5)$$

Jeśli zatem $t \in \widetilde{\Omega}$, to dla pewnego $N(t)$ zachodzi

$$\forall_{n \geq N(t)} \quad |g_n(t) - g_{n+1}(t)| < \frac{1}{(2^{\frac{1}{p}})^n},$$

więc szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} (g_{n+1}(t) - g_n(t))$ (liczbowy) jest zbieżny, bo jest bezwzględnie zbieżny.

Zauważmy, że n-ty wyraz ciągu sum częściowych tego szeregu to
$$S_n(t) := \sum_{k=1}^{n}\left(g_{k+1}(t) - g_k(t)\right) = \sum_{k=2}^{n+1} g_k(t) - \sum_{k=1}^{n} g_k(t) =$$
$$= g_{n+1}(t) - g_1(t),$$
więc skoro $\{S_n(t)\}_{n\geq 1}$ jest zbieżny, to $\{g_n(t)\}_{n\geq 1}$ także (bo dla $n \geq 2$ $g_n(t) = S_{n-1}(t) + g_1(t)$).

Wykazaliśmy zatem, że $\{g_n|\tilde{\Omega}\}_{n\geq 1}$ jest punktowo zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez $\tilde{g}$ – mamy $\tilde{g} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ i rozszerzmy $\tilde{g}$ do $g : \Omega \to \mathbb{C}$, biorąc $g(t) = 0$ dla $t \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$ – oczywiście taka funkcja g jest $\mathfrak{M}$-mierzalna. Wykażemy teraz, że
$$\mu(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) = 0.$$

Mamy z (5) i z wzorów de Morgana
$$\Omega \setminus \tilde{\Omega} = \bigcap_{N\geq 1} R_N, \text{ gdzie } R_N := \bigcup_{n\geq N} \Omega_n.$$

Zatem $\{R_N\}_{N\geq 1}$ jest rodziną zstępującą („$\searrow$" w sensie $\subset$) oraz
$$\mu(R_N) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \mu(\Omega_n) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \xrightarrow[N]{} 0$$
z (4), więc przecięcie tej rodziny, czyli właśnie $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$ ma miarę μ zerową! W efekcie ciąg funkcji $\{g_n\}_{n\geq 1}$ jest zbieżny μ-prawie wszędzie.

My jednak chcielibyśmy, by $g \in \tilde{L}^p$ oraz by $|||g_n - g|||_p \to 0$ ... Udowodnimy to stosując Lemat Fatou ($\to$ Teoria miary i całki...) oraz (3):
$$\int_{\Omega} |g_n - g|^p \, d\mu = \int_{\tilde{\Omega}} |g_n - g|^p \, d\mu = \int_{\tilde{\Omega}} \lim_{m\to\infty} |g_n(t) - g_m(t)|^p \, d\mu(t)$$
$$= \int_{\tilde{\Omega}} \varliminf_{m\to\infty} |g_n(t) - g_m(t)|^p \, d\mu(t) \leq \varliminf_{m\to\infty} \int_{\tilde{\Omega}} |g_n - g_m|^p \, d\mu =$$
$$= \varliminf_{m\to\infty} \int_{\Omega} \ldots = \varliminf_{m\to\infty} |||g_n - g_m|||_p^p \leq \frac{1}{4^n}$$
dla każdego $n \geq 1$. Stąd np. $(g_1 - g) \in \tilde{L}^p$, czyli także $g \in \tilde{L}^p$ (bo $g_1 \in \tilde{L}^p$), a ponadto z tw. o „3 ciągach"
$$|||g_n - g|||_p = \left(\int_{\Omega} |g_n - g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0.$$

$\boxed{//}$

$\boxed{\text{Uwaga}}$ Remark

when the measure μ is few-zero then ... also

Zatem gdy miara μ jest małozerowa, to $(\tilde{L}^p(\Omega, \mu), \| \ \|_p)$ także

is a space by

jest przestrzenią Banacha, na mocy np. Uwagi 1 str. PB-36

or directly by the above proof of half-completness

(albo bezpośrednio – z powyższego dowodu: z jego części dot. pół-zupełności

of ... In particular all the spaces

$(\tilde{L}^p(\Omega, \mu), ||| \ |||_p)$)). W szczególności wszystkie przestrzenie

are for and see pages

$\ell^p_w(\Omega)$ są Banacha dla $p \in [1; +\infty)$ oraz $w > 0$. (patrz strony PB-28÷29).

