I. Przestrzenie (space) Banacha

To wstępny rozdział do Analizy Funkcjonalnej I poświęcony głównie przykładom najczęściej używanych przestrzeni unormowanych opartych na pewnych przestrzeniach liniowych funkcji skalarnych (lub ich klas równoważności) z odpowiednio dobraną normą. Poza konkretnymi przykładami omówione są pewne ogólne konstrukcje. Istotna część rozdziału to dowody zupełności („banachowskości") tych przestrzeni – w tym też pewne ogólne metody dowodzenia takich wyników. Ponadto: normy równoważne, izometryczność, specyfika skończonego i nieskończonego wymiaru (zwartość / niezwartość kuli domkniętej).

Podrozdziały

0. Przypomnienie (kilku pojęć, oznaczeń, faktów dot. algebry liniowej, topologii metrycznej, normy) i zwartość/niezwartość kuli – str. PB-2
1. Przykłady przestrzeni unormowanych, przestrzenie Banacha – str. PB-18
2. Dalsze konstrukcje przestrzeni Banacha – produkt i przestrzeń ilorazowa – str. PB-

0. Przypomnienie (kilku pojęć, oznaczeń, faktów dot. alg. liniowej, topologii metrycznej, normy) i zwartość (compattezza) / niezwartość kuli (ball)

0.1. Z algebry liniowej

W ramach Analizy Funkcjonalnej rozważa się jedynie przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub (or) $= \mathbb{C}$. Niech X – taka przestrzeń liniowa.

- przestrzeń rozpięta (linear span of Y (space gen by set Y)) $\operatorname{lin} Y$: jeżeli (if) $Y \subset X$, to (then)
$$\operatorname{lin} Y := \{x : \exists_{\substack{y_1,\dots,y_n \in Y \\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}}} x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j\}$$
tzn. (it means) zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów z (from) Y *)

Fakt $\operatorname{lin} Y$ jest (is) najmniejszą (the smallest) (w sensie $\subset$) (in inclusion sense) podprzestrzenią liniową (linear subspace) przestrzeni X spośród tych (from X which contains), które zawierają zbiór (set) Y.

- $\tilde{X} \underset{lin}{\subset} X$ – tak oznaczamy, że (it means) $\tilde{X}$ jest podprzestrzenią (is a linear subspace) liniową p. (of) X.

- zbiór Y (nie koniecznie (not necessary finite) skończony) jest liniowo niezależny (is lin. indep.) wtw dla każdego (for each finite sequence) skończonego ciągu $y_1, \dots y_n$, $n \geq 1$, (of elements of) elementów Y i ciągu (and a sequence) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ z $\mathbb{K}$ jeżeli (if) $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j = 0$, to (then) $\forall_{j=1,\dots,n}\ \lambda_j = 0$.

---

*) Gdy Y – skończony (finite), $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$, to zamiast $\operatorname{lin} Y$ używamy (we can use) też ozn. $\operatorname{lin}(y_1, \dots, y_k)$. Zauważmy też, że suma oznaczająca komb. liniową jest skończona – inna w przestrzeni liniowej sensu nie ma (by mówić o sumach nieskończonych będziemy potrzebowali jakiegoś pojęcia zbieżności – po to m.in. będą normy...).

y is a basis iff

• Y jest bazą *) wtw Y jest liniowo niezal. oraz $\mathrm{lin}\, Y = X$.

is a basis iff maximal in the sense of ~~contains~~ inclusion
lin indep set in X

Fakt Y jest bazą wtw maksymalnym (w sensie $\subset$) **) układem liniowo niezależnym w X.

Existence of basis

Fakt („Istnienie bazy")

lin. space X ~~cont~~ posses a basis, moreover

Każda przestrzeń liniowa X posiada bazę, co więcej

each lin indep set in X is contained in a base

każdy układ liniowo niezależny w X zawiera się w pewnej

Moreover each to bases X have the same cardinality

bazie. Ponadto każde dwie bazy X są równoliczne.

Dimension is the cardinality of the base

Wymiar X, to moc bazy X.

Map operator

• Przekształcenie (operator) liniowe (-wy). Jeżeli

over then

X, Y przestrzenie liniowe nad $\mathbb{K}$, to funkcja (przekszt., oper.) $A: X \to Y$ jest liniowe wtw.

(i) $\forall_{x,y \in X}\ A(x+y) = Ax + Ay$ ***)

(ii) $\forall_{\lambda \in \mathbb{K}, x \in X}\ A(\lambda x) = \lambda A(x)$

means the set of all maps

Symbol: $\mathcal{L}(X,Y)$ oznacza zbiór wszystkich przekształceń

from to This is a linear space when

liniowych z X w Y. Stanowi on przestrzeń liniową nad $\mathbb{K}$ gdy

we define pointwise operations

określimy standardowo „punktowe" działania ($(A+B)(x) := A(x) + Bx$, $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$, $x \in X$, $A \in \mathbb{K}$). $\mathrm{Ker}\, A := A^{-1}(\{0\})$, $\mathrm{Ran}\, A := A(X)$.

***) zwyczajowo można ew. pomijać nawias dla funkcji liniowych, szczególnie oznaczanych dużymi literami tzn. np. $Ax := A(x)$.

see the next page

*) i **) → na str. następnej

quotient if then

• Przestrzeń liniowa ilorazowa X/Y gdy $Y \subset X$ to

the set of all abstract class of equivalent relation

zbiór X/Y wszystkich klas abstrakcji $[x]$ relacji równoważności

in defined as iff

$\equiv$ w X zdefiniowanej tak: $x \equiv y$ wtw $x - y \in Y$

with operations

z działaniami: $[x] + [y] := [x+y]$, $\lambda \cdot [x] := [\lambda x]$, $0 := [0]$

(oczywiście te $+, \cdot, 0$ z lewych stron to „nowe" obiekty dla X/Y, inne niż te w X)

This is a proper definitions and they make a linear space

Fakt To rzeczywiście poprawne definicje i zadają w X/Y przestrzeń liniową.

Some important for us example of function linear space.

• Ważny dla nas przykład „funkcyjnej" przestrzeni liniowej:

Let ~~[illegible]~~ an non empty set By

niech Ω - dowolny niepusty zbiór. Przez

$$\ell(\Omega)$$

we should denote of all

będziemy oznaczać przestrzeń liniową wszystkich funkcji

we use this notation to stress the field ($\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$)

$f: \Omega \to \mathbb{K}$ (w razie potrzeby $\ell_{\mathbb{K}}(\Omega)$, gdy trzeba sprecyzować

with usual ~~operations~~ pointwise

czy dla $\mathbb{C}$ czy dla $\mathbb{R}$) ze zwykłymi „punktowymi"

operations on

działaniami na funkcjach (z z funkcją zerową jako zerem)

— tzn. sam zbiór funkcji dla $\ell(\Omega)$ to $\mathbb{K}^{\Omega}$ wg. standardowej notacji teoriomnogościowej, a działania „najbardziej naturalne z możliwych"...

Remark in particular the usual linear space

Uwaga: w szczególności „zwykła" przestrzeń liniowa d-

dimensional it is

wymiarowa $\mathbb{K}^d$ to $\ell(\{1, \ldots, d\})$

up to an identification

(ewent. z dokładnością do utożsamienia: $(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow x$, gdzie $x: \{1, \ldots, d\} \to \mathbb{K}$ dana wzorem $x(j) = x_j$.)

another names: its important to distinguish

odwołujący ze str. poprzedniej

*) Inne nazwy: baza liniowa, baza Hamela — należy odróżniać

them from shauder basis or

(starannie) od baz Schaudera (tzw. topologicznych) lub baz ortonormalnych używanych w kontekście przestrzeni Banacha lub odpow. Hilberta. Bazy (te liniowe) mają dość niewielką przydatność dla p. Banacha, ale „jakąś" mają jednak...

**) Nie mylić z „największym"...

distinguish from the largest

From mainly metric

0.2. Z topologii (głównie metrycznej)

notation for interior closure

- $\mathrm{Int}\,Y$, $\overline{Y}$ – oznaczenia wnętrza, odpow. domknięcia podzbioru $Y \subset X$, gdzie X przestrzeń topologiczna (w szczeg. gdy metryczna)

space; in particular

open ball centered in x_0 with radius r

- $K(x_0, r)$ – kula „otwarta" o środku x_0 i promieniu r *) w przestrzeni metrycznej (X, ϱ) tzn.

$$K(x_0, r) := \{x \in X : \varrho(x, x_0) < r\};$$

closed ball we should denote by; that is

kulę „domkniętą" będziemy czasem oznaczać przez $\overline{K}(x_0, r)$ tzn.

$$\overline{K}(x_0, r) := \{x \in X : \varrho(x, x_0) \leq r\}^{**)}$$

a sferę ozn. $S(x_0, r)$, tzn. $S(x_0, r) := \{x \in X : \varrho(x, x_0) = r\}$.

convergence

- zbieżność (bez zaznaczania, że chodzi o zb. w sensie ϱ) oznaczamy przez „$\xrightarrow[n]{}$", tzn. dla ciągu $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ w X i $x \in X$

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{wtw} \quad \varrho(x_n, x) \longrightarrow 0$$

a to zwykła zbieżność w $\mathbb{R}$...

sometimes

Czasem dodajemy coś do „$\longrightarrow$", by wyjaśnić, że chodzi o zbieżność w sensie ϱ – np. oznaczamy ją „$\xrightarrow[\varrho]{}$", albo „$\xrightarrow[\|\cdot\|]{}$", gdy chodzi o metrykę indukowaną przez $\|\cdot\|$ (– patrz str. 8).

