1.3. Rozszerzanie operatorów ciągłych na domknięcie

Niech X będzie przestrzenią unormowaną oraz Y – jej liniową podprzestrzenią, gęstą w X. Nie każda funkcja ciągła określona na Y daje się rozszerzyć do funkcji ciągłej na całym X. Jednak, gdy funkcja ta jest operatorem liniowym – sytuacja jest znacznie lepsza...

$\boxed{\text{Twierdzenie}}$ („O rozszerzaniu operatorów ograniczonych")

Jeśli $Y \underset{lin}{\subset} X$, $\overline{Y}=X$ oraz $A \in B(Y,Z)$ i Z – p. Banacha, to istnieje dokładnie jeden $\tilde{A} \in B(X,Z)$, taki że $\tilde{A}|_Y = A$. Co więcej, $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ dla tego jedynego $\tilde{A}$.

$\boxed{\text{Dowód}}$

Jednoznaczność jest oczywista, wynika z gęstości Y i żądania ciągłości $\tilde{A}$ (liniowość, ani zupełność Z nie są tu potrzebne). Istnienie wykażemy konstruując odpowiednie $\tilde{A}$. Niech $x \in X$, wówczas istnieje pewien $\{x_n\}$ o wyrazach w Y taki, że $x_n \to x$. Ciąg $\{x_n\}$ jest zatem c. Cauchy'ego, więc z ograniczoności A

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \, \|x_n - x_m\|$$

, zatem $\{Ax_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w Z, więc $Ax_n \to z$ dla pewnego $z \in Z$ dzięki zupełności Z. Wykażemy, że tak uzyskany $z \in Z$ nie zależy od wyboru ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do x. Przypuśćmy bowiem, że również $x_n' \longrightarrow x$ oraz $Ax_n' \longrightarrow z'$. Wówczas $x_n - x_n' \longrightarrow 0$, więc z ciągłości A $A(x_n - x_n') \longrightarrow 0$. Jednocześnie jednak $A(x_n - x_n') = Ax_n - Ax_n' \longrightarrow z - z'$ – stąd $z - z' = 0$, czyli $z = z'$. Dzięki tej niezależności możemy zdefiniować $\tilde{A}(x) := z$, gdzie z skonstruowany j.w. Tym sposobem określiliśmy pewną funkcję $\tilde{A} : X \longrightarrow Z$, która ponadto spełnia:

jeśli $\{y_n\}$ ciąg w Y zbieżny do $x \in X$, to $Ay_n \longrightarrow \tilde{A}(x)$. *)

Stąd bez trudu można uzyskać zarówno liniowość $\tilde{A}$ $(\longrightarrow \triangle)$, jak i fakt, że $\tilde{A}_{|Y} = A$ (wystarczy rozważyć ciąg stały, równy $x \in Y$...).

Niech teraz $x \in X$ oraz niech $\{y_n\}$ ciąg z Y, zbieżny do x, mamy zatem:

$$\|\tilde{A}x\| = \|\lim_n Ay_n\| = \lim_n \|Ay_n\|, \text{ więc}$$

$$\|\tilde{A}x\| \xleftarrow[n]{} \|Ay_n\| \leq \|A\| \|y_n\| \xrightarrow[n]{} \|A\| \|x\|, \text{ czyli } \|\tilde{A}x\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Stąd $\tilde{A} \in B(X, Z)$ i $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$, z drugiej strony

$$\|\tilde{A}\| = \sup\{\|\tilde{A}x\| : x \in \overline{K}_X(0,1)\} \geq \sup\{\|\tilde{A}x\| : x \in \overline{K}_Y(0,1)\} =$$
$$= \|\tilde{A}_{|Y}\| = \|A\|, \text{ czyli } \|\tilde{A}\| = \|A\|.$$ $\square$

---

*) Na tym etapie wystarczała jednostajna ciągłość A, bez liniowości można się było obejść...

Przy tej okazji warto wspomnieć też o nieco zbliżonym twierdzeniu, dotyczącym rozszerzania nie operatorów, lecz przestrzeni unormowanych — do przestrzeni Banacha.

Definicja

Przestrzeń Banacha $\tilde{X}$ jest uzupełnieniem przestrzeni unormowanej X wtw istnieje $Y \underset{lin}{\subset} \tilde{X}$ taka, że $\overline{Y} = \tilde{X}$ oraz X i Y są izometryczne.

Uwaga

Nietrudno wykazać, że jeśli X posiada uzupełnienie, to istnieje takie takie uzupełnienie $\tilde{X}$ przestrzeni X, że X jest po prostu podprzestrzenią unormowaną $\tilde{X}$. $(\longrightarrow \triangle)$.

Okazuje się, że każdą przestrzeń unormowaną można uzupełnić — nawet jest lepiej...

Twierdzenie („O uzupełnianiu")

Jeżeli X jest przestrzenią unormowaną, to istnieje uzupełnienie X, co więcej, wszystkie uzupełnienia przestrzeni X są izometryczne.

Co jeszcze więcej, jeżeli dla $j=1,2$ $\tilde{X}_j$ jest uzupełnieniem X, $\overline{Y_j} = \tilde{X}_j$ oraz $I_j : X \to Y_j$ jest izometrią, to istnieje dokładnie $J \in B(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ taki, że

$$J|_{Y_1} = I_2 I_1^{-1}.$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, "J"] & & \tilde{X}_2 \\
\cup & & \cup \\
Y_1 \arrow[rr] & & Y_2 \\
& X \arrow[ul, "I_1"] \arrow[ur, "I_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Powyższy J jest izometrią (na $\tilde{X}_2$).

Dowód (szkic)

Samą kwestię istnienia uzupełnienia można wykazać na różne sposoby. Jeden z nich to klasyczna konstrukcja oparta na idei Cantora:

In the set of all C. seq. in

W zbiorze wszystkich ciągów Cauchy'ego $\{x_n\}_{n\geq 1}$ w X

we define ~~an equivalent~~. a relation

wprowadzamy relację $\equiv$:

iff

$\{x_n\}_{n\geq 1} \equiv \{x_n'\}_{n\geq 1}$ wtw $x_n - x_n' \longrightarrow 0$

it's easy to check that it is an equivalence relation. $\tilde{X}$ is the set

Łatwo sprawdzić, że to relacja równoważności i $\tilde{X}$ definiujemy

of all abstract classes of this relation.

jako zbiór wszystkich klas abstrakcji tej relacji.