Now we can summarize the results of this subsections

Jako podsumowanie głównych „praktycznych" wyników tego podrozdziału
and decide if the described spaces are Banach
rozstrzygniemy kwestię banachowskości wszystkich opisanych dotąd
using the following thm:
przykładów przestrzeni unormowanych. Wszystkie te przykłady
można rozstrzygnąć w oparciu o:

- Twierdzenie „O L^p" (str. PB-42)
- Twierdzenie „O ℓ^∞" (str. PB-40)
- Fakt „O podprzestrzeni Banacha" (str. PB-30) ("on subspace")
- Fakt „O przestrzeni skończenie wymiarowej" (str. PB-19) (on finite dimension space)

$\boxed{\text{Przykłady}}$ Examples.

Below p.B means Banach sp.
Niżej skrót p.B. to „przestrzeń Banacha".

Finite dim. n.s.
- przestrzeń (unormowana) skończenie wymiarowa – jest (is) p.B.
- $\ell^\infty(\Omega)$ – jest (is) p.B.
- $\tilde{L}^p(\Omega,\mu)$ dla (for) μ - małozerowej (μ-few zero), w tym każde (including all) $\ell^p_w(\Omega)$ - jest (is) p.B dla (for) $p\in[1;\infty)$ i (and) $w>0$.
- $L^p(\Omega,\mu)$, $p\in[1;\infty)$ – jest (is) p.B.
- $C_b(\Omega,\tau)$; w tym (including) $C(K)$ dla (for) K - zwartej (compact) przestrzeni topol. - jest (is) p.B $\longrightarrow \triangle$
- c – jest (is) p.B. $\longrightarrow \triangle$
- c_0 - jest (is) p.B $\longrightarrow \triangle$
- $\mathcal{M}_b(\Omega,\mathfrak{M})$ - jest (is) p.B $\longrightarrow \triangle$

- $\ell_{fin}(\Omega)$ przy każdym wyborze normy (for any choice of norm between (spośród)) $\|\ \|_\infty$ lub (or) $\|\ \|_{w,p}$, $p\in[1;+\infty)$ NIE jest p.B (is NOT p.B.), jeżeli (if) Ω jest (is) zbiorem nieskończonym (infinite)! *) $\longrightarrow \triangle$.

In the special case of Ω countable ($|\Omega|=|\mathbb{N}|$)

*) W szczególnym przypadku – gdy Ω - przeliczalny (np. $\Omega=\mathbb{N}$), będziemy mogli wkrótce wykazać, że przestrzeni liniowej $\ell_{fin}(\Omega)$ w ogóle nie da się unormować w sposób zupełny!
it is impossible to find a norm to get $\ell_{fin}(\Omega)$ with this norm is B. space. We will see it soon!

The next construction of B. space — Product and quotient space

2. Dalsze konstrukcje przestrzeni Banacha — produkt i przestrzeń ilorazowa

Zasób naszych przykładów przestrzeni unormowanych i Banacha więc jeszcze rozszerzymy dzięki dwóm tytułowym konstrukcjom.

2.1 Produkt *)

We shall consider here only finite product. Assume
Zajmiemy się tu tylko skończonym produktem, tzn.
that ... are n.s. for
załóżmy, że $(X_j, \|\ \|_j)$ są przestrzeniami unormowanymi dla
and consider the product
$j = 1, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ i rozważmy produkt
of linear spaces (with standard
$X := X_1 \times \ldots \times X_k$ przestrzeni liniowych $X_1, \ldots, X_k$ (ze standar-
point wise operation) Even in such simple case
dowymi działaniami „po współrzędnych"). Nawet w tak
there are many natural ways to define
prostym (bo skończonym) przypadku jest wiele dość „naturalnych"
a norm in X. For our lectures we shall
sposobów definiowania normy w X. Na użytek naszego wykładu
make an arbitrary choice (which seems to be the
dokonamy więc dość arbitralnego wyboru (choć ten właśnie wybór
most popular one, in the general context of B. sp.)
wydaje się najpopularniejszy, w kontekście ogólnych przestrzeni Banacha
that is we define for
przynajmniej) — określimy mianowicie dla $x \in X$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$

$$\|x\| := \sum_{j=1}^{k} \|x_j\|_j . \qquad (1)$$

We shall call $(X, \|\cdot\|)$ the product of n. s. $(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_k, \|\cdot\|_k)$ *
Przestrzeń $(X, \|\ \|)$ będziemy tu nazywać produktem *) przestrzeni
here. unormowanych $(X_1, \|\ \|_1), \ldots, (X_k, \|\ \|_k)$.

