## 1.2. Przykłady operatorów liniowych i ich ograniczoność

Zajmiemy się tu licznymi przykładami - zarówno konkretnymi, jak i całymi klasami. Dla większego porządku podzielimy całość na pod-pod-podrozdziały. Tu jednak niewiele wspomnimy o funkcjonałach - nimi zajmiemy się trochę dokładniej w ostatnim podrozdziale (3.).

### ◇ Skończenie wymiarowa dziedzina ($\dim X < +\infty$)

given by finite matrix  it's well known from linear Algebra
Operatory zadane macierzą skończoną - to dobrze znane z kursu
course  Each such operator is continuous
Algebry Liniowej $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^\ell)$. Każdy taki operator
when we consider in $\mathbb{K}^m$ and $\mathbb{K}^\ell$
jest ciągły, gdy rozważamy w $\mathbb{K}^m$ i $\mathbb{K}^\ell$ normy (metryki) euklidesowe ($\| \ \|_2$),
so it is also continuous for any choice of norms
a zatem jest też ciągły przy każdym wyborze norm w tych przestrzeniach
see
(patrz Wniosek i Tw. "O równoważności norm" str. PB-11).
Moreover there is an identification between
(o więcej, jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy $M_{\ell \times m}$
set of all matrix  rows  columns
- zbiorem wszystkich macierzy skalarnych $\ell \times m$ ($\ell$-wierszy, $m$-kolumn)
and  which is just the identification
a $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^\ell) = B(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^\ell)$, polegająca na „utożsamieniu"
of the operator and its matrix, for standard basis.
operatora z jego macierzą w bazach standardowych:

$$M_{\ell \times m} \ni \mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,\ell \\ j=1,\dots,m}} \longleftrightarrow A \in B(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^\ell)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1m} \\ \vdots \\ a_{\ell 1}, \dots a_{\ell m} \end{pmatrix}, \quad (Ax)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \ , \ x \in \mathbb{K}^m, \ i = 1, \dots, \ell.$$

And opposite

Jednocześnie, „w drugą stronę”:

$$\mathcal{A} = \left((Ae_1)^T, \dots, (Ae_m)^T\right), \qquad e_j \in \mathbb{K}^m \ ^{*)}, \quad j = 1, \dots, m.$$

(więc)

Często będziemy „pół-legalnie” utożsamiać $\mathcal{A}$ i $A$ zastępując jedno z nich drugim.

## $\dim X < +\infty$

Powyższy przykład można nieco uogólnić.

$\boxed{\text{Fakt}}$

If n. s.

Jeżeli $X, Y$ – przestrzenie unormowane, $\dim X < +\infty$,

then

to $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{B}(X,Y)$.

$\boxed{\text{Dowód}}$

Let we must prove that continuous It's

Niech $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, musimy wykazać, że $A$ – ciągły. Wystarczy

enough that this is continuous because... ?

zatem wykazać, że $A : X \longrightarrow \tilde{Y} := \operatorname{Ran} A$ jest ciągły (bo...? – proszę przypomnieć odpowiedni argument/fakt z topologii $\longrightarrow \triangle$).

But let and let be

Ale $\dim \tilde{Y} =: l < +\infty$; niech $m := \dim X$, i niech $\Phi_X$, $\Phi_{\tilde{Y}}$ będą

any linear isomorphism from to and from to

dowolnymi izomorfizmami liniowymi z $\mathbb{K}^m$ na $X$ i z $\mathbb{K}^l$ na $\tilde{Y}$ odpo-

respectively. for instance as in the proof at Trasfering norm from

wiednio (np. jak w dowodzie ze str. PB-12). Przenosząc normy z

and to resp. by and we get

$X$ i $\tilde{Y}$ do $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^l$ odpowiednio przez $\Phi_X$ i $\Phi_{\tilde{Y}}$ uzyskamy na mocy

by the above example the continuity of

powyższego przykładu ciągłość $\tilde{A} := \Phi_{\tilde{Y}}^{-1} \circ A \circ \Phi_X : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$

---

*) Choć oczywiście analogiczne wektory bazy standardowej są też w $\mathbb{K}^l$ ($e_1, \dots, e_m$ – na ogół oznaczamy je tak samo, choć to innego typu wektory gdy $m \neq l$ ...).

which transfered norms in and
z normami przeniesionymi w $\mathbb{K}^m$ i $\mathbb{K}^l$.