It's easy to guess how to define the structure of norm linear space in $\tilde{X}$,

Nietrudno odgadnąć, jak wprowadzamy w $\tilde{X}$ strukturę przestrzeni

how to chose the space Y and to prove that $\overline{Y} = \tilde{X}$ and that $\tilde{X}$ is Banach.

unormowanej, jak wybrać odpowiednią podprzestrzeń Y, jak wykazać, że $\overline{Y} = \tilde{X}$ oraz że $\tilde{X}$ - Banacha. Choć

It is not difficult but there is a lot of work. We will see another construction

nietrudne - to żmudne ... My poznamy inną -

in one of the next section.

„zgrabniejszą" konstrukcję w jednym z następnych rozdziałów.

It's easy to prove the second part using the „previous

Drugą część twierdzenia - „Co jeszcze więcej..." Łatwo

Thm about extention of lin operator

wykazać w oparciu o poprzednie twierdzenie „O rozszerzaniu operatorów ograniczonych" $\longrightarrow$ △.

2 Przestrzenie $B(X,Y)$ i „dodatkowe" zbieżności

W poprzednim podrozdziale oznaczyliśmy przez $B(X,Y)$ zbiór wszystkich ograniczonych $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ dla unormowanych przestrzeni X i Y. Co więcej – okazało się, że ograniczoność oznacza w tym wypadku dokładnie to samo, co ciągłość. Zdefiniowaliśmy też $\| \ \|$ dla elementów $B(X,Y)$, ale wciąż nie sprawdziliśmy, że rzeczywiście jest to norma ...

2.1. Przestrzeń unormowana $B(X,Y)$

Niech X i Y – przestrzenie unormowane (nad $\mathbb{K}$).
Zacznijmy od rezultatu, który wyjaśnia m. in. kwestię normy.

$\boxed{\text{Fakt}}$

$B(X,Y) \underset{lin}{\subseteq} \mathcal{L}(X,Y)$, a $\| \ \|$ jest normą w $B(X,Y)$.
Ponadto, jeżeli Z – także przestrzeń unormowana, to dla $A \in B(X,Y)$, $B \in B(Y,Z)$ zachodzi $BA \in B(X,Z)$ oraz

$$\|BA\| \leq \|B\| \, \|A\|.$$

W szczególności $B(X)$ jest <u>algebrą unormowaną (nad $\mathbb{K}$) z jedynką</u> *) gdy $X \neq \{0\}$ i jako mnożenie weźmiemy mnożenie (składanie) operatorów i za jedynkę I.

---

*) Tzn. jest algebrą z jedynką i jednocześnie przestrzenią unormowaną oraz zachodzi: $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$, $\|\mathbb{1}\| = 1$ – patrz *) ze str. OF-3.

Dowód

It's obvious that ... is a lin. subspace because

To, że $B(X,Y)$ jest podprzestrzenią liniową jest oczywiste,

the boundness and continuity is the same in

dzięki temu, że ograniczoność i ciągłość są w $\mathcal{L}(X,Y)$

and the operation of sum and mult. by scalar are continuous.

tym samym oraz, że dodawanie i mnożenie przez liczby są operacjami ciągłymi (albo „po prostu": $x_n \to x \Rightarrow (Ax_n \to Ax,\ Bx_n \to Bx)$ $\Rightarrow (A+B)x_n = Ax_n + Bx_n \to x+y$, gdy $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ itd...).

We have:

Mamy:

when ... then ... so

(i) gdy $\|A\|=0$, to $\forall_{x\in X} \|Ax\| \leq 0$, więc $\forall_{x \in X} Ax = 0$,

i.e.

tzn. $A=0$;

(ii) $$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\lambda(Ax)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\lambda|\|Ax\| = |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\| = |\lambda|\|A\|;$$

(iii) $$\|A+B\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|(A+B)x\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1}(\|Ax\| + \|Bx\|) \leq$$
$$\leq \sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\| + \sup_{\|x\|\leq 1}\|Bx\| = \|A\| + \|B\|.$$

Which proves that ... is a norm in ... when

To dowodzi, że $\|\ \|$ jest normą w $B(X,Y)$. Gdy $A \in B(X,Y)$,

then obviously as

$B \in B(Y,Z)$, to oczywiście $BA = B \circ A \in B(X,Z)$ jako

the composition of cont. funct., moreover ∀

złożenie funkcji ciągłych, ponadto dla każdego $x \in X$

$$\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\|\|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\|\|x\|,$$

so ... by Fact

więc $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ na mocy Faktu „Ostatni Lipschitza" p.2)

In the case of ... we have

(str. OF-9). Oczywiście w przypadku $B(X)$ mamy

when

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1}\|x\| = 1, \text{ gdy } X \neq \{0\}.$$ ∎

Gdy wiemy już, że $B(X,Y)$ to przestrzeń unormowana, warto zastanowić się nad jej banachowskością.

$\boxed{\text{Twierdzenie}}$ („O zupełności $B(X,Y)$")

Jeśli Y jest p. Banacha, to $B(X,Y)$ także.

$\boxed{\text{Dowód}}$ *)

Niech $\{A_n\}_{n\geq 1}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $B(X,Y)$.

Dla każdego $x \in X$ mamy:

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|,$$

zatem ciąg $\{A_n x\}_{n\geq 1}$ jest Cauchy'ego w Y, jest więc zbieżny, dzięki zupełności Y. Zdefiniujmy zatem funkcję $A : X \to Y$ wzorem:

$$A(x) := \lim_{n\to+\infty} A_n x \qquad (1)$$

(– inaczej mówiąc: A to granica punktowa ciągu funkcji $\{A_n\}_{n\geq 1}$).

Nietrudno wykazać dzięki (1), że $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ $(\longrightarrow \triangle)$.

Co więcej, dla każdego $m \in \mathbb{N}$ oraz $x \in X$ dzięki (1) mamy

$A_n x - A_m x \xrightarrow[n]{} Ax - A_m x$, zatem (z ciągłości $\|\ \|$ w Y)

---

*) Jak widać poniżej, jest on bardzo podobny do dowodu zupełności $\ell^\infty(\Omega)$ – nic dziwnego: $\|A\| = \sup_{x\in \overline{K}(0,1)} \|A(x)\| = \sup\{\|A(x)\| : x \in \overline{K}(0,1)\}$, podobnie jak dla $f \in \ell^\infty(\Omega)$ $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$.

$$\| A_n x - A_m x \| \xrightarrow[n]{} \| Ax - A_m x \|. \qquad (2)$$

Niech $\varepsilon > 0$, i niech $N \geqslant 1$ będzie taki, że

$$\forall_{n,m \geqslant N} \quad \| A_n - A_m \| < \varepsilon/2 .$$

Zatem gdy $m \geqslant N$, to dla dost. dużych n mamy

$$\| A_n x - A_m x \| \leq \| A_n - A_m \| \, \|x\| \leqslant \varepsilon/2 \, \|x\|,$$

więc dzięki (2) także $\| Ax - A_m x \| \leq \varepsilon/2 \cdot \|x\|$,

czyli $\| (A - A_m) x \| \leq \varepsilon/2 \, \|x\|$.