*) Some times people use the name direct sum ~~instead~~ in spite of product space.
Używa się tej nazwy raczej należy tłumaczyć na Suma prosta, mimo, że „produkt" polski jako mnożenie tzn. iloczyn...

Zasadność tej nazwy potwierdza niejako poniższy wynik

$\boxed{\text{Fakt}}$ On („O produkcie")

1. $(X, \|\ \|)$, gdzie after $\|\ \|$ is given by zadana wzorem (1), is a norm jest przestrzenią space unormowaną.

2. The convergence in X is the coordinate-wise convergent, i.e.
Zbieżność w X jest zbieżnością „po współrzędnych", tzn.
for any sequences with terms in X and each
dla każdego ciągu $\{x^{(n)}\}_{n \geqslant n_0}$ o wyrazach w X oraz każdego $x \in X$

$$x^{(n)} \xrightarrow[\|\ \|]{} x \quad \text{wtw (iff)} \quad \forall_{j=1,\ldots,k} \ (x^{(n)})_j \xrightarrow[\|\ \|_j]{} x_j .$$

In particular the topology in X is just the product
W szczególności topologia w X jest topologią produktową dla
topology for $X_1, \ldots, X_k$.

3. If ... are Banach spaces, then
Jeżeli $X_1, \ldots, X_k$ są przestrzeniami Banacha,
is also
to także X jest przestrzenią Banacha.

$\boxed{\text{Dowód}}$ (— abbreviation, because it is easy.. — skrótowy, bo to proste...)

1. $\longrightarrow$ ⚠

2. Because by
Ponieważ $\forall_{j=1,\ldots k} \forall_{x \in X} \|x_j\|_j \leqslant \|x\|$ (dzięki (1))
so is clear next this follows directly
więc „$\Longrightarrow$" jest jasna. Z kolei „$\Longleftarrow$" wynika bezpośrednio
From (1) and arithmetic properties of the limit of number sequences.
z (1) i arytmetycznych własności granicy ciągów liczbowych.
So the fact that the topology in X is just the product topology follows
W efekcie produktowość topologii w X wynika z faktu, że
from the fact that in metric space topology is [redacted] uniquely
w przestrzeni metrycznej topologia jest wyznaczona przez zbieżność
defined by the convergence and that in topological product the convergence
jednoznacznie oraz że zbieżność w produkcie topologicznym jest
is just the coordinate-wise convergence.
właśnie zbieżnością po współrzędnych.

3. It can be easily proved as in 2. that
Łatwo analogicznie jak w 2. wykazać, że $\{x^{(n)}\}_{n \geqslant n_0}$
is a in iff are
jest ciągiem Cauchy'ego w X wtw $\forall_{j=1,\ldots,k} \{(x^{(n)})_j\}_{n \geqslant n_0}$ są

sequences in X_j

ciągami Cauchy'ego w X_j $\longrightarrow$ $\triangle$.

This + 2 gives directly 3.

A to razem z 2. daje natychmiast 3. $\boxed{\text{cnd}}$

$\boxed{\text{Uwaga}}$ Remark.

and denote

Dla $\forall\ p \in [1;+\infty]$ oraz $x \in X = \underbrace{X_1 \times \ldots \times X_k}_{\text{oznaczmy}}$

$$\|x\|_{[p]} := \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|_j^p\right)^{1/p} & \text{gdy (when) } p \in [1;+\infty) \\ \max_{j=1,\ldots,k} \|x_j\|_j & \text{gdy (when) } p = +\infty. \end{cases}$$

in particular for instance $\|\cdot\|_{[1]}$ is just $\|\ \|$ given by (1)

W szczególności np. $\|\ \|_{[1]}$ to właśnie $\|\ \|$ dana przez (1).

It's easy to prove that in the above

Nietrudno dowieść ($\longrightarrow$ $\triangle$), że w powyższym

Fact "On product" we can replace in

Faktcie „O produkcie" można zastąpić normę $\|\ \|$ w X

by any of Moreover all those norm

którąkolwiek spośród $\|\ \|_p$, $p \in [1;+\infty]$. Co więcej wszystkie

(it means each two) are equivalent

te normy (tzn. każde dwie) są równoważne ($\longrightarrow$ $\triangle$)

It's also worth to note that in future, when we shall study

Warto też wspomnieć o tym, że gdy w przyszłości zajmiemy

the scalar product and Hilbert spaces

się przestrzeniami z iloczynem skalarnym i przestrzeniami Hilberta,

then just the choice $\|\cdot\|_{[2]}$ and not $\|\cdot\|_{[1]}$ will be

to właśnie wybór $\|\ \|_{[2]}$ a nie wybrany wcześniej $\|\ \|_{[1]}$

the most proper one

będzie „najbardziej stosowny"...