**) Ale uwaga – oznaczenie to bywa niebezpieczne, bo w niektórych przestrzeniach metrycznych może się zdarzyć

$$\overline{K}(x_0, r) \neq \overline{K(x_0, r)} \quad (\rightarrow \text{▲}).$$

Szczególnie nie dla metryk zadanych przez normę w X-liniowej...

*) Niektórzy ozn. przez $B(x_0, r)$ – bardziej z ang. ....

Cauchy sequences

- $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ jest ciągiem Cauchy'ego wtw

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{N \geq n_0} \ \forall_{m, n \geq N} \ \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

in metric space each convergent sequence is Cauchy and each Cauchy is bounded.

Fakt W przestrzeni metrycznej każdy ciąg zbieżny jest Cauchy'ego, a ciąg Cauchy'ego – ograniczony*).

completeness; complete iff for any; is; sequence

- Zupełność: przestrzeń metryczna (X, ϱ) jest zupełna jeżeli dla każdego ciągu Cauchy'ego $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ w X istnieje $x \in X$ t. że $x_n \longrightarrow x$.

in; there exists; s.t.

about subsequential completness

(„O podciągowej zupełności")

For completness of X it is sufficient that each has a subsequence convergent in

Fakt Dla zupełności X wystarcza, że każdy ciąg Cauchy'ego w X posiada podciąg zbieżny w X (tzn. do $x \in X$).

the distance between point x and set $Y \subset X$. where

- odległość punktu x od zbioru $Y \subset X$, gdzie (X, ϱ) – przestrzeń metryczna, $x \in X$, oznaczamy przez $\mathrm{dist}(x, Y)$ i definiujemy:

we denote by; and define

$$\mathrm{dist}(x, Y) := \inf_{y \in Y} \varrho(x, y).$$

iff

Fakt $\mathrm{dist}(x, Y) = 0$ wtw $x \in \overline{Y}$.

Proof. known from Topology. or

Dowód – znane z topologii lub $\longrightarrow \triangle$ ... ▨

A sequence is bounded if the set of its term is bounded

*) Ciąg ograniczony, tzn. zbiór wyrazów jest ograniczony, a $Y \subset X$ jest ograniczony wtw $\exists_{R \in \mathbb{R}, x_0 \in X}$ $K(x_0, R) \supset Y$, o ile $X \neq \emptyset$... (równoważnie: $\forall_{x_0 \in X} \exists_{R \in \mathbb{R}} Y \subset K(x_0, R)$ dzięki „nierówności $\triangle$").

and a set is bounded iff; equivalently; since triangular inequality.

0

0.3 O normach

• $p: X \to \mathbb{R}$ jest **półnormą** w przestrzeni liniowej *) X wtw
(is a seminorm)

(ii) $\forall_{x\in X} \forall_{\lambda\in\mathbb{K}} \quad p(\lambda x) = |\lambda|\cdot p(x)$

(iii) („nier Δ") $\forall_{x,y\in X} \quad p(x+y) \le p(x) + p(y)$.

Często dla półnormy używa się symbolu („w stylu") $|||\cdot|||$, a nawet niekiedy („nielegalnie") $\|\cdot\|$ jak dla normy.
(often for seminorm we use sometimes illegally we will use $\|\cdot\|$ both for norm and seminorm.)

• **norma**, to taka półnorma p, która jest **niezdegenerowana** tzn.
(is a seminorm which is non-degenerated)

(i) $\forall_{x\in X} \quad p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Dla normy najczęściej używa się symbolu w stylu $\|\cdot\|$.

You can see here way

---

*) Tu już widać, czemu $\mathbb{K}$ musi być $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$ – patrz warunek (ii) z modułem ...
(should be or; see condition (we need absolute value).)

PB – 7

• **metryka zadana (indukowana) przez normę**
(A metric induced by a)

Gdy $\|\cdot\|$ norma w przestrzeni liniowej X to metrykę zadaną przez normę nazywamy $\varrho : X\times X \to \mathbb{R}$ daną wzorem:
(then by a metric given by a norm we call given by)

$$\varrho(x,y) := \|x-y\|, \quad x,y\in X.$$

Fakt To rzeczywiście metryka w X.
(This is really a metric in X)

• **Przestrzeń unormowana** to formalnie para $(X, \|\cdot\|)$, gdzie X – przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lub $=\mathbb{R}$ (mówi się odpowiednio przestrzeń u. zespolona/rzeczywista).
W praktyce mówi się dla uproszczenia często o samym X jako o przestrzeni unormowanej – ściślej wtedy, gdy
(a) wiadomo (nie ma wątpliwości) o jaki wybór normy $\|\,\|$ w danym X chodzi,
(b) chodzi o sytuację „abstrakcyjną" (nie konkretny przykład) X i w X rozważamy jakąś jedną normę $\|\,\|$.

Uwaga
Gdy mówimy o przestrzeni unormowanej używamy (bez osobnych innych zastrzeżeń) określeń topologicznych np. zbiór otwarty, domknięcie, gęstość itd. lub metrycznych – np. zbieżność, ciąg Cauchy'ego, odległość itp – zawsze chodzi o ich sens względem metryki indukowanej przez normę i topologii wyznaczonej przez tę metrykę.

• Podprzestrzeń przestrzeni unormowanej. Gdy $(X, \|\cdot\|)$ – przestrzeń unormowana oraz $\tilde{X} \subseteq_{lin} X$, to po obcięciu $\|\,\|$ z X do $\tilde{X}$ uzyskamy też normę, ale w $\tilde{X}$. Każdą uzyskaną tak przestrzeń unormowaną $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ nazywamy **podprzestrzenią** (ew. z dodatkiem „unormowaną") X.
(Subspaces of a norm space. If ... then after cutting from to we get also a norm but in ... we call subspace or normed subspace)

PB – 8

Isometry

• izometria*) przestrzeni unormowanych X i Y (z X na Y)**)

each such — that

to każde takie $\Phi \in \mathcal{L}(X,Y)$, że Ran $X = Y$

and — where

oraz $\forall_{x \in X} \ \|\Phi(x)\|_Y = \|x\|_X$, gdzie

in — respectively

$\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ to normy „obowiązujące" w X, Y odpowiednio.

Przestrzenie X, Y nazywamy izometrycznymi***) wtw

there exists an

istnieje pewna izometria X na Y.

on transfer of norms

Fakt (O przenoszeniu normy) + Definicja

Jeśli X, Y przestrzenie liniowe i $\|\ \|$ – norma w Y oraz $\Phi: X \to Y$ liniowa bijekcja, to funkcja (then)

$\|\ \|_\Phi : X \to \mathbb{R}$ zadana wzorem (given by formula)

$$\|x\|_\Phi := \|\Phi(x)\|, \quad x \in X$$

jest normą w X oraz Φ jest izometrią z $(X, \|\ \|_\Phi)$ na $(Y, \|\ \|)$. Normę $\|\ \|_\Phi$ nazywamy przeniesieniem przez Φ normy $\|\ \|$.

(is — and — we call transfer by of)

Dowód: To, że $\|\ \|_\Phi$ norma – łatwe $\to \Delta$, a izometryczność Φ jasna z def. izometrii. ∎

(clear by def.)

(**) nad tym samym $\mathbb{K}$. Oczywiście – na ogół milcząco zakładamy, że $\mathbb{K}$ jest to samo dla rozważanych w danym „problemie" przestrzeni.

(over the same field — obviously)

***) Proszę nie mylić z „izomorficznymi" – o tym będzie nieco dalej.

(Please, do not mix with isomorphic — we tell about this later)

*) niekiedy mówi się dłużej: „izometria liniowa", my będziemy skracać, choć wówczas powstaje kłopot z nazwą dla wszystkich (niekoniecznie liniowych) przekształceń zachowujących normę...

Isometry conserves everything which is defined in linear or norm term.

Uwaga (O zachowywaniu własności i obiektów przez izometrię)

Jeżeli Φ jest izometrią z X na Y, to można powiedzieć nieco nieformalnie, że z punktu widzenia wszystkich takich własności przestrzeni, które dają się zdefiniować „w języku" operacji liniowych i normy, przestrzenie te są „identyczne". Tzn. Φ „zachowuje" wszystkie obiekty oraz własności definiowalne w tym języku.

Aby powyższe wyrazić ściśle i precyzyjnie trzeba by w odniesieniu do każdego takiego obiektu / takiej własności formułować odpowiedni fakt (twierdzenie) osobno. To byłoby jednak niezmiernie nudne nawet dla kilku tego typu przypadków... Więc zamiast tych kilku:

→ Zadanie: Sformułować i dowieść to 100% ściśle dla „obiektu" w stylu" kula / sfera o środku x i promieniu r oraz dla własności topologicznej typu ośrodkowość przestrzeni lub nieco ambitniej – dla takiej własności przestrzeni: każdy punkt każdego odcinka o końcach na $S(0,1)$ jest jednym z tych końców lub leży poza $S(0,1)$. → Δ.

Equivalence of

• Równoważność norm

Niech $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ będą obie normami w przestrz. lin. X.

Def. Normy te są równoważne (are equivalent) – oznaczamy to przez $\|\ \|_1 \equiv \|\ \|_2$ – (we denote this by)

wtw (iff) $\exists_{c, C \in \mathbb{R}_+} \ \forall_{x \in X} \ c\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C\|x\|_2$. *)

Oczywiście (obviously) $\equiv$ jest relacją równoważności (equivalence) (stąd jej nazwa jest „OK").

*) $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ (więc $0 \notin \mathbb{R}_+$)

Equivalence / give / convergence

Fakt: Równoważne normy w X wyznaczają tę samą zbieżność ciągów i tę samą topologię.