But so is continuous, because both
Ale $A = \Phi_{\tilde{Y}} \circ \tilde{A} \circ \Phi_X^{-1}$, więc $A$ jest ciągły, ponieważ oba

and are isometryes.
$\Phi_{\tilde{Y}}$ i $\Phi_X$ są izometriami (Fakt „O przeniesieniu normy", str. PB9).

## $\boxed{\text{Uwaga}}$

If and then
Jeżeli $\dim X = +\infty$ oraz $Y \neq \{0\}$, to

$$\mathcal{L}(X,Y) \neq B(X,Y).$$

It means there ∃ non continuous
(Tzn. istnieje $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A$ - nieciągły).

Proof Hint: It's sufficient to find
$\boxed{\text{Dowód}}$ $\longrightarrow \triangle$ Wskazówka: Wystarczy ($\longrightarrow \triangle$)

non continuous
znaleźć *) nieciągły funkcjonał $\varphi \in X^{\#}$.

---

to find it really one more hint:
*) – aby faktycznie znaleźć — jeszcze jedna Wskazówka:
use base and using it describe all Then use the fact
użyć bazy i opisać przy jej użyciu wszystkie $\varphi \in X^{\#}$. Następnie użyć
Faktu „O warunkach równoważnych ciągłości" (str. OF-7).

Several operators related to some typical constructions

# ◊ „Kilka" operatorów związanych z pewnymi typowymi konstrukcjami

Subspace and embedding

## 1. Podprzestrzeń – włożenie

Let ... subspace (norm.) ... of n.s.

Niech $Y$ – podprzestrzeń (unormowana) przestrzeni unormowanej $X$.

Then embedding ... it means ... for

Wówczas włożenie $J_Y : Y \longrightarrow X$ (tzn. $J_Y(y) := y$ dla $y \in Y$)

is a continuous ... i.e.

jest operatorem liniowym ciągłym, tzn. $J_Y \in B(Y, X)$.

Norm space from seminorm and seminorm - ~~boundness~~ - boundedness

## 2. Przestrzenie unormowane z półnormy i półnormowa ograniczoność

Let ... and ... 2 linear sp. with

Niech $(\tilde{X}, |||\ |||)$ i $(\tilde{Y}, |||\ |||)$ – dwie przestrzenie liniowe

seminorm

z półnormami (oznaczonymi tak samo tylko dla uproszczenia zapisu)

and let ... and ... be

i niech $\tilde{X}_0$, $\tilde{Y}_0$ oraz $X := \tilde{X}/\tilde{X}_0$, $Y := \tilde{Y}/\tilde{Y}_0$ będą

as in the definition of norm from seminorm and by denote

takie jak w definicji normy z półnormy i przez $\|\ \|$ oznaczmy

norms from in and respect.

(obie – znów) normy z półnorm $|||\ |||$ w $X$ i $Y$ – odpowiednio.

Let ... satisfies

Niech $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ spełnia dodatkowo

$$\tilde{A}(X_0) \subset Y_0 . \tag{1}$$

Then, as you know from ... it's worth to check

Wówczas, jak wiadomo z Algebry Liniowej (i warto sprawdzić

now again ... the formula

znów teraz ⟶ ⚠) wzór

$$A([x]) := [\tilde{A}(x)] \tag{2}$$

poprawnie definiuje funkcję $A : X \to Y$, a ponadto $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Powiemy, że $\tilde{A}$ jest półnormowo ograniczony wtw $\exists_{C \in [0;+\infty)} \forall_{x \in \tilde{X}} \; |||\tilde{A}x||| \leq C|||x|||$, oraz $\tilde{A}$ jest półnormowo ograniczony przez $C$, dla $C \in [0;+\infty)$, wtw $\forall_{x\in\tilde{X}} \; |||\tilde{A}x||| \leq C|||x|||$.

Niemal oczywisty ($\to \Delta$) jest poniższy wynik.