Przy okazji mówienia o produkcie warto wspomnieć o „łącznej ciągłości działań" w przestrzeni unormowanej, którą można wyrazić następująco.

"On joint continuity of operations"

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O łącznej ciągłości działań")

If n.s. then functions

Jeśli $(X, \|\ \|)$ – przestrzeń unormowana, to funkcje

and

$+ : X \times X \longrightarrow X$ oraz $\cdot : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$

(that is respectively the sum of vectors and the product of scalar and vectors)

(tzn. odpowiednio suma wektorów i iloczyn liczby przez wektor)

are continuous.

są ciągłe$^{*)}$.

Proof The assertion can be easly obtained by point 2 of

$\boxed{\text{Dowód}}$ Teza wynika łatwo ($\longrightarrow$ $\triangle$) z 2.

the Fact On product " and to estimate:

w Fakcie „O produkcie" oraz oszacowań:

$$\|x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| = \|x - y\|_{X \times X}$$

where and

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X \times X$; oraz

$$\|\lambda x - \mu y\| = \|\lambda x - \lambda y + \lambda y - \mu y\| \leq |\lambda| \|x - y\| + |\lambda - \mu| \|y\|$$

For

dla $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$. $\boxed{\text{cnd}}$

~~Obviously we treat here $\mathbb{K}$ as the norm space which the norm $|\cdot|$~~ (absolute value)

$^{*)}$ Oczywiście $\mathbb{K}$ traktujemy tu jako przestrzeń unormowaną z normą równą modułowi $|\ |$.

The Quotient space and

2.2 Przestrzeń ilorazowa i $L^\infty(\Omega,\mu)$

Linear q.s. X/Y for linear space X over Y was recalled at

Przestrzeń liniowa ilorazowa X/Y dla przestrzeni liniowej X oraz $Y \underset{lin}{\subseteq} X$ została przypomniana na str. PB–4.

Now we try to norm it assuming that (X, $\|\ \|$) is norm sp. But sometimes is not possible, however it always half possible, define for

Teraz „spróbujemy" ją unormować zakładając, że $(X, \|\ \|)$ – unormowana. Ponieważ nie zawsze się to uda „w pełni", ale zawsze uda się „choć w połowie", określmy dla $[x] \in X/Y$

$$|||[x]||| := \mathrm{dist}(x, Y). \qquad (2)$$

Observe that (2) properly define function

Zauważmy, że (2) określa poprawnie funkcję

$$|||\ |||: X/Y \longrightarrow \mathbb{R},$$

because when $x \equiv x'$ (i.e. $x - x' \in Y$) then $x' = x + y_0$, where $y_0 \in Y$

bo gdy $x \equiv x'$ (tzn. $x-x'\in Y$) to $x' = x + y_0$, gdzie $y_0 \in Y$

$\mathrm{dist}(x', Y) = \inf_{y\in Y}\|x+(y-y_0)\| = \inf_{y\in Y}\|x-y\|$ (because bo $\{y-y_0 : y\in Y\} = Y$), i.e. tzn. right side of prawa strona (2) does not depend of nie zależy od wyboru member of representanta klasy $[x]$.

Twierdzenie (On quotient space „O przestrzeni ilorazowej")

1. $|||\ |||$ is jest seminorm on półnormą w X/Y.
2. $|||\ |||$ is jest normą in w X/Y iff wtw $Y = \overline{Y}$.

If moreover Jeśli ponadto Y – is closed and domknięta oraz $\|\ \|_i := |||\ |||$, then to:

3. $\pi(K_X(x_0, r)) = K_{X/Y}([x_0], r)$ for any and dla każdego $x_0 \in X$ oraz $r > 0$. In particular W szczególności $\pi : X \longrightarrow X/Y$ *) is jest continuous lin. open map przekształceniem liniowym ciągłym, otwartym, gdzie π when π is given by zadane jest wzorem $\pi(x) := [x]$, $x \in X$.

*) X/Y i.e. tzn. $(X/Y, \|\ \|_i)$.

4. If Jeżeli X is jest B. space, przestrzenią Banacha, then also to także $(X/Y, \|\ \|_i)$ is jest przestrzenią Banacha.