Zauważmy tu, że N było dobrane niezależnie od wyboru x i wykazaliśmy, że

$$\forall_{m \geqslant N} \ \forall_{x \in X} \quad \| (A - A_m) x \| \leq \varepsilon/2 \, \|x\|,$$

tzn. $\forall_{m \geqslant N} \quad A - A_m \in \mathcal{B}(X,Y)$ oraz $\| A - A_m \| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Czyli $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ (bo w szczególności $A = (A - A_N) + A_N \in \mathcal{B}(X,Y)$)

oraz $A_n \longrightarrow A$ w $\mathcal{B}(X,Y)$. $\boxed{\text{↯}}$

Uwaga 1

W powyższym dowodzie w istotny sposób skorzystaliśmy z tego, że Y była zupełna. Czy jest to jednak także warunek konieczny dla zupełności $B(X,Y)$?
— np. gdy $X=\{0\}$, to $B(X,Y)$ jest zupełna, niezależnie od wyboru Y... (bo $\longrightarrow$).

Pytanie

Czy jeśli $X \neq \{0\}$, to z zupełności $B(X,Y)$ wynika zupełność Y ??? $\longrightarrow$ ewent. ...

Uwaga 2

We ~~don~~ didn't need the completness of X!
Jednak nie potrzebowaliśmy wcale zupełności X!
It's related to both previous thm
To się wiąże ściśle z dwoma niedawno wykazanymi twierdzeniami:
"~~About~~ On extension" "Ob. completion"
„O rozszerzaniu operatorów ograniczonych" i „O uzupełnianiu".
Using them it is easy to prove that when Y is Banach, then
W oparciu o nie nietrudno wykazać, że gdy Y – Banacha, to
spaces and where completion
przestrzenie $B(X,Y)$ oraz $B(\tilde{X},Y)$, gdzie $\tilde{X}$ – uzupełnienie
are isometric!
X, są izometryczne! $\longrightarrow$.

Definicja

Conjucat or Dual space to a norm space X is the space
Przestrzenią sprzężoną do przestrzeni unormowanej X nazywamy
we denote it by
przestrzeń unormowaną $B(X, \mathbb{K})$; oznaczamy ją symbolem

$$X^*.$$

In particular but did not have any
W szczególności zatem $X^* \underset{lin}{\subset} X^\#$, jednak $X^\#$ nie miało żadnej
previous structure of norm space.
struktury przestrzeni unormowanej (poza przypadkami, gdy $X^* = X^\#$, tzn. gdy $\dim X < +\infty$ – patrz Uwaga ze str OF-15).

Jako natychmiastową konsekwencję Twierdzenia „O zupełności $B(X,Y)$" otrzymujemy

Wniosek Corollary (from the thm)

is a space, independently of completness of X.
X^* jest przestrzenią Banacha, niezależnie od zupełności przestrzeni unormowanej X.

Więcej na temat przestrzeni X^* będziemy mówili jeszcze wielokrotnie, szczególnie w Rozdziale $\underline{\text{IV}}$, a nieco podstawowych faktów ogólnych pojawi się już wkrótce – w podrozdziale $\underline{\text{II}}.3$.

It's good to know that now we even don't know wether $X^* \neq \{0\}$.
Warto sobie jednak jeszcze w tym miejscu uświadomić, że na razie dla wielu przestrzeni nieskończonego wymiaru nie wiemy nawet podstawowej
id est. there exists any
rzeczy – mianowicie, czy $X^* \neq \{0\}$ ... Tzn. czy istnieje jakikolwiek
non zero continuous linear functional?
ciągły funkcjonał liniowy poza zerowym (który sam z pewnością ciągły jest ...).
More about this we shall say in section 4.
Więcej na ten temat dowiemy się dopiero w Rozdziale $\underline{\text{IV}}$, przynajmniej
for general case of norm X.
w odniesieniu do dowolnych przestrzeni unormowanych X.

Some extra convergence

2.2. Dodatkowe zbieżności

Using the dual space, in each norm space, we can define the so called weak topology,
Przy użyciu zdefiniowanej przed chwilą przestrzeni sprzężonej, w
which is usually weaker (*) than the usual norm topology in X
każdej przestrzeni unormowanej można zdefiniować tzw. słabą topologię
We shall study
– na ogół słabszą*) niż zwykła topologia unormowana. Tą sprawą
this later; but want only say something about weak convergence in X
zajmiemy się jednak nieco później, jednak na razie powiemy tylko
(which is exactly the convergence in
o tzw. słabej zbieżności w X (która – jak można będzie w przyszłości
the sense of the above weak topology)
sprawdzić, będzie po prostu zbieżnością w sensie tej właśnie słabej topologii).
For us (tu) more important would be to new kinds of converg.
Jednak ważniejsze będą (tu) dla nas pewne dwa nowe rodzaje zbieżności
in
w $B(X,Y)$.

Weak convergence in
◊ Słaba zbieżność w X

sequence of vectors in
Definicja $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ – ciąg wektorów z przestrzeni unormowanej X
is weakly convergent to iff
jest słabo zbieżny do $g\in X$ wtw

$$\forall_{\varphi\in X^*}\quad \varphi(x_n)\longrightarrow\varphi(g).$$

The only "weak convergent" means that there $\exists$ $g\in X$ s.t. $\{x_n\}_{n\geq 0}$
Samo „słabo zbieżny" oznacza po prostu, że istnieje $g\in X$, do którego
weakly conv. to g. is called weak limit
$\{x_n\}_{n\geq n_0}$ jest słabo zbieżny. Powyższe $g\in X$ nazywa się słabą granicą**).
We shall use the symbols etc.
Będziemy używali symboli $w\text{-}\lim\limits_{n\to+\infty}$**), $\xrightarrow[w]{}$, $\xrightarrow[w]{n}$, $\xrightarrow[n]{w}$ itp
dla słabej granicy (w od ang. weak) i odpowiednio – słabej
zbieżności.

---

it possesses less open sets (in sense of $\subset$)
*) tj. – mającą mniej zbiorów otwartych.
Later we shall prove that the weak limit is uniquely determined by
**) W przyszłości będziemy mogli wykazać, że słaba granica jest jednoznacznie
the conv. seq.
przez ciąg wyznaczona – dopiero wtedy będzie sens używać symbolu $w\text{-}\lim$...