Dowód: $\triangle$

corollary. continuity is also not changed.

Wniosek Zmiana normy w X na równoważną jej nie wpływa na kwestię ciągłości funkcji z X ani w X.

Theorem (equivalence of)

Twierdzenie ("O równoważności norm")

Each two norms are equivalent

Każde dwie normy w skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej są równoważne.

In the case of / the result is known / the general case is easy / could be reduced to this using transfer / norm

Dowód W przypadku gdy tą przestrzenią jest $\mathbb{K}^d$ (dla pewnego $d \in \mathbb{N}$) wynik ten jest znany z Analizy II. Przypadek ogólny łatwo (szczegóły $\longrightarrow \triangle$) sprowadzić do powyższego z pomocą Faktu O przenoszeniu normy (str. PB-9) ▨

compactness and not compactness of the closed ball.

· Zwartość/niezwartość kuli "domkniętej"

Warto przypomnieć o tym, że kluczowym elementem dowodu (tego z Analizy II) powyższego twierdzenia dla przypadku $\mathbb{K}^d$ był fakt, że kula $\overline{K}(0,1)$ (i stąd też sfera $S(0,1)$) przy wyborze np. euklidesowej normy jest zwarta. Co więcej zachodzi

Twierdzenie ("O zwartości kuli")

Gdy X – unormowana i $\dim X < +\infty$, to $\overline{K}(0,1)$ i $S(0,1)$ są podzbiorami zwartymi, co więcej, każdy podbiór ograniczony$^{*)}$ i domknięty jest zwarty$^{**)}$.

compact subset, moreover each bdd and closed subspace is compact

*) W przypadku podzbiorów przestrzeni unormowanej, Y jest ograniczony wtw $\exists_{R \in \mathbb{R}}\ Y \subset \overline{K}(0,R)$ – patrz przykłs na str. PB-6.

**) A podzbiór przestrzeni topologicznej jest zwarty wtw jest zwartą przestrzenią topologiczną w sensie topologii podprzestrzeni.

Uwaga: $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją Lipschitzowską, bo z nierówności trójkąta

$$\forall_{x,y \in X} \ \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \le \|x-y\|,$$

in particular it is continuous / are closed being inverse image of

jest więc w szczególności funkcją ciągłą. $\overline{K}(0,1)$ i $S(0,1)$ są więc domknięte, jako przeciwobrazy zbiorów domkniętych $[0;1]$ i $\{1\}$, odpowiednio. Wystarczy więc wykazać to „co więcej"... •

**) It is enough to prove the moreover of the thm

let / bounded / and closed / and let / linear / we take / basis / isom. given by this formula:

Dowód Tw. Niech $F \subset X$, F ograniczony i domknięty. Niech $\{v_1, \dots, v_d\}$ baza w X i niech $\phi : \mathbb{K}^d \to X$ będzie izomorfizmem liniowym zadanym jednoznacznie przez warunki $\phi(e_j) = v_j$, $j = 1, \dots d$.$^{*)}$

Then we transfer the norm by ϕ / thanks to

Przenosimy normę $\| \ \|$ z X do $\mathbb{K}^d$ przez ϕ. Dzięki izometryczności ϕ (z Faktu "O przenoszeniu normy") ϕ jest homeomorfizmem z $\mathbb{K}^d$ z topologią $\mathcal{T}$ wyznaczoną przez $\| \ \|_\phi$ na X (z topologią wyzn. przez $\| \ \|$). Wystarczy zatem wykazać, że $\phi^{-1}(F)$ jest zwartym podzb. $\mathbb{K}^d$ w sensie $\mathcal{T}$.. Jednak norma euklidesowa $\| \ \|_2$ i $\| \ \|_\phi$ są równoważne (dzięki Tw. „O równoważności norm")

from / with / given by / on / we should then prove / is compact / in / in the sense of

i zatem $\mathcal{T}$ jest jednocześnie topologią wyznaczoną przez $\| \ \|_2$. Wystarczy zatem wykazać, że $\phi^{-1}(F)$ jest domknięty (w sensie $\mathcal{T}$.) i ograniczony (w sensie $\| \ \|_2$). F był domknięty, więc z powyżej wspomnianej homeomorficzności także $\phi^{-1}(F)$ jest domknięty – właśnie wzgl. $\mathcal{T}$. Z izometryczności ϕ jako z $\mathbb{K}^d$ z $\| \ \|_\phi$, ϕ^{-1} jest ograniczony w sensie $\| \ \|_\phi$, ale zatem też w sensie $\| \ \|_2$, dzięki równoważności $\| \ \|_\phi$ i $\| \ \|_2$. ▨

~~??? ??? ??? ???~~

*) $e_1, \dots, e_d$ to kolejne wektory bazy standardowej w $\mathbb{K}^d$, tzn. $e_j = (0 \dots \underset{j}{1} \dots 0)$.

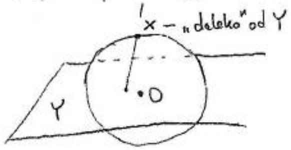
**) Podaję „na wzór" dość szczegółowo, choć to proste, ale dość typowy schemat.

It's good to know that a set is compact

Przypominam, że zwartość, którą się tu na chwilę zajęliśmy jest pojęciem wygodnym, aby ważnej – własnością „pożądaną" często. Np. dlatego, że dla funkcji (skalarnych) ciągłych określonych na zbiorach (przestrzeniach) zwartych obowiązuje przydatne Twierdzenie Weierstrassa (o osiąganiu kresów). Jednak „w większości" ważnych dla nas w. tej teorii przestrzeniach – gdy $\dim X = +\infty$ – tej zwartości mieć nie będziemy! Przekonamy się o tym wkrótce po poniższym lemacie, przydatnym nie tylko tu.

Lemat Riesza

Jeśli X – przestr. unormowana, $Y \underset{lin}{\subset} X$ i $X \neq Y = \overline{Y}$, to
$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{x\in S(0,1)} \ 1 \geq \operatorname{dist}(x,Y) > 1-\varepsilon.$$



Dowód

Zauważmy najpierw, że dla każdego $x\in S(0,1)$ mamy
$$\operatorname{dist}(x,Y) = \inf_{y\in Y}\|x-y\| \leq \|x-0\| = \|x\| = 1,$$
wystarczy zatem zadbać o drugą nierówność. Dla $\varepsilon \geq 1$ – jasne (bo...). Ustalmy $\varepsilon\in(0;1)$ – skonstruujemy odpowiedni x. Niech więc x_0 – dowolnie wybrany wektor z $X\setminus Y$. Ponieważ $Y=\overline{Y}$ zatem (patrz Fakt „o dist" str. PB-6) mamy $\operatorname{dist}(x_0,Y) =: r_0 > 0$.
Wykażemy, że potrzebny x może zostać wybrany w postaci
$$x_y := \frac{1}{\|x_0-y\|}(x_0-y), \qquad (1)$$
z pewnym $y\in Y$. Zauważmy, że po pierwsze, dla $y\in Y$

wektor x_0-y jest niezerowy, bo $x_0\notin Y$, czyli dzielenie przez $t_y := \|x_0-y\| > 0$ ma sens w (1), a ponadto automatycznie $x_y\in S(0,1)$. Mamy także
$$\forall_{y'\in Y} \ \|x_y-y'\| = \frac{1}{t_y}\|x_0-y-t_y y'\| = \frac{1}{t_y}\|x_0-(y+t_y y')\| \geq \frac{\operatorname{dist}(x_0,Y)}{t_y} = \frac{r_0}{t_y},$$
ponieważ $y+t_y y'\in Y$.
A zatem wykazaliśmy, że
$$\operatorname{dist}(x_y,Y) = \inf_{y'\in Y}\|x_y-y'\| \geq \frac{r_0}{t_y} = \frac{r_0}{\|x_0-y\|}$$
Wystarczy zatem udowodnić, że dla pewnego $y\in Y$ zachodzi
$$\frac{r_0}{\|x_0-y\|} > 1-\varepsilon, \text{ czyli równoważnie, że}$$
$$\|x_0-y\| < \frac{r_0}{1-\varepsilon}.$$
Ale $\frac{r_0}{1-\varepsilon_0} > r_0 = \operatorname{dist}(x_0,Y) = \inf_{y\in Y}\|x_0-y\|$, zatem z definicji „inf", takie y musi istnieć (bo $\frac{r_0}{1-\varepsilon_0}$, jako większe od kresu dolnego, nie może być ograniczeniem dolnym $\{\|x_0-y\| : y\in Y\}$). ☐

Gdyby zamiast nierówności w Lemacie Riesza uzyskać ~~The case~~ ~~of~~ ~~the~~ ~~could be called "perpendicularity"~~ $\operatorname{dist}(x,Y)=1$ (oczywiście wraz z $\|x\|=1$) to byłoby to coś w rodzaju „prostopadłości" wektora x do przestrzeni Y, zgodnie z naszymi geometrycznymi wyobrażeniami z przestrzeni euklidesowych.

The case $\operatorname{dist}(x,Y)=1$ could be called "perpendicularity" of x to Y (with condition $\|x\|=1$).

this is way we sometimes said that R. lemma is about almost perpendicularity.

I choć nie w każdej przestrzeni unormowanej da się „sensownie" wprowadzić jakąś namiastkę pojęcia prostopadłości (znanego dobrze z przestrzeni z iloczynem skalarnym), to mimo tego, że wygląda na dowolność $\varepsilon > 0$ w Lemacie Riesa, wygodnie wyobrażać sobie nieformalnie tezę tego lematu, jako możliwość wyboru niezerowego wektora „prawie prostopadłego" do Y.