Dowód Proof.

1. Let Niech $x_1, x_2 \in X$ and let i niech $\varepsilon > 0$. Choose Dobierzmy $y_1, y_2 \in Y$ such that tak, że $\|x_j - y_j\| < \underbrace{\mathrm{dist}(x_j, Y)}_{=|||[x_j]|||} + \varepsilon/2$ for dla $j = 1, 2$.

Thus we have: Mamy zatem:

$$|||[x_1+x_2]||| = \mathrm{dist}(x_1+x_2, Y) \leqslant \|(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\| \leqslant \|x_1-y_1\| + \|x_2-y_2\|$$

$$< |||[x_1]||| + |||[x_2]||| + \varepsilon$$

which by the arbitrarity of $\varepsilon>0$ gives triangular inequality for $|||\ |||$.

co dzięki dowolności $\varepsilon > 0$ daje nierówność trójkąta dla $|||\ |||$.

The second condition (the homogenity with absolute value) can be proved for $|||\ |||$ in a simple way.

Drugi warunek („jednorodność z modułem") dowodzi się dla $|||\ |||$ jeszcze łatwiej $\longrightarrow$ △.

2. We have Mamy $|||[x]||| = 0 \iff \mathrm{dist}(x, Y) = 0 \iff x \in \overline{Y}$, but ale $[x] = 0 \iff x \in Y$. Thus Stąd (i z 1.) $|||\ |||$ is a norm jest normą iff wtw $Y = \overline{Y}$.

For the proof of the part „moreover" we assume that $Y = \overline{Y}$, so

Dla dowodu części „ponadto" zakładamy, że $Y = \overline{Y}$, zatem by 2 dzięki 2. $\|\ \|_i$ is a norm in jest normą w X/Y.

3. Observe that Zauważmy najpierw, że $\pi(K_X(0,r)) \subset K_{X/Y}(0,r)$, because gdyż

$$\forall_{x\in X} \quad \|\pi(x)\|_i = |||[x]||| = \mathrm{dist}(x, Y) \leqslant \|x - 0\| = \|x\|. \qquad (3)$$

We shall prove that there is „=" in the above „⊂".

Wykażemy, że jest „=" w powyższym „⊂".

Let

Niech $[x] \in X/_Y$, $\|[x]\|_i < r$. Zatem (so)

$$\inf\{\|x-y\| : y \in Y\} = dist(x,Y) = \|[x]\|_i < r,$$

it means (r is not lower bound of $\{\|x-y\| : y\in Y\}$) that for some

tzn. (r nie jest ograniczeniem dolnym $\{\|x-y\|: y \in Y\}$) dla pewnego

$y \in Y$ $\|x-y\| < r$, tzn. (i.e.) $x - y \in K_X(0,r)$. Ale (But)

because ... so

$\pi(x-y) = [x-y] = [x]$, skoro $y \in Y$, więc $[x] \in \pi(K_X(0,r))$.

It follows that ... which is the formula 3.

W efekcie $\pi(K_X(0,r)) = K_{X/_Y}(0,r)$, co jest wzorem

for the case ... The formula for any x_0

z 3. dla przypadku $\underline{x_0 = 0}$. Wzór dla dowolnego x_0

can be get by this at once by linearity of π

otrzymamy stąd natychmiast dzięki liniowości π (—

(this linearity is a corollary from the definition of operations in $X/Y \to$ △)

— natychmiastowy wniosek z definicji działań w $X/_Y$ ... $\to$ △)

and by

oraz ze wzoru $(\to$ △ $)$

$$x_0 + K(0,r) = K(x_0, r).$$ $*)$

To finish the proof of 3 it remains to prove the continuity of

By zakończyć dowód 3 pozostaje wykazać ciągłość i otwartość π.

π and the fact that it is open. Thanks to linearity of π, we get

Jednak znów dzięki liniowości π ciągłość dostaniemy z (3),

continuity by (3), because if $x_n \xrightarrow[x]{} x$, then

gdyż jeśli $x_n \xrightarrow[X]{} x$, to

$$\|\pi(x_n) - \pi(x)\|_i = \|\pi(x_n - x)\|_i \le \|x_n - x\|,$$

so ... The fact that it is open follows from

więc $\pi(x_n) \xrightarrow[X/_Y]{} \pi(x)$. Otwartość wynika zaś z tego, że obraz

the fact that the image of the sum (in the sense

sumy (teoriomnogościowej) to suma obrazów, a obraz każdej kuli otwartej

jest na mocy wykazanego już wzoru także kulą otwartą.

of theory set) is the sum of images, and the image of the open ball is also an open ball by the formula just proved above.

this sum is the union

$*)$ + po lewej stronie to dodawanie wektora i zbioru zadane standardowo, tzn. $\underline{v + C} := \{v + w : w \in C\}$. Przypominam też przy okazji dodawanie dwóch zbiorów: $\underline{C + D} := \{x + y : x \in C, y \in D\}$. Czyli każdy z trzech użytych tu symboli „+" jest de facto innym działaniem...