$\boxed{\text{Fakt}}$

$$x_n \to g \Rightarrow x_n \xrightarrow[w]{} g.$$

$\boxed{\text{Dowód}}$ $\forall_{\varphi \in X^*} \ |\varphi(x_n) - \varphi(g)| = |\varphi(x_n - g)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x_n - g\| \to 0.$ $\boxed{\text{W}}$

In general, there is no the opposite direction implication, but it is too early
W przeciwną stronę ogólnie implikacji brak, ale jeszcze zbyt
to give some examples. It's worth to note that sometimes
wcześnie na odpowiednie przykłady. Warto natomiast wspomnieć,
we call the "usual" convergence in X norm convergence to distinguish it
że czasem dla odróżnienia wyraźniej zbieżności „zwykłej" w X
from the weak.
od słabej nazywa się tę pierwszą zbieżnością normową (ew. „w normie").

Norm, strong and weak convergences in

◊ Normowa, silna i słaba zbieżność w $B(X,Y)$

We use the term norm convergent when we speak about the convergence in the norm space $B(X,Y)$.

Podobnie jak w ogólnej sytuacji opisanej wyżej na zbieżność w przestrzeni unormowanej $B(X,Y)$ mówi się często normowa zbieżność, choćby po to by odróżnić ją od innych rodzajów zbieżności używanych dla tego typu przestrzeni. A dość popularne są jeszcze dwie inne, które a priori można definiować nawet w $\mathcal{L}(X,Y)$

$\boxed{\text{Definicja}}$

Let sequences of operator from and
Niech $\{A_n\}_{n \geq n_0}$ – ciąg operatorów z $\mathcal{L}(X,Y)$ oraz $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

is strongly convergent to iff
(S) $\{A_n\}_{n \geq n_0}$ jest <u>silnie zbieżny do A</u> wtw

$$\forall_{x \in X} \ A_n x \to Ax \quad *)$$

usual convergence in Y.

So it is just the pointwise convergence.

*) Zatem to po prostu zbieżność punktowa operatorów.

is *) weakly convergent to A iff

(W) $\{A_n\}_{n \geq n_0}$ jest ~~słabo zbieżny do A~~ wtw

$$\forall_{\substack{\varphi \in Y^*,\\ x \in X}} \quad \varphi(A_n x) \to \varphi(Ax) \;{}^{**)}$$

The symbols for limits and convergences are the following:
Symbole używane dla granic i zbieżności w tych dwóch sensach to odpowiednio $s-\lim_{n \to +\infty}$, $\xrightarrow[s]{}$, $\xrightarrow[s]{n}$, $\xrightarrow[n]{s}$, itp dla (S) for strong
oraz $w-\lim_{n\to+\infty}$, $\xrightarrow[w]{}$, $\xrightarrow[w]{n}$, $\xrightarrow[n]{w}$, itp dla (W)*). for weak

We use only $\to$ for convergence in the n.s. $B(X,Y)$.
Tu podobnie jak poprzednio użycie w oznaczeniach liter „S" i „W" pochodzi z angielskiego („strong", „weak"), a nie z języka polskiego (silny, słaby)

...

$\boxed{\text{Uwaga 1}}$ + $\boxed{\text{Umowa}}$ Remark + Agreement

Unfortunatly There is a ~~conflict~~ conflict with terminology and notation:
Niestety pojawia się tu konflikt terminologii i oznaczeń:
weak conv. have 2 meanings:
„Słaba zbieżność" może oznaczać bowiem zarówno to, co zdefiniowali-
one is this defined just before, but the second is defined in
śmy przed chwilą w (W) jak i zbieżność zdefiniowaną na
stronie OF-50, that is w odniesieniu do przestrzeni unormowanej $B(X,Y)$
— tzn.:

$$(\tilde{W}) \quad \forall_{\varphi \in (B(X,Y))^*} \quad \varphi(A_n) \to \varphi(A)$$

o ile if tylko $A_n, A \in B(X,Y)$! Niestety warunek $(\tilde{W})$ i ten z (W) nie muszą być w takiej sytuacji równoważne.
By więc uniknąć tej dwuznaczności stosujemy umowę, że

**) Tzn. $\forall_{x \in X} \; Ax_n \xrightarrow[w]{} Ax$, gdzie $\xrightarrow[w]{}$ oznacza tu słabą zbieżność w Y.

*) Ale patrz — Uwaga 1 poniżej! Ponadto „ostrzeżenie" z **) ze strony poprzedniej w odniesieniu do obu s-lim i w-lim także jest potrzebne.

We agree that if $A_n, A \in B(X,Y)$, then weak convergence means (w)

zawsze, gdy w kontekście ciągu operatorów mówimy o słabej zbieżności bez dodatkowych wyjaśnień, to chodzi o zbieżność w sensie (W).

$\boxed{\text{Uwaga 2}}$ ~~Remark 2.~~

Choć zbieżność silną i słabą ciągu operatorów zdefiniowaliśmy ogólnie dla operatorów liniowych, to odgrywają one istotną ~~rolę~~ rolę raczej wtedy, gdy dodatkowo założymy, że $A_n, A \in B(X,Y)$. Jednak, jak zobaczymy w przyszłości (w Rozdziale $\underline{V}$) przy dodatkowych założeniach, że X, Y – Banacha dla obu tych zbieżności fakt, że granica A jest operatorem ciągłym będzie wynikać z samej ciągłości operatorów A_n!

Na koniec tego podrozdziału sformułujmy fakt analogiczny do tego ze str. OF-51. Jego dowód ($\longrightarrow \triangle$) jest niemal oczywisty...

$\boxed{\text{Fakt}}$

(i) Jeśli (If) $\forall_{n \geq n_0}$ $A_n \in B(X,Y)$ oraz (and) $A \in B(X,Y)$ i (and) $A_n \longrightarrow A$, to (then)

$A_n \xrightarrow[s]{} A$;

(ii) $A_n \xrightarrow[s]{} A \implies A_n \xrightarrow[w]{} A$.

Proof. $\triangle$

Linear functionals and bdd

3. Funkcjonały liniowe i ograniczoność

Zajmiemy się tu szczególnymi operatorami liniowymi — w jakimś sensie najprostszymi, bo o wartościach w „najprostszej" nietrywialnej przestrzeni (liniowej/) unormowanej, tzn. w $\mathbb{K}$.

Structure of lin. funct.

3.1 Struktura funkcjonału liniowego

Zaczniemy od problemu „samej" liniowości funkcjonału. Tzn. badamy tu (we study here) wszystkie $\varphi \in X^{\#}$ dla pewnej (for some) X - liniowej (linear).