We need closedness of Y in this lemma

Lemat Riesa wymaga domkniętości podprzestrzeni Y. Przyda nam się jednak zatem:

Uwaga

Finite dimensional linear subspaces in a norm space are closed.

Skończenie wymiarowe podprzestrzenie liniowe w przestrzeni unormowanej są domknięte.

Dowód

Niech X – unormowana, $Y \underset{lin}{\subset} X$, $\dim Y < +\infty$. Niech (Let) $x \in \overline{Y}$, zatem (so) wybierzmy (choose) $\{y_n\}_{n\geq 1}$ w (in) Y taki, że (s.t.) $y_n \to x$. W szczególności (in particular) $\{y_n\}_{n\geq 1}$ jest (is) ciągiem ograniczonym (bounded) w (in) X, a zatem (so) i w podprzestrzeni (also in) Y, tzn. (it means that $\exists$) dla pewnego $R \in \mathbb{R}_+$

$\forall_{n\geq 1}\ y_n \in \overline{K}_Y(0,R)$. Ponieważ w Y (Because in Y) kula (ball) $\overline{K}_Y(0,R)$ jest zwarta (is compact) na mocy (so by) Tw. „O zwartości kuli" (compactness of ball), zatem istnieje ($\exists$) $y \in Y$ oraz podciąg (and a subsequence) $\{y_n'\}_{n\geq 1}$ ciągu $\{y_n\}_{n\geq 1}$ taki, że (s.t.) w Y $y_n' \to y$. Ale wówczas oczywiście także w X (But then obviously also in X): $y_n' \to y$, a ponadto $y_n' \to x$, skoro mieliśmy $y_n \to x$. Stąd $y = x$, więc $x \in Y$. Stąd $\overline{Y} \subset Y$, czyli Y – domknięta. $\boxtimes$

Teraz już łatwo uzyskamy poniższy wynik:

Twierdzenie („O niezwartości kuli") (non compactness of ball)

Gdy X – unormowana i $\dim X = +\infty$, to $\overline{K}(0,1)$ i $S(0,1)$ nie są zbiorami zwartymi (are not compact sets).

Dowód

The closed subset of a compact set would be compact

Domknięty podzbiór zbioru zwartego byłby zwarty a $S(0,1)$ jest domkniętym podzbiorem $\overline{K}(0,1)$, zatem wystarczy wykazać (so it is enough to prove only that $S(0,1)$) niezwartość $S(0,1)$ (is not compact). Skonstruujemy rekurencyjnie pewien ciąg elementów $S(0,1)$. Niech x_1 – dowolnie wybrany w $S(0,1)$ (istnieje, bo $X \neq \{0\}$ ...). Gdy dla $n \geq 1$ zdefiniowane są już $x_1, \dots, x_n \in S(0,1)$, to niech x_{n+1} będzie wektorem dobranym za pomocą Lematu Riesa do $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i $Y = \mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$ – domkniętej na mocy niedawnej uwagi. Tak zdefiniowany rekurencyjnie ciąg $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ma więc wyrazy w $S(0,1)$ oraz

$$\forall_{n\geq 1}\ \mathrm{dist}(x_{n+1}, \mathrm{lin}\{x_1, \dots x_n\}) \geq \frac{1}{2}.$$

W szczególności dla każdego $m, k \geq 1$, jeżeli $m \neq k$ to biorąc $n := \max(m,k) - 1 \geq 2 - 1 = 1$ oraz $j := \min(m,k)$ uzyskamy, więc

$$\|x_m - x_k\| = \|x_{n+1} - x_j\| \geq \mathrm{dist}(x_{n+1}, \mathrm{lin}\{x_1, \dots x_n\}) \geq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

$j \in \{1, \dots n\}$

Ten ciąg $\{x_n\}_{n\geq 1}$ nie może mieć zatem podciągu zbieżnego, bo zbieżny byłby Cauchy'ego, a to niemożliwe w związku z (2). $\boxtimes$

Z obu twierdzeń („O zwartości...” i „O niezwartości...”) mamy więc

Wniosek Corollary

Kula domknięta $\overline{K}(0,1)$ (równoważnie – sfera $S(0,1)$) jest (are) zwartym (compact) podzbiorem przestrzeni unormowanej X wtw (iff) $\dim X < +\infty$.

1. Przykłady (Examples) przestrzeni unormowanych, przestrzenie Banacha

Zasadnicza część teorii, której poświęcony jest cały nasz wykład AFI dotyczy przestrzeni Banacha – czas więc na definicję.

Definicja

Przestrzeń unormowana $(X, \| \|)$ jest **przestrzenią Banacha** *) wtw X jest zupełna (complet) (w sensie metryki indukowanej przez normę).

W tym podrozdziale chcemy poznać sporo przykładów przestrzeni unormowanych i zbadać, które z nich są przestrzeniami Banacha. Nieco dalszych przykładów uzyskamy następnie, stosując np. pewne konstrukcje, które będą opisane w ostatnim podrozdziale. Warto zwrócić uwagę na to, że główna część przykładów tu przedstawionych będzie w jakiś sposób dotycząca przestrzeni liniowych $\ell(\Omega)$ (dla pewnych zbiorów Ω) (funkcje skalarne na zbiorze Ω)**). Od razu doprecyzujmy nieco o jakich „sposobach” mowa powyżej:

(sposób „P”)***) Przestrzenie $(X, \| \|)$, takie $X \underset{\text{lin}}{\subseteq} \ell(\Omega)$, a norma $\| \cdot \|$ jest tam (choć częściowo) związana ze sposobem „wyodrębnienia” X z „całego” $\ell(\Omega)$.

*) W skrócie, jak zwykle, „przestrzeń X jest...”.

**) Choć pojawią się po jakimś czasie także inne przykłady.

***) „P”, bo „podprzestrzeń”

(sposób „P+I") *)

Przestrzenie $(X, \| \|)$ takie, że $X = \tilde{X}/\tilde{X}_0$, gdzie $\tilde{X}_0 \underset{lin}{\subset} \tilde{X} \underset{lin}{\subset} \ell(\Omega)$, a norma $\| \|$ jest związana zarówno z wyodrębnieniem $\tilde{X}$ z $\ell(\Omega)$ jak i $\tilde{X}_0$ z $\tilde{X}$. W ramach tego ogólnego sposobu zobaczymy dwa „podsposoby" uzyskiwania przestrzeni unormowanych:

(P+Ip) – w $\tilde{X}$ zadana jest $\boxed{p}$ółnorma zerująca się dokładnie na $\tilde{X}_0$ i $\| \|$ w $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ uzyskana jest poprzez konstrukcję „norma z półnormy" (patrz nieco dalej w tym podrozdziale) – utożsamiamy pewne klasy wektorów, by mieć „prawdziwą" normę, a nie tylko półnormę...

(P+In) – w $\tilde{X}$ zadana jest „od razu" pewna $\boxed{n}$orma, ale jest ona w jakimś sensie „za dokładna" – rezygnujemy z pewnych szczegółów i utożsamiamy pewne klasy wektorów poprzez konstrukcję „normy ilorazowej" (patrz ostatni podrozdział).

Zacznijmy jednak od prostego spostrzeżenia.

Each finite dim normed space is Banach.

Fakt Każda przestrzeń unormowana skończenie wymiarowa jest p. Banacha.

We use subsequential completness and

Dowód Dzięki Faktowi „O podciągowej zupełności" (str. PB-6) dla

for every seq. it is enough to find a convergent subsequence.

danego ciągu Cauchy'ego $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ wystarczy by istniał podciąg zbieżny,

The seq. is bounded so it is in a such ball

ale $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ jest w szczególności ograniczony, więc ma wyrazy w

for that is compact

pewnej kuli $\overline{K}(0, R)$ dla $R \in \mathbb{R}$, więc posiada podciąg zbieżny na mocy

*) „P+I" – „$\boxed{p}$odprzestrzeń", a następnie „przestrzeń $\boxed{i}$lorazowa".

Tw. „o zwartości kuli". $\boxed{W}$

is

Przykład: $\mathbb{K}^d$ z normą euklidesową jest p. Banacha (i podobnie $\mathbb{K}^d$ z innymi „znanymi" normami dla $\mathbb{K}^d$ – o nich dalej...), $d \in \mathbb{N}$.

Wobec powyższego faktu, sprawa „banachowskości" jest dla przestrzeni skończenie wymiarowej załatwiona, o ile tylko mamy „rzeczywiście" normę. Głównie więc wyzwanie w tym podrozdziale, to rozstrzyganie o zupełności przestrzeni unormowanych X z $\dim X = +\infty$. Jednak w wielu sytuacjach już nawet (samo) stwierdzenie, że mamy do czynienia z półnormą nie jest całkiem proste. Zaczniemy więc od dwóch podstawowych (typów) przykładów norm lub półnorm, a sprawę zupełności odłożymy „na deser"!

We give some example of normed space (and completness see later).

- $\| \cdot \|_\infty$ w $\ell^\infty(\Omega)$

any non-empty set

Ω niech będzie dowolnym niepustym zbiorem i rozważmy podprzestrzeń

is a subspace

liniową $\ell^\infty(\Omega)$ przestrzeni $\ell(\Omega)$:

$$\ell^\infty(\Omega) := \{ f \in \ell(\Omega) : f \text{ – ograniczona (bounded)} \} \quad *)$$

i dla $f \in \ell^\infty(\Omega)$ określmy:

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

different notation

Inne często używane oznaczenia to $\ell_b(\Omega)$, $B(\Omega)$ i $\ell_\infty(\Omega)$ na $\ell^\infty(\Omega)$ oraz $\| \|_{sup}$ na $\| \|_\infty$ (także $\| \|_u$ od ang. „uniform" = jednostajny – patrz str. następna...)