Let ... be C. seq. in X/Y.

4. Niech $\{[x_n]\}_{n\ge 1}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $X/_Y$. Przy pomocy łatwej rekursji konstruujemy

Using simple recursion we construct first a strictly increasing sequence of integers $\{k_n\}_{n\ge1}$ s.t.

najpierw ściśle rosnący ciąg indeksów $\{k_n\}_{n\ge 1}$ taki, że

$$\forall_{n\ge 1} \forall_{m \ge k_n} \quad \|[x_{k_n}] - [x_m]\|_i < \frac{1}{2^n}$$

$\longrightarrow$ △ $*)$

Then in particular we get

Wówczas mamy w szczególności

$$\forall_{n\ge 1} \quad \|[x_{k_n}] - [x_{k_{(n+1)}}]\|_i < \frac{1}{2^n}. \tag{4}$$

Now we construct, also recursively, a sequence

Teraz skonstruujemy, także rekurencyjnie, pewien ciąg

in ... which will satisfies

$\{\tilde{x}_n\}_{n\ge 1}$ w X, który będzie spełniać:

$$\forall_{n \ge 1} \quad (a)\ [\tilde{x}_n] = [x_{k_n}]\ ;\ (b)\ \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}. \tag{5}$$

The construction is as follows:

Konstrukcja ta jest następująca:

1° $\tilde{x}_1 := x_{k_1}$

2° if we have just chosen $\tilde{x}_n$ for some $n \ge 1$, and (a) holds,

jeżeli mamy już (wybrany) $\tilde{x}_n$ dla pewnego $n \ge 1$, przy czym zachodzi (a),

then by (4)

to na mocy (4)

$$\frac{1}{2^n} > \|[x_{k_n}] - [x_{k_{(n+1)}}]\|_i = \|[\tilde{x}_n] - [x_{k_{(n+1)}}]\|_i = \|[\tilde{x}_n - x_{k_{(n+1)}}]\|_i$$

that is ... So by the just

tzn. $[\tilde{x}_n - x_{k_{(n+1)}}] \in K_{X/_Y}(0, \frac{1}{2^n})$. A zatem na mocy wykazanego

---

$*)$ Można to zrobić w sposób analogiczny do konstrukcji z dowodu Tw. „O L^p" (ze strony PB-42).

It can be done analogously as in the construction from the proof of thm on page proved point 3 of the thm — we choose

już punktu 3. twierdzenia wybierzmy $z_n \in K_X(0, \frac{1}{2^n})$

s.t. — and define

taki, że $[z_n] = [\tilde{x}_n - x_{k_{(n+1)}}]$. i zdefiniujmy

$$\tilde{x}_{n+1} := \tilde{x}_n - z_n.$$

Thus we have

Mamy zatem

$$z_n = \tilde{x}_n - \tilde{x}_{n+1},$$

so — that is (b) holds for the considered n.

czyli $\| \tilde{x}_n - \tilde{x}_{n+1} \| = \| z_n \| < \frac{1}{2^n}$ — tzn. spełnione jest

Moreover, since — then

więc (b) dla rozważanego n. Ponadto, skoro $[z_n] = [\tilde{x}_n - x_{k_{(n+1)}}]$, to

$$[\tilde{x}_{n+1}] = [\tilde{x}_n - z_n] = [\tilde{x}_n] - [z_n] = [\tilde{x}_n] - [\tilde{x}_n] + [x_{k_{(n+1)}}] = [x_{k_{(n+1)}}].$$

And this means that the constructed $\tilde{x}_{n+1}$ satisfies (b) in (5) for

A to oznacza, że skonstruowane $\tilde{x}_{n+1}$ spełnia (b) z (5) dla

In effect, by induction we get that (5) is satisfied

$n+1$. W efekcie, indukcyjnie, uzyskamy, że (5) jest spełnione

For such constructed sequences

rzeczywiście, dla tak skonstruowanego ciągu $\{\tilde{x}_n\}_{n \geq 1}$.