Przypomnijmy dwa pojęcia (+ oznaczenia). Jeżeli (If) $X_1, X_2, Y \subset_{lin} X$ to (then we said that) mówimy, że Y jest (is) sumą prostą (direct sum of) X_1 i (and) X_2, co oznaczamy symbolem (which we denote by)

$$Y = X_1 \oplus X_2$$

wtw (iff) $X_1 + X_2 = Y$ *) oraz (and) $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Natomiast kowymiarem Y w X (co-dimension of Y in X) nazywamy (we call) $\dim(X/Y)$ i oznaczamy go (and we denote it by)

$$\operatorname{codim}(Y), \text{ ewent. (or) } \operatorname{codim}_X(Y).$$

Fakt

Jeśli (If) $X_1, X_2, Y \subset_{lin} X$ to NWSR (then TFCAE):

(i) $Y = X_1 \oplus X_2$ (ii) $\forall_{y \in Y} \exists!_{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2}\ y = x_1 + x_2$.

---

*) Przypomnijmy, że dla $P, Q \subset X$ $P + Q := \{p + q : p \in P, q \in Q\}$.

$\boxed{\text{Dowód}}$ → Kurs Algebry Liniowej… (ew. → △). ↯

When we consider … big part of info on φ is contained

Gdy rozważamy $\varphi \in X^*$ to duża część informacji o φ

in … $\operatorname{Ker}\varphi$. … obviously … iff

zawarta jest w jego jądrze – $\operatorname{Ker}\varphi$. Oczywiście $\varphi = 0$ wtw

so below we study

$\operatorname{Ker}\varphi = X$. Poniżej zajmiemy się więc $\varphi \neq 0$.

On kernel of

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O jądrze funkcjonału")

Assume … then

Załóżmy, że $\varphi \in X^{\#} \setminus \{0\}$, wówczas:

1. $\operatorname{codim} \operatorname{Ker}\varphi = 1$;
2. $\forall_{x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker}\varphi}$

   (a) $X = \operatorname{lin}\{x_0\} \oplus \operatorname{Ker}\varphi$,

   (b) $\forall_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ y \in \operatorname{Ker}\varphi}} \; \varphi(\lambda x_0 + y) = \lambda \varphi(x_0)$.

$\boxed{\text{Dowód}}$

Consider … the quotient linear space … there ∃

Rozważmy przestrzeń ilorazową (liniową „tylko") $X/\operatorname{Ker}\varphi$ – istnieje

a … satisfying

dla niej faktoryzacja $\tilde{\varphi} \in \left(X/_{\operatorname{Ker}\varphi}\right)^{\#}$ spełniająca

which by definition has the trivial

$\varphi = \varphi \circ \pi$, która z definicji ma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle\tilde{\varphi}} & \\ X/_{\operatorname{Ker}\varphi} & & \end{array}$$

kernel … Moreover … because

zerowe jądro. Ponadto $\operatorname{Ran}\tilde{\varphi} = \mathbb{K}$, bo

that is … so

$\varphi \neq 0$ (czyli $\operatorname{Ran}\tilde{\varphi} = \operatorname{Ran}\varphi = \mathbb{K}$), zatem

is … linear isomorphism from … to … In particular

$\tilde{\varphi}$ jest izomorfizmem liniowym $X/_{\operatorname{Ker}\varphi}$ na $\underline{\mathbb{K}}$. W szczególności

which gives

$1 = \dim\mathbb{K} = \dim(X/_{\operatorname{Ker}\varphi})$, co daje 1.

To get 2, consider i.e.

By wykazać 2., rozważamy $x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker}\varphi$, tzn. $\varphi(x_0) \neq 0$,

so taking for given as we get

czyli biorąc dla $x \in X$ $\lambda_x \in \mathbb{K}$ zadane jako $\lambda_x := \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$ otrzymujemy

that is which means

$\varphi(x) = \lambda_x \cdot \varphi(x_0) = \varphi(\lambda_x x_0)$, czyli $\varphi(x - \lambda_x x_0) = 0$, co oznacza, że

that that is It gives

$x - \lambda_x x_0 \in \operatorname{Ker}\varphi$, czyli $x \in \lambda_x x_0 + \operatorname{Ker}\varphi$. Stąd $X = \operatorname{lin}\{x_0\} + \operatorname{Ker}\varphi$,

but because when then

ale $\operatorname{lin}\{x_0\} \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ bo gdy $\lambda x \in \operatorname{Ker}\varphi$, to $\varphi(\lambda x_0) = \lambda\varphi(x_0) = 0$,

so Thus and is obvious by linearity

więc $\lambda = 0$. Stąd 2(a), a 2(b) jest oczywiste z liniowości φ. ◻

Wniosek Corollary

If then iff

Jeśli $\varphi_1, \varphi_2 \in X^{\#}$, to $\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2$ wtw $\exists_{c \in \mathbb{K}\setminus\{0\}}\ \varphi_1 = c\varphi_2$.

Dowód This follows directly from the Fact point 2 (a) and (b). (And from the form

To wynika natychmiast z pow. Faktu punkt 2. (a) i (b) (oraz z postaci

for

$\operatorname{Ker}\varphi$ dla $\varphi = 0$). ◻

Remark If and satisfies and

Uwaga Jeżeli $Y \subseteq_{lin} X$ oraz $x_0 \in X \setminus Y$ spełnia $\operatorname{lin}\{x_0\} \oplus Y = X$ i

and is given by

$c_0 \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ oraz funkcja $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ zadana jest wzorem $\varphi(\lambda x_0 + y) := \lambda c_0$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

then and

to $\varphi \in X^{\#}$ i $\operatorname{Ker}\varphi = Y$. **Dowód** $\longrightarrow$ △.

Gdy X będzie przestrzenią unormowaną, to Fakt „O jądrze funkcjonału" oraz powyższa Uwaga pozwolą nam zrozumieć strukturę każdego funkcjonału z X^*.

Continuity of linear functional

3.2 Ciągłość funkcjonału liniowego

Let X be a norm sp. We shall see
Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Okazuje się,
that besides several condition equivalent to continuity
że poza kilkoma warunkami równoważnymi ciągłości funkcjonału
contained in Fact ~~on page~~
liniowego na X, które zapisane były w Fakcie „O warunkach
on page we can ~~also~~ formulate
równoważnych ciągłości" (str. OF-7) można sformułować
one more condition which is specific for functionals
jeszcze jeden, który jest specyficzny dla funkcjonałów i nie przenosi
and cannot be generalized for all lin. op.
się na wszystkie operatory liniowe.

Twierdzenie („O ciągłości funkcjonału") — On continuity

If X n.s. and $\varphi \in X^{\#}$, then
Jeżeli X - unormowana oraz $\varphi \in X^{\#}$, to
iff is closed
$\varphi \in X^*$ wtw $\operatorname{Ker}\varphi$ jest domknięte.