*) Prosty fakt, że $\ell^\infty(\Omega)$ jest rzeczywiście podprzestrzenią liniową $\ell(\Omega)$ proszę sprawdzić samodzielnie ($\hookrightarrow \Delta$).

Fakt $\|\cdot\|_\infty$ jest normą w $\ell^\infty(\Omega)$. (is a … on)

Dowód – to znane z Analizy I na ogół, na wszelki wypadek przypomnienie dowodu nierówności trójkąta:

- ponieważ „sup jest pewnym ograniczeniem górnym", zatem:

$$\forall_{s\in\Omega}\quad |f(s)+g(s)|\le |f(s)|+|g(s)|\le \sup_{t\in\Omega}|f(t)| + \sup_{t\in\Omega}|g(t)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

więc ponieważ „sup jest najmniejszym górnym ograniczeniem", zatem

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{s\in\Omega}|f(s)+g(s)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Pozostałe „punkty" do sprawdzenia $\longrightarrow \Delta$. $\square$

Warto przypomnieć, że zbieżność w sensie $\|\ \|_\infty$ w $\ell^\infty(\Omega)$ to znana dobrze zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego, tzn. jeśli $\{f_n\}_{n\ge n_0}$ jest ciągiem o wyrazach w $\ell^\infty(\Omega)$ oraz $f\in\ell^\infty(\Omega)$, to $f_n \underset{\|\ \|_\infty}{\longrightarrow} f$ wtw $f_n \rightrightarrows f$. *) W szczególności z tej zbieżności wynika też „zwykła" zbieżność punktowa.

Biorąc rozmaite zbiory Ω otrzymujemy różne dość popularne przestrzenie unormowane.

The convergence in $\|\cdot\|_\infty$ implies uniform convergence $\Rightarrow$ pointwise converg.

*) Jednak uwaga: jest sens (i widzieliście to pewnie wielokrotnie np. na Analizie I) mówić o zbieżności jednostajnej ciągu funkcji, bez zakładania zarówno ograniczoności poszczególnych wyrazów f_n jak i samej f, mimo, że to nie może być zbieżność w $\|\ \|_\infty$ w $\ell^\infty(\Omega)$...

Przykłady (Przestrzenie unormowane $(\ell^\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$)

- $\ell^\infty(\{1,\dots,d\}) = \mathbb{K}^d$ z normą $\|x\|_\infty := \max_{j=1,\dots,d}|x_j|$. *)
- $\ell^\infty(\mathbb{N})$, $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ $\left(= \sup_{n\in\mathbb{N}}|x(n)|\right)$ **)

przestrz. $\ell^\infty(\mathbb{N})$ oznaczana bywa też przez m. (can also be indicated by)

- $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ – podobnie. (similarly)

Półnorma $|||\ \ |||_p$ w $\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu)$

Przypuśćmy, że μ jest miarą („dodatnią") (ściślej: „nieujemną") w zbiorze Ω, tzn. $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, $\mu: \mathfrak{M} \to [0;+\infty]$, $\mathfrak{M}$ – σ-ciało (pewne) podzbiorów Ω, i niech $p\in[1;+\infty)$. Rozważmy zbiór funkcji

$$\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu) := \left\{ f\in\ell(\Omega) : f \text{ jest } \mathfrak{M}\text{-mierzalna i } \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty \right\};$$

i dla $f\in\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu)$ określmy $|||\ \ |||_p : \widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu)\to\mathbb{R}$ wzorem

$$|||f|||_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Czasami symbol $\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu)$ skrócimy do samego $\widetilde{\mathcal{L}}^p$, gdy wiadomo o jakie Ω i μ chodzi, ewentualnie tylko do $\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega)$...

*) Jak już było wspomniane stosujemy dla takich funkcji $x:\{1,\dots,d\}\to\mathbb{K}$ zapis $x(j) = x_j$.

**) I analogicznie dla ciągów nieskończonych – dopuszczamy zapis n-tego wyrazu zarówno jako $x(n)$ jak i x_n.
Ciąg (skalarny) $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ to po prostu $x:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$. ← „funkcyjny" ← „ciągowy"

Przykłady (Przestrzenie unormowane $(\ell^\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$)

- $\ell^\infty(\{1,\dots,d\}) = \mathbb{K}^d$ z normą $\|x\|_\infty := \max_{j=1,\dots,d} |x_j|$. *)
- $\ell^\infty(\mathbb{N})$, $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \left(= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|\right)$ **)

przestrz. $\ell^\infty(\mathbb{N})$ oznaczana bywa też przez m.

- $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ – podobnie.

1.3 Półnorma $|||\ \ |||_p$ w $\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu)$

Seminorm

Przypuśćmy, że μ jest miarą („dodatnią") w zbiorze Ω, tzn. (ściślej: „nieujemną")

Suppose that μ is a measure

$(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, $\mu : \mathfrak{M} \to [0;+\infty]$, $\mathfrak{M}$ – σ-ciało (pewne) podzbiorów Ω,

algebra

I niech $p \in [1;+\infty)$. Rozważmy zbiór funkcji

Let; We consider the set of

$$\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu) := \left\{ f \in \ell(\Omega) : f \text{ jest } \mathfrak{M}\text{-mierzalna i } \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

measurable

i dla $f \in \widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu)$ określmy $|||\ \ |||_p : \widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu) \to \mathbb{R}$ wzorem

define; by formula

$$|||f|||_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Czasami symbol $\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu)$ skrócimy do samego $\widetilde{\mathcal{L}}^p$, gdy wiadomo o jakie Ω i μ chodzi, ewentualnie tylko do $\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega)$...

abbreviate

---

*) Jak już było wspomniane stosujemy dla takich funkcji $x : \{1,\dots,d\} \to \mathbb{K}$ zapis $x(j) = x_j$.

**) I analogicznie dla ciągów nieskończonych – dopuszczamy zapis n-tego wyrazu zarówno jako $x(n)$ jak i x_n.

Ciąg $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (skalarny) to po prostu $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. ← „funkcyjny" ← „ciągowy"

Fakt $\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu) \underset{lin}{\subseteq} \ell(\Omega)$ oraz $|||\ \ |||_p$ jest półnormą.

is a

Dowód Zamkniętość $\widetilde{\mathcal{L}}^p$ względem mnożenia przez $\lambda \in \mathbb{K}$ oraz warunek $|||\lambda f|||_p = |\lambda|\, |||f|||_p$ są proste (→ △).

Znacznie trudniejsza jest zamkniętość $\widetilde{\mathcal{L}}^p$ względem dodawania i nierówność trójkąta dla $|||\ \ |||_p$ – uzyskamy ją jednak bezpośrednio z (poniższej) ważnej „analityczno-teoriomiarowej" nierówności (→ △)

Fakt („Nierówność Minkowskiego")

Jeżeli $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ są $\mathfrak{M}$-mierzalne, to

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu \right)^{1/p} \qquad (M)$$

Dla $p = 1$ wynika to natychmiast ze zwykłej nierówności trójkąta dla $|\ |$.

For p=1 is trivial using usual triang. ineq.

Aby wykazać ten fakt (dla $p > 1$), posłużymy się innym ważnym wynikiem

Fakt („Nierówność Höldera")

Jeżeli $p \in (1;+\infty)$ oraz $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ *), oraz $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ są $\mathfrak{M}$-mierzalne, **)

to

$$\int_\Omega |f \cdot g|\, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_\Omega |g|^q d\mu \right)^{1/q} \qquad (H)$$

---

*) Tzn. – równoważnie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**) ewentualne „$0 \cdot \infty$" po prawej oznacza tu 0.

Dowód tego z kolei faktu oparty będzie na następującym, już nieco bardziej elementarnym lemacie (Analiza I ...).

Lemat
Jeżeli p, q jak wyżej oraz $x, y \geq 0$, to
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Dowód $\longrightarrow$ $\triangle$.

Dowód „Nier. Höldera": zastosujmy dla każdego $t \in \Omega$ powyższy lemat do $x := \frac{|f(t)|}{|||f|||_p}$, $y := \frac{|g(t)|}{|||g|||_q}$, przy dodatkowym założeniu:

(Z) the both integrals from right side of (H) are finite
obie całki z prawej strony (H) są skończone i
and not zero.
niezerowe (w szczególności x, y są poprawnie zdefiniowane *)).

Uzyskujemy:
$$\forall_{t \in \Omega} \quad \frac{1}{|||f|||_p\, |||g|||_q} \cdot |f(t) \cdot g(t)| \leq \frac{|f(t)|^p}{p \cdot |||f|||_p^p} + \frac{|g(t)|^q}{q \cdot |||g|||_q}$$
i po obustronnym całkowaniu mamy:
$$\frac{1}{|||f|||_p\, |||g|||_q} \int_\Omega |f \cdot g|\, d\mu \leq \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1,$$ skąd (H).

---

*) Mamy m.in. $q \in (1; +\infty)$.

