## 2.2 Przestrzeń ilorazowa i $L^\infty(\Omega,\mu)$

Przestrzeń liniowa ilorazowa $X/Y$ dla przestrzeni liniowej $X$ oraz $Y \subseteq_{lin} X$ została przypomniana na str. PB-4.

Teraz „spróbujemy" ją unormować zakładając, że $(X, \|\ \|)$ – unormowana. Ponieważ nie zawsze się to uda „w pełni", ale zawsze uda się „choć w połowie", określmy dla $[x] \in X/Y$

$$|||[x]||| := \operatorname{dist}(x, Y). \qquad (2)$$

Zauważmy, że (2) określa poprawnie funkcję

$$|||\ ||| : X/Y \longrightarrow \mathbb{R},$$

bo gdy $x \equiv x'$ (tzn. $x - x' \in Y$) to $x' = x + y_0$, gdzie $y_0 \in Y$

$\operatorname{dist}(x', Y) = \inf_{y\in Y} \|x-(y-y_0)\| = \inf_{y\in Y} \|x-y\|$ (bo $\{y-y_0 : y\in Y\} = Y$), tzn. prawa strona (2) nie zależy od wyboru reprezentanta klasy $[x]$.

**Twierdzenie** („O przestrzeni ilorazowej")

1. $|||\ |||$ jest półnormą w $X/Y$.
2. $|||\ |||$ jest normą w $X/Y$ wtw $Y = \overline{Y}$.

Jeśli ponadto $Y$ – domknięta oraz $\|\ \|_i := |||\ |||$ to:

3. $\pi(K_X(x_0, r)) = K_{X/Y}([x_0], r)$ dla każdego $x_0 \in X$ oraz $r \geq 0$. W szczególności $\pi : X \longrightarrow X/Y$ *) jest przekształceniem liniowym ciągłym, otwartym, gdzie $\pi$ zadane jest wzorem $\pi(x) := [x]$, $x \in X$.

*) $X/Y$ tzn. $(X/Y, \|\ \|_i)$.



4. Jeżeli $X$ jest przestrzenią Banacha, to także $(X/Y, \|\ \|_i)$ jest przestrzenią Banacha.

**Dowód**

1. Niech $x_1, x_2 \in X$ i niech $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $y_1, y_2 \in Y$ tak, że $\|x_j - y_j\| < \underbrace{\operatorname{dist}(x_j, Y)}_{= |||[x_j]|||} + \varepsilon/2$ dla $j = 1, 2$.

Mamy zatem:

$$|||[x_1+x_2]||| = \operatorname{dist}(x_1+x_2, Y) \leq \|(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\| \leq \|x_1-y_1\| + \|x_2-y_2\|$$
$$< |||[x_1]||| + |||[x_2]||| + \varepsilon,$$

co dzięki dowolności $\varepsilon > 0$ daje nierówność trójkąta dla $|||\ |||$.

Drugi warunek („jednorodność z modułem") dowodzi się dla $|||\ |||$ jeszcze łatwiej $\longrightarrow$ ⚠.

2. Mamy $|||[x]||| = 0 \iff \operatorname{dist}(x, Y) = 0 \iff x \in \overline{Y}$, ale $[x] = 0 \iff x \in Y$. Stąd $|||\ |||$ jest normą wtw $Y = \overline{Y}$. ((i z 1.))

Dla dowodu części „ponadto" zakładamy, że $Y = \overline{Y}$, zatem dzięki 2. $\|\ \|_i$ jest normą w $X/Y$.

3. Zauważmy najpierw, że $\pi(K_X(0,r)) \subset K_{X/Y}(0,r)$, gdyż

$$\forall_{x\in X} \ \|\pi(x)\|_i = |||[x]||| = \operatorname{dist}(x, Y) \leq \|x - 0\| = \|x\|. \qquad (3)$$

Wykażemy, że jest „=" w powyższym „$\subset$".