Dowód

it's clear because and φ is continuous.
„$\Rightarrow$" jest jasne, bo $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$.
Assume that is closed. When then obviously
„$\Leftarrow$" Załóżmy, że $\operatorname{Ker}\varphi$ jest domknięte. Gdy $\varphi = 0$, to oczywiście
φ is continuous. Assume and consider
φ - ciągłe. Załóżmy więc, że $\varphi \neq 0$ i rozważmy faktoryzację
of which by the fact
$\tilde{\varphi}$ funkcjonału φ, która na mocy

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{K} \\ X/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

on p.
Faktu „O jądrze funkcjonału" (str. OF-55))
is a linear operator
jest operatorem liniowym z przestrzeni liniowej
from to and
$X/\operatorname{Ker}\varphi$ w $\mathbb{K}$, przy czym $\dim X/\operatorname{Ker}\varphi = 1$. Gdy When we
as n.s., then by
traktujemy $\mathbb{K}$ i $X/\operatorname{Ker}\varphi$ jako przestrzenie unormowane, to dzięki
the continuity of operators on finite dim space see
ciągłości operatorów na przestrzeni skończonego wymiaru (patrz. Fakt str. OF-14)

~~we~~ we have — continuity — But — and

mamy $\tilde{\varphi}$ – ciągłe. Ale $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$ oraz

is continuous, so by thm

π – ciągłe na mocy Tw. „O przestrzeni ilorazowej”

so — also

(PB – 52), więc także $\varphi \in X^*$. ◻

Zadanie → △

Find examples of such X, Y n.s. and $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ s.t.

Znaleźć przykład takich X, Y – unormowanych oraz $A \in \mathcal{L}(X,Y)$,

is not continuous but ker A is closed..

że A – nieciągły oraz $\operatorname{Ker} A$ – domknięte.

Examples of cont. functionals.

3.3. Przykłady funkcjonałów ciągłych

Zobaczymy tu wiele przykładów funkcjonałów ciągłych (liniowych) w różnych przestrzeniach X. W rozdziale $\underline{\text{IV}}$ wykażemy m.in., że dla niektórych X, spośród podanych tu całych klas $\mathcal{K}$ funkcjonałów z X^* (tzn $\mathcal{K} \subset X^*$) de facto zachodzi $\mathcal{K} = X^*$, tzn każdy funkcjonał z X^* jest postaci pewnego elementu klasy $\mathcal{K}$.

For

◇ Dla $\dim X < +\infty$

As we know from — we have

Wówczas, jak wiemy z Faktu ze strony OF-14, zachodzi $X^* = X^\#$.

So when — is a base in — then each

A zatem gdy $v_1, \dots, v_d$ – baza w X, to każdy $\varphi \in X^*$

is uniquely given by s.t.

jest jednoznacznie wyznaczony przez $y \in \ell(\{1,\dots,d\})$ taki, że

where

$\varphi = \varphi_y$, gdzie

$$\varphi_y(x) := \sum_{j=1}^{d} y_j x_j, \quad \text{dla (for)} \quad x = \sum_{j=1}^{d} x_j v_j \qquad (1)$$

and for any this formula (1)

a przy tym dla każdego $y \in \ell(\{1,\dots,d\})$ wzór (1) wyznacza

gives

$\varphi_y \in X^*$.

In for measure sp.

◊ W $L^p(\Omega,\mu)$ dla $p \in [1;+\infty]$, $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ – przestrzeń mierzalna

Denote by such an element of $[1,+\infty]$ s.t.

Oznaczmy przez p^* taki element $[1;+\infty]$, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$,

it means

tzn. ściślej

$$p^* := \begin{cases} \dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} & \text{dla (for) } p \in (1;+\infty) \\ +\infty & \text{dla (for) } p = 1 \\ 1 & \text{dla (for) } p = +\infty \end{cases} \qquad (2)$$

Let and for ∀

Niech $q = p^*$ i dla każdego $g \in \begin{cases} \mathcal{L}^q(\Omega,\mu) & \text{gdy (if) } p \neq 1 \ (q \neq +\infty) \\ \mathcal{M}_b(\Omega,\mathfrak{M}) & \text{gdy (if) } p = 1 \ (q = +\infty) \end{cases}$

is given by formula

$\varphi_g : L^p(\Omega,\mu) \to \mathbb{K}$ wzorem

$$\varphi_g([f]) := \int_\Omega f g \, d\mu, \qquad f \in \begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu) & \text{gdy (if) } p \neq +\infty \\ \mathcal{M}_b(\Omega,\mathfrak{M}) & \text{gdy (if) } p = +\infty \end{cases} \qquad (3)$$

(a) $p \in (1;+\infty)$

By ineq., if we get

Na mocy nierówności Höldera, gdy $p \in (1;+\infty)$, otrzymujemy

$$\varphi_g \in \left(L^p(\Omega,\mu)\right)^*, \quad \|\varphi_g\| \leq |||g|||_q = \|[g]\|_q,$$

where we used the fact

przy czym „po drodze" korzystamy tu z Faktu ze strony OF-17

moreover by it's clear

(o operatorze ograniczonym z półnormowo ogr.). (Co więcej, z (3) jest

that if and then

jasne, że jeżeli $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^q$ oraz $[g_1] = [g_2]$, to $\varphi_{g_1} = \varphi_{g_2}$,

because the condition means that a.se.
ponieważ warunek $[g_1]=[g_2]$ oznacza, że $g_1=g_2$ μ-p.w.

In particular case, when and identifiying
W szczególnym przypadku, gdy $\Omega=\mathbb{N}$ i $\mu=\#$ (utożsamiając
in this case with we have for
jak zwykle w tym przypadku L^p z $\widetilde{L}^p$), mamy dla $y\in\ell^q(\mathbb{N})$

given by formula
$\varphi_y:\ell^p(\mathbb{N})\longrightarrow\mathbb{K}$ zadane wzorem

$$\varphi_y(x):=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n y_n,\qquad x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^p(\mathbb{N})\qquad(3')$$

and
oraz $\varphi_y\in\left(\ell^p(\mathbb{N})\right)^*$, $\|\varphi_y\|\leq\|y\|_q$.