This way we "move" the problem from X/Y into X itself, because it is easy to prove that by (5)

Tym sposobem "przenieśliśmy problem" z X/Y do samego" X.

Łatwo wykazać bowiem (⟶ ⚠ *)), że dzięki

is a Cauchy sequence in X. And so

(5) $\{\tilde{x}_n\}_{n \geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego w X. A zatem

for some $x \in X$, by the completeness of X. However

$\tilde{x}_n \xrightarrow[X]{} x$ dla pewnego $x \in X$, dzięki zupełności X. Jednak

by continuity of π (again by 3), we have

z ciągłości π (znów z 3.) mamy więc

$$[x_{k_n}] = [\tilde{x}_n] = \pi(\tilde{x}_n) \xrightarrow[X/Y]{} \pi(x) = [x],$$

that is — is convergent subsequence of — which by

czyli $\{[x_{k_n}]\}_{n \geq 1}$ jest zbieżnym podciągiem $\{[x_n]\}_{n \geq 1}$, co na mocy

---

*) Hint — Wskazówka: $\tilde{x}_n - \tilde{x}_m = (\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n+1}) + \dots + (\tilde{x}_{m-1} - \tilde{x}_m) = \sum_{j=n}^{m-1} (\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j+1})$

for — dla $m > n$.

"On subsequentional completness" gives the completness of X/Y.

Faktu "O podciągowej zupełności" daje zupełność X/Y. ■

The space described in this thm — it is

Definicja Opisana w tym twierdzeniu przestrzeń $(X/Y, \| \|_i)$ to przestrzeń ilorazowa (unormowana) dla przestrzeni unormowanej X i podprzestrzeni Y. ~~quotient space~~ (normed) quotient space for norm space X and the subspace Y.

Uwagi Remarks.

The above definition is valid only when $Y = \overline{Y}$ —

1. Powyższa definicja obowiązuje jedynie, gdy $Y = \overline{Y}$

without this we don't have a norm!

— bez tego nie mamy normy!

This construction looks similar to the construction of a "norm from a seminorm", but it is strongly different construction!

2. Choć konstrukcja przestrzeni ilorazowej unormowanej przypomina nieco konstrukcję "normy z półnormy", jest to jednak wyraźnie inna konstrukcja!

The Norm $\| \|_i$ in X/Y is uniquely given by X and Y,

3. Norma $\| \|_i$ w X/Y jest jednoznacznie wyznaczona

which is not visible in the notation — in case we need

przez X i Y, czego nie zaznaczamy w notacji — w razie potrzeby

it we can obviously add the dependence e.g. on the choice of Y.

można oczywiście uwydatnić np. zależność od wyboru Y. Jednak

But sometimes *) we shall even skip those "i" and we shall use

niekiedy *) będziemy pomijać nawet owo „i" i użyjemy

the same symbol $\| \|$

tego samego symbolu $\| \|$, co w $\| \|$. Jest spora szansa, że to nie doprowadzi do nieporozumień, gdy (konsekwentnie) jedna z norm będzie „przykładana" do elementów postaci $x \in X$, a druga do tych postaci $[x] \in X/Y$.

---

*) W głównym przykładzie $L^\infty(\Omega, \mu)$, który za chwilę, będziemy na razie nieco ostrożniejsi przez jakiś czas...

In the main example $L^\infty(\Omega, \mu)$ we shall be more carefull with this rotation

It can be observed that there are several optional formulas
4. Warto zauważyć kilka alternatywnych formuł
defining
definiujących $\underline{\| \ \|_i}$ $(\longrightarrow \triangle)$:

$$\|[x]\|_i = \operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{x' \in [x]} \|x'\| = \inf_{y \in Y} \|x+y\| = \inf_{y \in Y} \|x-y\|$$

Opisana w twierdzeniu konstrukcja przestrzeni ilorazowej okazuje się być nie tylko narzędziem do „tworzenia” nowych przestrzeni Banacha, ale także wygodnym środkiem technicznym w rozmaitych dowodach (o czym pewnie przekonamy się tu nie raz).
W tym rozdziale jednak najważniejsze jest dla nas to pierwsze, a szczególnie nasze zasadnicze zastosowanie do konstrukcji zapowiadanej już przestrzeni typu „L^∞” powstałej „na bazie” „ℓ^∞”:
We want to use the previous construction to derive L^∞ from ℓ^∞.