(Z)
Jeżeli natomiast dodatkowe założenie (~~H~~) nie jest spełnione, łatwo już sprawdzić ($\longrightarrow$ $\triangle$), że (H) zachodzi, gdyż po obu stronach na raz są 0 lub $+\infty$. ▨

Dowód „Nier. Minkowskiego" przy $p > 1$:
Dobieramy q do p jak w nier. Höldera. Mamy:
$$\int_\Omega |f+g|^p d\mu = \int_\Omega |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_\Omega |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int_\Omega |g| \cdot |f+g|^{p-1}.$$
Teraz w obu całkach z prawej strony użyjemy nier. Höldera użytej odpowiednio do pary funkcji $|f|$, $|f+g|^{p-1}$ i $|g|$, $|f+g|^{p-1}$. Uzyskamy więc:
$$\int_\Omega |f+g|^p d\mu \leq \left[\left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1) \cdot q} \right)^{1/q} \quad (M')$$
Jednak z $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mamy $pq = p + q$, skąd $p = pq - q = (p-1)q$. W efekcie drugi czynnik po prawej stronie (M') to $\left(\int_\Omega |f+g|^p \right)^{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$, zatem gdy $\int_\Omega |f+g|^p \neq 0$, to dzieląc przez ten czynnik otrzymamy (M), a w przeciwnym razie (M) jest oczywista. ▨

$\tilde{L}^p(\Omega,\mu)$ is the space of functions
$L^p(\Omega,\mu)$ " of classes of functions.

Skomentujmy jeszcze użyte tu oznaczenie $\tilde{L}^p(\Omega,\mu)$. Na ogół *) falka „~" nad L^p jest pomijana po prostu. Jednak tu, dla większej precyzji / jasności, będziemy ją stosować, by odróżnić przestrzeń liniową **funkcji** $\tilde{L}^p(\Omega,\mu)$ od przestrzeni **klas funkcji** $L^p(\Omega,\mu)$, którą wkrótce skonstruujemy. Jeśli zrezygnować z owej „~" powstanie oznaczenie dwuznaczne – nieco mylące, ale bardzo powszechnie akceptowane przez „matematyczną społeczność". W celach „dydaktycznych" my przez czas jakiś (przynajmniej) pozostaniemy przy wyraźnym odróżnianiu $\tilde{L}^p$ od L^p **)

1.4. Norma $\| \ \|_p$ w niektórych $\tilde{L}^p(\Omega,\mu)$ i „może" ℓ^p

Ważniejsze jednak od tych kwestii notacyjnych jest to, że $|||\ |||_p$ w pewnych ważnych przypadkach okazuje się być nie tylko półnormą, ale nawet normą!

$\boxed{\text{Definicja}}$ (do użytku „lokalnego"...) Miara μ jest **mało zerowa** wtw $\emptyset$ jest jedynym podzbiorem $\mathfrak{M}$ mierzalnym w Ω miary μ zerowej. ($\forall_{\omega \in \mathfrak{M}}\ \mu(\omega)=0 \Rightarrow \omega=\emptyset$).

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O normie $\| \ \|_p$")

$|||\ |||_p$ jest normą wtw μ jest małozerowa.

$\boxed{\text{Uwaga}}$ (notacyjna) w sytuacji j.w. będziemy oznaczać $\| \ \|_p := |||\ |||_p$.

---

*) W wielu podręcznikach, pracach itp.

**) Także symbol $|||\ |||_p$ często zastępowany jest przez $\| \ \|_p$, mimo że może normą nie być.

Proof. This is obvious from the fact that $\int f = 0$ with $f \geq 0$ $\Rightarrow$ $f \equiv 0$ a.e.

$\boxed{\text{Dowód}}$ To bezpośrednio wynika z twierdzenia mówiącego, że całka z funkcji mierzalnej nieujemnej jest zerowa wtw $f=0$ μ-prawie wszędzie – to powinno być znane twierdzenie z teorii miary i całki... (pow. twierdzenia z t. m. i c.)

Wskazówką do dowodu przypomnianego może być m. in. inny fakt – przypomnienie z teorii miary (choć można całkiem inaczej), który zapewne nie raz przyda nam się jeszcze w przyszłości.

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O aproksymacji funkcjami prostymi")

(a) Każda funkcja mierzalna nieujemna f jest granicą punktową pewnego ciągu rosnącego *) funkcji prostych **) nieujemnych $\{f_n\}_{n \geq 1}$

(b) Gdy f z (a) jest ponadto ograniczona (tzn. należy do $\ell^\infty(\Omega)$), to ciąg $\{f_n\}$ z tezy (a) można wybrać tak, by $f_n \xrightarrow[\| \ \|_\infty]{} f$.

(c) Jeżeli f jest mierzalną funkcją z $\ell^\infty(\Omega)$, to f jest granicą w $\ell^\infty(\Omega)$ (czyli w $\| \ \|_\infty$, jak wyżej) pewnego ciągu funkcji prostych.

W związku z Faktem „O normie $\| \ \|_p$" uzyskujemy sporo nowych (ale i często znanych...) przykładów przestrzeni unormowanych, gdy rozważymy różne miary małozerowe. Najprostsze z nich to tzw. miary liczące, lub (ogólniej) miary liczące z wagą dodatnią

---

*) Używam „rosnący" (zamiast „niemalejący" – często spotykany) dla ciągu $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ wtw $\forall_{n \geq n_0}\ a_{n+1} \geq a_n$. Dla ostrych „>" nierówności – „ściśle rosnący" i podobnie przy malejącym.

**) Tu proste to funkcje mierzalne, liczbowe (w $\mathbb{C}$) o skończonym zbiorze wartości (ogólnie nie muszą być ≥ 0)

Przypomnijmy:
counting measure
miara licząca w Ω to miara $\# : 2^{\Omega} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

zadana wzorem

$$\#(\omega) = \begin{cases} \text{liczba elementów } \omega, \text{ gdy } \omega - \text{skończony} \\ +\infty, \text{ gdy } \omega - \text{nieskończony} \end{cases} \quad \text{dla } \omega \subset \Omega$$

counting measure weight
miara licząca z wagą w

Niech $w : \Omega \to [0;+\infty)$. Miara licząca z wagą w to po prostu miara $w\,d\#$ ((zwana też „miarą # z gęstością w") (tzn. taka miara μ określona na σ-ciele 2^{Ω}, że

$$\mu(\omega) = \int_{\omega} w\,d\# = \sum_{t \in \omega} w(t). \quad {*})$$

Oczywiście $w\,d\#$ jest mażorowa, gdy (wtw) $w > 0$.
W szczególności, gdy $w \equiv 1$ to uzyskamy po prostu $\#$.

Ogólnie tak uzyskane dla danego $p \in [0;+\infty)$ oraz miary liczącej $\mu = w\,d\#$ w Ω z wagą dodatnią w przestrzenie $\widetilde{L}^p(\Omega,\mu)$ z normą „p-tą dla μ" będziemy oznaczać przez $\ell^p_w(\Omega)$ a normy w nich $\|\ \|_{p,w}$, przy czym dla $w \equiv 1$ uprościmy to do $\ell^p(\Omega)$ i $\|\ \|_p$.

Szczególnie ważne (popularne) przykłady to przestrzenie „ciągów" (skończonych lub nieskończonych albo nawet „dwustronnie nieskończonych")

---

*) W sensie sumowania funkcji ≥ 0 „po dowolnych" (też nieskończonych, nawet nieprzeliczalnych...) zbiorach indeksów, tzn. $\sum_{t \in A} f(t) := \sup\{\sum_{t \in A'} f(t) : A' - \text{skończony podzbiór } A\}$ dla $f : A \to [0;+\infty)$. Ten wzór na całkę względem $\#$ powinien być znany z teorii miary...

Przykłady (ℓ^p, ℓ^p_w — „małe ℓ-p")

- $\ell^p_w(\{1,\dots,d\})$, $\ell^p(\{1,\dots,d\})$
to po prostu $\mathbb{K}^d$ z normą $\|\ \|_{p,w}$ lub odpowiednio $\|\ \|_p$ (dla $w \equiv 1$), gdzie

$$\|x\|_{p,w} := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \cdot w_j\right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{K}^d$$

— w szczególności dla $p=2$, $w_j = 1$ otrzymamy $\|\ \|_2$ - euklidesową.

- $\ell^p_w(\mathbb{N})$, $\ell^p(\mathbb{N})$ — czasem skracane do samych ℓ^p_w, ℓ^p
to przestrzenie ciągów skalarnych:

$$\ell^p_w(\mathbb{N}) := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p w_n < +\infty\}$$

z $\|x\|_{p,w} := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p w_n\right)^{1/p}$, $x \in \ell^p_w(\mathbb{N})$.

Instead of / we can / take
Oczywiście $\mathbb{N}$ można zastąpić przez dowolne $\mathbb{N}_{n_0} := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\}$.

- $\ell^p_w(\mathbb{Z})$, $\ell^p(\mathbb{Z})$ — analogicznie (tylko $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ dwustronne...).
as above using

Pojawia się jednak naturalne pytanie, po co zajmowaliśmy się w ogóle tymi przestrzeniami mierzalnymi $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$, gdzie μ nie była mażorowa. Jak już trochę było zapowiadane — dla nich też uzyskamy pewne przestrzenie unormowane. Jednak będzie trzeba nieco zmienić $\widetilde{L}^p(\Omega,\mu)$ i $|||\ |||_p$ tak, by uzyskać odpowiednie $L^p(\Omega,\mu)$ z normą $\|\ \|_p$. Opiszemy ten proces przy pomocy pewnej ogólnej konstrukcji „normy z półnormy" właśnie.

2 constructions to be a Banach space

1.5 Dwie konstrukcje i „banachowskość"

◇ **Podprzestrzenie** (subspaces)

Zacznijmy od jednej prostej, bardziej „podstawowej" i wyściowo jest znanej konstrukcji. – podprzestrzeni unormowanej

Przypomnijmy (str. PB-8), że dla $(X, \|\,\|)$ – unormowanej i $Y \subseteq_{lin} X$ $(Y, \|\,\|_{|Y})$ to podprzestrzeń unormowana przestrzeni $(X, \|\,\|)$. Naturalne jest pytanie, kiedy przy przejściu od przestrzeni X do podprzestrzeni Y „dziedziczy się" banachowskość. Odpowiedź jest prosta.