Similarly we have in weighted spaces
Zupełnie podobnie będziemy mieli w przestrzeniach wagowych
and more general weight here and
$\ell^p_w(\mathbb{N})$, a ogólniej $\ell^p_w(\Omega)$ (tu $p\in(1;+\infty)$, a $w>0$):
∀ is defined
dla każdego $y\in\ell^q_w(\Omega)$ funkcjonał $\varphi_y:\ell^p_w(\Omega)\longrightarrow\mathbb{K}$ zdefiniowany
by
jest wzorem

$$\varphi_y(x):=\int_\Omega x(t)y(t)w(t)\,d\#(t)=\sum_{t\in\Omega}x(t)y(t)w(t),\ ^{*)}\qquad x\in\ell^p_w(\Omega)\qquad(3'')$$

and
i $\varphi_y\in\left(\ell^p_w(\Omega)\right)^*$, $\|\varphi_y\|\leq\|y\|_{q,w}$.

$\boxed{\text{Zadanie}}\longrightarrow$

Prove (at least when and) that
Wykaż (przynajmniej gdy $\underline{\Omega=\mathbb{N}\ \text{i}\ w\equiv 1}$), że $\|\varphi_y\|=\|y\|_{q,w}$.

See also (*) from where was defined
*) (– patrz też *) z PB-28, gdzie $\sum_{t\in A}f(t)$ określona była
∀ This = is a direct
dla wszystkich $f:A\longrightarrow[0;+\infty]$). Równość ta to bezpośrednia
consequence of a formula for the integrale of integrable function
konsekwencja wzoru na całkę z funkcji całkowalnej względem miary # (– Teoria
w.r.t. #-measure. Recall that is integrable w.r.t.
Miary i Całki ...). Przypomnijmy, że $f:A\longrightarrow\mathbb{C}$ jest całkowalna względem
iff and then where
wtw $\sum_{t\in A}|f(t)|=\int_A|f|\,d\#<+\infty$ i wówczas $\int_A f\,d\#=\sum_{t\in A}f(t)$, gdzie
$\sum_{t\in A}f(t):=\sum_{t\in A}(\mathrm{Re}\,f)(t)+i\sum_{t\in A}(\mathrm{Im}\,f)(t)$,
and for and integrable
natomiast dla całkowalnej $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$, $\sum_{t\in A}f(t):=\sum_{t\in A}f_+(t)-\sum_{t\in A}f_-(t)$,
where
gdzie $f_+(t)=\max(f(t),0)$, $f_-(t)=-\min(f(t),0)$.

Then ... And for

(b) $\underline{p=1}$ Wówczas $q=+\infty$, $g\in \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$. Wtedy dla $f\in\tilde{\mathcal{L}}^1$,

and ∀ ... s.t. ... we have

dla dowolnego Z t.że $\mu(Z)=0$ mamy

$$\left|\int_\Omega fg\,d\mu\right| \le \int_{\Omega\setminus Z}|f||g|\,d\mu \le \sup_{t\in\Omega\setminus Z}|g(t)|\cdot\|[f]\|_1,$$

So by ... we have

więc na mocy Faktu ze strony PB-60 mamy:

$$\varphi_g\in\left(L^1(\Omega,\mu)\right)^*, \quad \|\varphi_g\|\le\|[g]\|_{\infty\,ess}=\operatorname{supess}|g| \quad *)$$

In particular ... for space

W szczególnym przypadku, dla przestrzeni $\ell^1_w(\Omega)$ $(w>0)$

we consider ... and

rozważamy więc $g\in\mathcal{M}_b(\Omega, 2^\Omega)=\ell^\infty(\Omega)$ oraz

$$\varphi_g(x):=\sum_{t\in\Omega}x(t)g(t)w(t), \qquad x\in\ell^1_w(\Omega).$$

Then ... it's worth to note

Wtedy $\|\varphi_g\|\le\operatorname{supess}|g|=\|g\|_\infty$ – warto zwrócić

the independence of the weight w on the right hand side of this inequality.

tu uwagę, na brak zależności od wagi w po prawej stronie tej nierówności.

Problem

$\boxed{\text{Zadanie}}$ $\rightarrow$ △

Prove that

Wykaż, że $\|\varphi_g\|=\|g\|_\infty$!

then ... And for

(c) $\underline{p=+\infty}$ Wówczas $q=1$, $g\in\tilde{\mathcal{L}}^1$. Wówczas dla $f\in\mathcal{M}_b(\Omega,\mathfrak{M})$

using the calculation as above, but with changed role of f and g

obliczeń rachunkowo analogicznemu jak w (b) lecz z zamianą ról

we get

f i g otrzymujemy $\varphi_g\in\left(L^\infty(\Omega,\mu)\right)^*$, $\|\varphi_g\|\le|||g|||_1=\|[g]\|_1$. *)

Also here, For ... when ... then

*) Także tu, dla $p=1$ i $+\infty$, gdy $[g_1]=[g_2]$, to $\varphi_{g_1}=\varphi_{g_2}$ $\rightarrow$ △.

Again, when we consider with

Znów, gdy rozważymy zatem $L^\infty(\Omega, w\,d\#)$ z $w>0$

then we identify it just as again without

to utożsamiamy ją po prostu z $\ell^\infty(\Omega)$ (– znów – bez

any dependence on w, because

zależności od w..., bo $\sup ess|x| = \|x\|_\infty$ przy każdym $x \in \ell^\infty(\Omega)$

indep. on Now and for

niezależnie od $w>0$). Teraz więc $y \in \ell^1_w(\Omega)$ i dla $x \in \mathcal{M}_b(\Omega, 2^\Omega) = \ell^\infty(\Omega)$

$$\varphi_y(x) := \sum_{t\in\Omega} x(t)\,y(t)\,w(t).$$

Moreover

Ponadto $\|\varphi_y\| \le \|y\|_{1,w}$.

Problem

$\boxed{\text{Zadanie}}$ $\to \triangle$

Prove that

Wykaż, że $\|\varphi_y\| = \|y\|_{1,w}$.

It's worth to stress that the ~~above~~ ~~de~~ result described above separately for (a), (b), (c') could be unified in an elegant way when in place of φ_g which in fact did not depent on g itself but ~~on~~ $[g]$ we consider so for any when

Warto zauważyć, że wyniki opisane tu odrębnie dla (a), (b), (c') dadzą się elegancko ujednolicić, jeśli zamiast funkcjonałów φ_g, które jak widzieliśmy zależały nie tyle od samych g, ale od $[g]$, rozważymy funkcjonały $\underbrace{\Psi_{[g]} = \varphi_g}$. A zatem dla każdego $p \in [1;+\infty]$, gdy

and then we define

$q = p^*$ i $[g] \in L^q(\Omega,\mu)$, to definiujemy $\Psi_{[g]} : L^p(\Omega,\mu) \to \mathbb{K}$,

$$\Psi_{[g]}([f]) := \int_\Omega f g\, d\mu, \qquad [f] \in L^p(\Omega,\mu). \qquad (3''')$$

Let

$\boxed{\text{Fakt}}$ Niech $q = p^*$.

$$\forall_{[g]\in L^q(\Omega,\mu)} \quad \Psi_{[g]} \in \left(L^p(\Omega,\mu)\right)^* \ \text{ i } \ \|\Psi_{[g]}\| \le \|[g]\|_q,$$

(and)

where in the case

gdzie $\|\ \|_q := \|\ \|_{\infty\,ess}$ w przypadku $q = +\infty$ $(p=1)$.