Example (space „L^∞” and norm „$\| \ \|_{ess\,\infty}$”)
$\boxed{\text{Przykład}}$ (przestrzeń „L^∞” i norma „$\| \ \|_{ess\,\infty}$”)
Consider again the measurable space $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. In the space
Rozważmy (znów) przestrzeń mierzalną $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. W przestrzeni
(notice that for this def we don't need μ, but only $\mathfrak{M}$).
$\mathcal{M}_b := \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$ (która (sama) „nie potrzebuje” miary μ, a jedynie jej σ-ciała $\mathfrak{M}$)
consider its subspace defined (now in a way depending on the measure μ)
rozważmy jej podprzestrzeń, zdefiniowaną już w sposób wyraźnie zależny od μ:

$$Z_\mu := \{f \in \mathcal{M}_b : f = 0 \ \mu\text{-p.w.}\}$$ (a.e.)

It's easy to prove
Nietrudno wykazać $\longrightarrow \triangle$ (to dobre przypomnienie prostych ale ważnych faktów i metod stosowanych w teorii miary...)

that Z_μ is a closed linear subspace of $\mathcal{M}_b$.
że Z_μ jest domkniętą podprzestrzenią liniową $\mathcal{M}_b$.
So $\mathcal{M}_b / Z_\mu$ is a Banach space with
Zatem $\mathcal{M}_b / Z_\mu$ jest przestrzenią Banacha z
appropriate norm $\| \cdot \|_i$. For this space we shall
odpowiednią normą $\| \ \|_i$. Stosujemy dla tej przestrzeni
use the symbor $L^\infty(\Omega, \mu)$ and the norm is often "roughly"
oznaczenie $L^\infty(\Omega, \mu)$, a normę często oznacza się „żargonowo”
denoted by $\| \cdot \|_\infty$, which is somewhat dangerous especially when we
$\| \ \|_\infty$, co jednak bywa niebezpieczne w połączeniu ze stosowaniem
write the elements of $\mathcal{M}_b$ without [ ].
jednocześnie zwyczajem (naszym jednak nie...) pomijania „[ ]” przy „[f]”. Dla tego so here we shall use
tu będziemy używać oznaczenia

$$\| \ \|_{\infty\, ess} \quad (\text{or even } \| \ \|_{ess,\mu})$$

similarly as for $\| \cdot \|_p$ in
(od essential = istotny). Podobnie jak dla $\| \ \|_p$ w
there is not μ in this notation.
$L^p(\Omega, \mu)$ i $p \in [1, +\infty)$ w oznaczeniu normy brak μ...
We should stress that in many ways this is just the space
Warto podkreślić, że pod wieloma względami to właśnie
which is the proper "limiting complement"
ta przestrzeń $L^\infty(\Omega, \mu)$ jest właściwym „granicznym uzupełnieniem”
of the all family with
całej rodziny przestrzeni $L^p(\Omega, \mu)$ z $p < +\infty$
and it is better "complement" than $\ell^\infty(\Omega)$, and this is way we use
niż np. przestrzeń $\ell^\infty(\Omega)$ – i stąd choćby jej oznaczenie
"L" in this notation. We shall often consider
z dużym „L”. Niekiedy będziemy więc rozważać
the family L^p "extended" that is
„rodzinę L^p rozszerzoną” tzn. $L^p(\Omega, \mu)$ dla $p \in [1; +\infty]$
instead of similarly as $\ell^p(\Omega)$
zamiast tylko $p \in [1; +\infty)$, podobnie jak mieliśmy już np. w przypadku $\ell^p(\Omega)$.

the symbol
Concerning $\|\cdot\|_{\infty ess}$ we can mention also
W związku z symbolem $\|\ \|_{\infty\, ess}$ warto też
another symbol containing those "ess". For
wspomnieć o innym symbolu zawierającym „ess". Dla
we denote
$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ oznaczamy

$$\operatorname{supess} g := \inf\Big\{ \sup_{t \in \Omega \setminus Z} g(t) : Z \in \mathfrak{M},\ \mu(Z) = 0 \Big\}.$$

$\boxed{\text{Fakt}}$

If then
Jeżeli $f \in \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, to

$$\|[f]\|_{\infty\, ess} = \operatorname{supess} |f|$$

(for the both sides goal we obviously consider
(przy czym dla celu obu stron tej równości rozważamy oczywiście
the same measure μ on the σ-algebra $\mathfrak{M}$.
tę samą miarę μ na σ-ciele $\mathfrak{M}$).

$\boxed{\text{Dowód}}$ $\longrightarrow$ △.