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O podprzestrzeni Banacha") About a Banach subsp.

Podprzestrzeń unormowana (Normed subsp.) $(Y, \|\,\|_{|Y})$ przestrzeni Banacha (of a) $(X, \|\,\|)$ jest (is) przestrzenią Banacha (a Banach's space) wtw (iff) Y jest (is) domkniętą (closed) podprzestrzenią (subspace of) (liniową) X.

$\boxed{\text{Dowód}}$

"$\Leftarrow$": Załóżmy (Assume that), że $\overline{Y} = Y$. Niech (Let) $\{x_n\}_{n\geq 1}$ – ciąg Cauchy'ego „w (in) Y". Ponieważ (Because) X – zupełna (is complete), zatem (so) $x_n \xrightarrow[\|\,\|]{} x$ dla pewnego (for some) $x \in X$, ale (but) $x \in Y$ skoro (because) Y – domknięta. Stąd (so) $x_n \xrightarrow[\|\,\|_{|Y}]{} x$, czyli (so) $\{x_n\}_{n\geq 1}$ zbieżny (is converg.) w (in) $(Y, \|\,\|_{|Y})$.

"$\Rightarrow$": jenne Tutaj ($\rightarrow$ △). ☒

$\boxed{\text{Uwaga 1}}$ Ten fakt stanie się użyteczny, gdy poznamy nieco więcej przestrzeni Banacha.*)

$\boxed{\text{Uwaga 2}}$ W praktyce dość często pomija się „$|Y$" i normę „obciętą" do Y oznacza się tym samym symbolem co $\|\,\|$ w X. My też tak będziemy zazwyczaj robić...

*) Które można będzie „wstawić" jako X.

Examples

$\boxed{\text{Przykłady}}$ (przestrzeni – podprzestrzeni unormowanych) of normed subspaces

• $C_b(\Omega) := \{f \in \ell^\infty(\Omega) : f \text{ – ciągła (continuous)}\}$ gdy Ω jest (is) wyposażona w (with) pewną topologię $\mathcal{T}$. Np. (For instance) $C_b(\mathbb{R})$ ($\mathcal{T}$ – „zwykła" (usual) topologia w $\mathbb{R}$). Gdy musimy wyraźnie zaznaczyć o jaką chodzi topologię, można to oznaczenie doprecyzować do $C_b(\Omega, \mathcal{T})$. Gdy (When) $\Omega = K$ – (is) przestrzeń topologiczna zwarta (compact top. space), to (the) ograniczoność (boundnesse) jest konsekwencją ciągłości (comes from continuity) i oznaczamy

• $C(K) := C_b(K)$.

W szczególnym przypadku topologii dyskretnej $\mathcal{T}$ w Ω mamy

• $C_b(\Omega, \mathcal{T}) = \ell^\infty(\Omega)$ if $\mathcal{T}$ is discrete topology, this is true

Wymienione wyżej przestrzenie traktujemy jako podprzestrzenie unormowane przestrzeni $(\ell^\infty(\Omega), \|\,\|_\infty)$ (jeśli nie sprecyzujemy innego wyboru normy)

These are 3 examples of subspace of $(\ell^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$

• c, c_0 – tak oznaczamy podprzestrzenie unormowane przestrzeni $\ell^\infty(\mathbb{N})$ t. że $c := \{x \in \ell(\mathbb{N}) : x \text{ – zbieżny (convergent)}\}$,

$c_0 := \{x \in \ell(\mathbb{N}) : x_n \longrightarrow 0\}$.

• $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, gdzie $\mathfrak{M}$ – pewne σ-ciało (alg.) podzbiorów Ω

– tak oznaczamy podprzestrz. unormowaną w $\ell^\infty(\Omega)$ t. że $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M}) := \{f \in \ell^\infty(\Omega) : f \text{ jest (is) } \mathfrak{M}\text{-mierzalna (measur.)}\}$

– gdy wybór $\mathfrak{M}$ jest w jakimś sensie standardowy, to $\mathfrak{M}$ bywa w pow. oznaczeniu pomijane.

- $\ell_{fin}(\Omega)$ – tak oznaczamy na ogół jedynie samą podprzestrzeń liniową w $\ell(\Omega)$ złożoną z funkcji „zerowych poza zbiorem skończonym" tzn.

$$\ell_{fin}(\Omega) := \{ f \in \ell(\Omega) : \exists_{\Omega' \subset \Omega} \ \forall_{t \in \Omega \setminus \Omega'} f(t) = 0 \}.$$
Ω' – skończony (finite)

To podprzestrzeń liniowa wielu „znanych" przestrzeni unormowanych – np. $\ell^{\infty}(\Omega)$, a ogólniej $\ell^{p}_{w}(\Omega)$.
Gdy chcemy traktować $\ell_{fin}(\Omega)$ jako odpowiednią podprzestrzeń unormowaną, najlepiej „dopisać" potrzebną normę – np. $(\ell_{fin}(\Omega), \| \ \|_{\infty})$, $(\ell_{fin}(\Omega), \| \ \|_{p,w})$.

→ $\ell_{fin}(\Omega)$ is a linear subspace of many spaces ($\ell^{\infty}(\Omega)$, $\ell^{p}_{w}(\Omega)$), so we need to precise everytime which norm we want consider.

Normed space from seminorm and L^p-space

◇ Przestrzeń unormowana z półnormy i przestrzenie L^p – „Duże"

Druga konstrukcja, to zapowiadana jest „norma z półnormy"

Zanim ją opiszemy zdefiniujemy odpowiedniki pojęć: zbieżności, granicy, ciągu Cauchy'ego, zupełności dla przestrzeni liniowej z zadaną półnormą. Dzięki nim zgrabniej sformułujemy wyniki związane z tą konstrukcją.

Podkreślam, gdy (IF) $(\tilde{X}, ||| \ |||)$ jest (is a) przestrzenią liniową z półnormą (with a seminorm), which is not a norm, która nie jest normą, to $\varrho : \tilde{X} \times \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadane wzorem $\varrho(x,y) := ||| x - y |||$ nie jest metryką (is not a metric)!

Dla tego m.in., by nie sugerować zbyt wiele, nazw wprowadzanych tu pojęć mają przedrostek „pół-" (semi): W $(\tilde{X}, ||| \ |||)$:

- ciąg $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ w $\tilde{X}$ jest pół-zbieżny**) do pół-granicy*) $x \in \tilde{X}$ wtw $||| x_n - x ||| \longrightarrow 0$; **)
- ciąg j.w. jest pół-Cauchy'ego wtw
$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{N \geq n_0} \ \forall_{m,n \geq N} \ ||| x_n - x_m ||| < \varepsilon.$$

Przestrzeń z półnormą $(\tilde{X}, ||| \ |||)$ nazywamy pół-zupełną wtw każdy ciąg pół-Cauchy'ego w $(\tilde{X}, ||| \ |||)$ jest pół-zbieżny do pewnej pół-granicy w $\tilde{X}$.

---

*) półgranica może nie być jednoznacznie wyznaczona...

**) „samo" ciąg jest pół-zbieżny oznacza, że istnieje (oczywiście) $x \in X$ t.że ciąg ten jest do x pół-zbieżny.

łatwo uzyskać podobne wyniki do tych znanych z przestrzeni unormowanych (ogólniej – metrycznych)

Fakt Każdy ciąg pół-zbieżny jest pół-Cauchy'ego.*)
(→ $\triangle$)

Fakt („O podciągowej pół-zupełności")
Dla pół-zupełności $(\tilde{X}, |||\ |||)$ wystarcza, by każdy ciąg pół-Cauchy'ego posiadał podciąg pół-zbieżny.
(Dowód → $\triangle$)

Możemy wreszcie przejść do samej konstrukcji.
Dla półnormy $|||\ |||$ w $\tilde{X}$ zdefiniujmy:
$$\tilde{X}_0 := \{x \in \tilde{X} : |||x||| = 0\}.$$
Oczywiście $\tilde{X}_0 \subset_{lin} \tilde{X}$ (→ $\triangle$). Rozważmy zatem przestrzeń liniową ilorazową $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ i próbujemy określić
$$\|\ \| : \tilde{X}/\tilde{X}_0 \to \mathbb{R} \quad \text{wzorem}$$
$$\|[x]\| := |||x||| , \quad x \in \tilde{X}. \qquad \text{(N-P)}$$
Zauważmy, że to poprawna definicja, bo gdy $[x] = [x']$ w $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ tzn. $x = x' + x_0$ dla (pewnego) $x_0 \in \tilde{X}_0$, to otrzymamy (z definicji półnormy)

*) A gdyby dodać jeszcze definicję "pół-ograniczoności" (→ $\triangle$ – jaką?), to | PB-34 | moglibyśmy dodać tu, że c. pół-Cauchy-ego są pół-ograniczone... (→ $\triangle$).

$$|||x'||| = |||x'||| - |||x_0||| \leq |||x' + x_0||| \leq |||x'||| + |||x_0||| = |||x'|||,$$
czyli $\quad |||x||| = |||x'|||.$

Tak uzyskaną $\|\ \|$ w $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ nazwiemy **normą z półnormy $|||\ |||$**, która to nazwa jest zasadna dzięki poniższemu wynikowi.

Fakt („O normie z półnormy")
Funkcja $\|\ \|$ zdefiniowana przez (N-P) (str. PB-34) jest normą w $\tilde{X}/\tilde{X}_0$. Co więcej $(\tilde{X}/\tilde{X}_0, \|\ \|)$ jest przestrzenią Banacha wtw $(\tilde{X}, |||\ |||)$ jest pół-zupełna.