(see def page ~~PB-60~~ str. 59).

In   is compact topological space.
W $C(K)$, K – przestrzeń topologiczna zwarta.

Let be any finite borel measure in K. Then we
Niech μ będzie dowolną ~~skończoną~~ miarą borelowską w K. Wówczas
can define   by
możemy zdefiniować $\varphi_\mu : C(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ wzorem

$$\varphi_\mu(f) := \int_K f\,d\mu\,, \qquad f \in C(K) \tag{4}$$

and it's clear that   and
i jasne jest, że $\varphi_\mu \in \big(C(K)\big)^*$ oraz $\|\varphi_\mu\| \le \mu(K)$.
But we can generalize this taking in place of finite
Możemy to jednak uogólnić, biorąc zamiast skończonej
Borel measure   any   - measure *) on σ-algebra of
borelowskiej miary jakąkolwiek $\mathbb{K}$-miarę *) na σ-ciele
Borel sets   Then   functional
zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(K)$. Wówczas funkcjonał φ_μ

---

*) see
patrz Appendix A.1.

which is given by the same formula (4), is by

zadany tym samym wzorem (4) na mocy Faktu

continuous

„Ocatce" z App. A.1 jest ciągły:

and

$$\varphi_\mu \in (C(K))^* \quad \text{oraz} \quad \|\varphi_\mu\| \le (\mathrm{var}\,\mu)(K) = \|\mu\|_{var}.$$

see appendix!

Also this result will be "amplified" in future ...

Również ten wynik istotnie wzmocnimy w przyszłości...

Let us describe also a particular functional

Opiszmy jeszcze pewien szczególny funkcjonał

from this class given by finite measures. (non negative).

z tej klasy, wyznaczony przez miary skończone (nieujemne).

Let for and be 2 finite borel measures

Niech bowiem dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ μ_1 i μ_2 będą dwiema skończonymi

then is measure

miarami borelowskimi wówczas $\mu = \mu_1 - \mu_2$ jest $\mathbb{R}$-miarą

(real measure) and the above described

(miarą rzeczywistą) i opisany wyżej funkcjonał ma postać:

functionale has the form:

$$\varphi(f) := \int_K f\,d\mu_1 - \int_K f\,d\mu_2, \quad f \in C(K).$$

When we can consider finite

Gdy natomiast $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, możemy rozważać cztery miary

measures and

skończone μ_1, μ_2 i μ_1', μ_2' oraz $\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_1' - \mu_2')$

and then

i wtedy

$$\varphi(f) := \int_K f\,d\mu_1 - \int_K f\,d\mu_2 + i\left(\int_K f\,d\mu_3 - \int_K f\,d\mu_4\right),$$

for

dla $f \in C(K)$.

Among defined here, we should distinguish very simple

Wśród funkcjonałów tu zadanych na szczególną uwagę zasługują

functionals "the value of the function at the fixed point" - let

bardzo proste funkcjonały „wartość funkcji w ustalonym punkcie" — niech

and define by

$t_0 \in K$ i zdefiniujmy $V_{t_0} : C(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ wzorem

$$V_{t_0}(f) := f(t_0), \quad f \in C(K).$$

Obviously and Observe that V_{t_0} belongs

Oczywiście $V_{t_0} \in (C(K))^*$ i $\|V_{t_0}\| = 1$. Warto zauważyć, że V_{t_0} należy

to any of the above classes of functionals - simply where

do każdej z omawianych wyżej klas funkcjonałów — po prostu $V_{t_0} = \varphi_{\delta_{t_0}}$, gdzie

is the measure at t_0 it means

δ_{t_0} to miara „δ w t_0" (tzn. $\delta_{t_0}(\omega) = \begin{cases} 1 & t_0 \in \omega \\ 0 & t_0 \notin \omega \end{cases}$, $\omega \in B(K)$).

In — and in

◆ W $\ell^{\infty}(\Omega)$ i w $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$

Observe first that when — then simply
Zauważmy najpierw, że gdy $\mathfrak{M} = 2^{\Omega}$, to po prostu
Consider thus the examples of
$\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M}) = \ell^{\infty}(\Omega)$. Zajmiemy się więc ogólnie przykładami
functionals in — where — is a σ-algebra on Ω
funkcjonałów na $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, gdzie $\mathfrak{M}$ – pewne σ-ciało podzbiorów Ω.

Consider — an additive K-measure on
Rozważmy $\mu \in \mathrm{ladd}(\mathfrak{M})$ — addytywną $\mathbb{K}$-miarę na $\mathfrak{M}$ *)
Define — by integral wrt
Określmy $\varphi_\mu : \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathbb{K}$ przy pomocy całki względem μ:

$$\varphi_\mu(f) := \int_\Omega f \, d\mu \qquad (5)$$

Then — is
Wówczas oczywiście φ_μ jest liniowym funkcjonałem, co
and moreover — by — in — we have
więcej – na mocy Faktu „O całce" z Apendixu A.1 zachodzi

and
$$\varphi_\mu \in \left(\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})\right)^* \quad \text{i} \quad \|\varphi_\mu\| \leq \|\mu\|_{var}. \qquad (6)$$

$\boxed{\text{Zadanie}}$ *Problem* $\longrightarrow$ △

Find all — K-measure — on — and write down
Znajdź wszystkie $\mathbb{K}$-miary**) μ na $\mathfrak{M} = 2^{\mathbb{N}}$, $\Omega = \mathbb{N}$ i wypisz „jawnie"
the explicit formula describing φμ. Compare the result with the class of
wzór opisujący φ_μ. Porównaj wynik z klasą uzyskanych wcześniej
functionals which φμ we got on page
funkcjonałów φ_y ze strony OF – 62.

---

see — M is a σ-algebra and not only
*) Patrz Appendix A.1. Mimo, że $\mathfrak{M}$ jest „aż" σ-ciałem,
an algebra, but we don't assume that μ is σ-additive.
nie tylko ciałem, nie zakładamy z góry, że $\mu \in l_{\sigma\text{-add}}(\mathfrak{M})$.

but here is
**) tu więc jednak jest $\mu \in l_{\sigma\text{-add}}(\mathfrak{M})$.