Dowód
is a norm it follows from *)
To, że $\|\ \|$ jest normą wynika natychmiast z (N-P) oraz
and def of operations in the quotient
z definicji działań i zera dla $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ (patrz str. PB-4).
Jeśli $y_n = [x_n]$ i $\{y_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(\tilde{X}/\tilde{X}_0, \|\ \|)$, to
using and
dzięki temu że $[x_n] - [x_m] = [x_n - x_m]$ oraz dzięki (N-P)
is semi (if it is semi-complete)
ciąg $\{x_n\}$ jest pół-Cauchy'ego w $(\tilde{X}, |||\ |||)$ – jeśli jest ona pół-zupełna
semi-convergent to an it means
to $\{x_n\}$ jest pół-zbieżny do pewnego $x \in \tilde{X}$ tzn.
so converges to
$$\|[x_n] - [x]\| = |||x_n - x||| \to 0, \quad \text{czyli } \{y_n\} \text{ zbiega do } [x]$$
w $(\tilde{X}/\tilde{X}_0, \|\ \|)$. To dowodzi „⇐" w drugiej części faktu.
It proves

*) Ale → $\triangle$... – zachęcam.

Dowód „$\Rightarrow$" jest (is almost the same) wręcz identyczny ($\longrightarrow$ △). ▨

Tym sposobem zdefiniujemy ogólną przestrzeń unormowaną $\left(L^p(\Omega,\mu), \|\ \|_p\right)$ dla miary μ w Ω i $p \in [1;+\infty)$:

$$L^p(\Omega,\mu) := \tilde{L}^p(\Omega,\mu) / \tilde{X}_{0,p}, \quad \text{gdzie}$$

$$\tilde{X}_{0,p} := \{ f \in \tilde{L}^p(\Omega,\mu) : |||f|||_p = 0 \};$$

- $\|\ \|_p$ to norma z półnormy $|||\ |||_p$.
- Podobnie jak z $\tilde{L}^p$ niekiedy będziemy skracać symbol $L^p(\Omega,\mu)$ do $L^p(\Omega)$ lub nawet L^p.

Uwaga 1

W rozważanym wcześniej przypadku, gdy $|||\ |||_p$ była już a priori (str. PB-26) ale w $\tilde{L}(\Omega,\mu)$ normą, także zdefiniowaliśmy $\|\ \|_p$ po prostu jako $|||\ |||_p$. Mamy więc wówczas dwuznaczność symbolu $\|\ \|_p$ – na szczęście bardzo „niewielką", w tym bowiem przypadku $\tilde{X}_{0,p} = \{0\}$ i formalnie różne przestrzenie liniowe $L^p = \tilde{L}^p / \{0\}$ oraz $\tilde{L}^p$ można naturalnie utożsamiać przez przekształcenie $I : \tilde{L}^p \longrightarrow L^p$ dane wzorem $I(f) := [f]$, które oczywiście jest izometrią (liniową) przestrzeni unormowanych $(\tilde{L}^p, \|\ \|_p)$ i $(L^p, \|\ \|_p)$. ▪

In the situation of few-zero measure we have two construction that can be identified by an isometry like this

Uwaga 2

Nietrudno dowieść (It's easy to prove this:) (patrz tw. wspomniane na str. PB-27 u góry), że podprzestrzeń $\tilde{X}_{0,p}$ (przez którą dzielimy $\tilde{L}^p$) można też określić w wygodniejszy niekiedy sposób:

$$\tilde{X}_{0,p} = \{ f \in \tilde{L}^p(\Omega,\mu) : f = 0 \ \ \mu\text{-prawie wszędzie (a.e.)} \}.$$

Dowód $\longrightarrow$ △.

Uwaga 3

Zgodnie z definicją elementami L^p nie są „już" funkcje, tylko odpowiednie klasy funkcji – „twory" postaci $[f]$, którymi niezbyt wygodnie się posługiwać. Powszechnie matematycy „gubią" owe „[ ]" ze szkodą dla ścisłości ale z pożytkiem dla prostoty zapisu ... My w celach dydaktycznych przez jakiś czas będziemy formalistami i utrzymamy zapis $[f]$, ale by przyzwyczaić się do powszechnego żargonu zapewne po pewnym czasie przejdziemy do zapisu f zamiast $[f]$, podobnie jak przestaniemy pewnie rozróżniać w zapisie $\tilde{L}^p$ i L^p ...

Examples

$\boxed{\text{Przykłady}}$ (wszędzie tu $p \in [1; +\infty)$)

- $L^p(D)$ dla $D \subset \mathbb{R}^d$, D – mierzalny w sensie Lebesgue'a (measurable in Lebesgue'a sense)
będziemy oznaczać $L^p(D, \ell_D)$, gdzie ℓ_D – standardowa miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^d$ „obcięta" do D.
Zatem w tej przestrzeni, dla $[f] \in L^p(D)$
$$\|[f]\|_p := \left(\int_D |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

- $\ell^p_w(\Omega)$ dla $w : \Omega \to \mathbb{R}$, $w > 0$ zdefiniowana na str. PB-28/29 zgodnie z (look at Uwagą 1) str. PB-36 utożsamiamy (izometrycznie) z $L^p(\Omega, w\, d\#)$.
↓ we can identify this and $\ell^p_w(\Omega)$

- $\ell^p(\mathbb{N})$ – to szczególny przypadek (is a special case of) powyższego $\ell^p_w(\Omega)$ z $\Omega = \mathbb{N}$ i $w \equiv 1$ – będziemy często go używać na wykładzie / ćwiczeniach. Przypominamy, że
$$\|f\|_p \underset{\uparrow}{=} \|[f]\|_p := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |f(n)|^p \right)^{1/p}$$
tu „mamy prawo" utożsamić f i $[f]$ ...
Najczęściej zetkniemy się tu z przypadkiem $p = 1$ i $p = 2$.

Dotąd, gdy mowa o L^p rozważaliśmy tylko $p \in [1, +\infty)$. Jednak w kolejnym – ostatnim podrozdziale zdefiniujemy też $L^\infty(\Omega, \mu)$ z normą $\| \ \|_{ess\,\infty}$ (*) – będzie to na ogół coś innego niż $\ell^\infty(\Omega)$ z $\| \ \|_\infty$ ...

(*) „ess" przed ∞ od ang. „essential" / fr. „essentiel" – istotny.

1.6. Banachowskość – najważniejsze dowody

Dotąd jedynie o skończenie wymiarowych przestrzeniach unormowanych wiemy, że są przestrzeniami Banacha. Będziemy chcieli rozstrzygać, które z pozostałych przykładów przestrzeni unormowanych opisywanych licznie w tym podrozdziale są, a które nie są przestrzeniami Banacha.

Zaczniemy od przestrzeni $\ell^\infty(\Omega)$ (patrz str. PB-20).

$\boxed{\text{Twierdzenie}}$ („O ℓ^∞")

$(\ell^\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$ jest przestrzenią Banacha.

$\boxed{\text{Dowód}}$ – właściwie powinien to być już fakt znany z Analizy I ew. Topologii (± „zupełność normy jednostajnej"). Na wszelki wypadek jednak przypominam:

1° Rozważamy ciąg Cauchy'ego $\{f_n\}_{n\geq 1}$ w $\ell^\infty(\Omega)$, stąd dzięki nierówności dla $g \in \ell^\infty(\Omega)$

$$\forall_{t\in\Omega}\ |g(t)| \leq \|g\|_\infty \qquad (1)$$

uzyskujemy, że $\forall_{t\in\Omega}\ \{f_n(t)\}_{n\geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{K}$, z zupełności $\mathbb{R}$ ew. $\mathbb{C}$ jest więc zbieżny – oznaczmy jego granicę $C_t \in \mathbb{K}$. Definiujemy więc $f: \Omega \to \mathbb{K}$ wzorem $f(t) := C_t$.

W efekcie $\{f_n\}_{n\geq 1}$ jest punktowo zbieżny do f tzn.

$$\forall_{t\in\Omega}\ f_n(t) \longrightarrow f(t). \qquad (2)$$

2° Wykażemy, że $f \in \ell^\infty(\Omega)$ oraz $f_n \xrightarrow[\|\ \|_\infty]{} f$.

To pierwsze jest proste, ponieważ ciąg Cauchy'ego $\{f_n\}_{n\geq 1}$ ograniczony w sensie $\|\ \|_\infty$, tzn. $\forall_{n\geq 1}\ \|f_n\| \leq M$, gdzie $M \in \mathbb{R}$ – pewna stała. Zatem z (1) oraz (2) otrzymamy zaraz $\sup_{t\in\Omega} |f(t)| \leq M$, czyli $f \in \ell^\infty(\Omega)$.

By wykazać, że $f_n \xrightarrow[\|\ \|_\infty]{} f$ ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $N \geq 1$ tak, by zgodnie z war. Cauchy'ego

$$\forall_{m,n\geq N}\ \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon/2 \qquad (3)$$

Niech $n \geq N$. Mamy z (2) (i z ciągłości $|\cdot|$...) oraz z (3)

$$\forall_{t\in\Omega}\ |f_n(t) - f(t)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon/2$$

i stąd $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. *) $\blacksquare$

*) Zauważmy, że do dowodu tego szacowania z góry na $\|f_n - f\|_\infty$ nie potrzebowaliśmy wykazanego wcześniej faktu, że $f \in \ell^\infty$ – co więcej można było właściwie go nie wykazywać... – wynika on bowiem z tego, że f_n i $(f_n - f) \in \ell^\infty$ np. dla $n = N$.