$\boxed{\text{Fakt}}$ (O operatorze ograniczonym z półnormowo ograniczonego")

Jeśli $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\tilde{X},\tilde{Y})$ spełnia (1) oraz jest półnormowo ograniczony przez $C \in [0;+\infty)$, to $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ oraz

$\|A\| \leq C$.

$\boxed{\text{Uwaga}}$

Jeżeli któraś z półnorm w $\tilde{X}$ lub $\tilde{Y}$ była normą, to odpowiednio $X$ lub $Y$ można izometrycznie utożsamić (z $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$) poprzez $J : \tilde{X} \to X$ ew. $J : \tilde{Y} \to Y$ zadane wzorem $Jv = [v]$ i można wówczas w sposób naturalny utożsamiać $A$ z operatorem ograniczonym z $\tilde{X}$ w $Y$ lub odpowiednio $X$ w $\tilde{Y}$ (ew. $\tilde{X}, \tilde{Y}$, gdy na raz mamy dwie normy, choć to mało ciekawe...).

Quotient space — quotient map — and factorization

## 3. Przestrzeń ilorazowa, przekształcenie ilorazowe i faktoryzacja

Let — n.s. — Let

Niech $X$ - przestrzeń unormowana, $Y \underset{lin}{\subset} X$, $Y = \overline{Y}$. Niech

be — quotient map — i.e.

$\pi : X \to X/Y$ będzie przekształceniem ilorazowym, tzn.

$$\pi(x) := [x], \quad x \in X.$$

Obviously — in — we take

Oczywiście $\pi \in B(X, X/Y)$ (w $X/Y$ przyjmujemy - oczy-

as norm — see

wiście $\| \, \|_i$ jako normę - patrz Tw. „O przestrzeni ilorazowej" str. PB-52).

Moreover when — then — which follows from

(o więcej, gdy $Y \neq X$, to $\|\pi\| = 1$ *) - to wynika z w.w.

thm PB-52 — see point

twierdzenia (patrz pkt 3.).

Now let — lin. space and — and

Niech teraz $Z$ - („dodatkowa") przestrzeń liniowa oraz $A \in \mathcal{L}(X, Z)$, przy czym

$$Y \subset \operatorname{Ker}(A). \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/Y \arrow[ur, "A'"'] & \end{tikzcd}$$

$Y \subset \operatorname{Ker} A \ldots$

then — iff — as known from

Wtedy (i tylko wtedy...), jak wiadomo z

there ∃ a factorization **) of A

Algebry Liniowej istnieje faktoryzacja **) $A$,

i.e. such — that

tzn. taka $A' : X/Y \to Z$, że

$$A = A' \circ \pi.$$

moreover — is uniquely determined by proper

(o więcej $A'$ jest jednoznacznie wyznaczone formułą (poprawną...)

$$A'([x]) = Ax, \quad x \in X \tag{4}$$

i $A' \in \mathcal{L}(X/Y, Z)$).

---

When — then — so

*) Gdy $Y = X$, to $X/Y = \{0\}$, więc $\|\pi\| = 0 \ldots$

to stress that it depends on Y — we say

**) by wyraźniej zaznaczyć, że zależy ona od $Y$ rozumieć, mówimy też:

of — for — or — for

„faktoryzacja $A$ dla $Y$" (a czasem „... dla $X/Y$").

When is also norm space and is continuous, then we get more:
Gdy $Z$ też jest unormowana i $A$ – ciągły, to otrzymamy
jeszcze więcej – dowód $\longrightarrow \triangle$.

On factorization
$\boxed{\text{Fakt}}$ („O faktoryzacji")

If normed and and
Jeśli $X, Z$ – unormowane, $Y = \overline{Y} \underset{\text{ein}}{\subset} X$ oraz $A \in B(X,Z)$ i
is for then and
$A'$ jest faktoryzacją $A$ dla $Y$, to $A' \in B(X/_Y, Z)$ oraz
$\|A'\| = \|A\|$.

Proof. $\triangle$

projection and embedding
## 4. Produkt – rzutowania i włożenia

Consider of n.s.
Rozpatrzmy produkt $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ przestrzeni unormowanych
see Let
$(X_j, \| \ \|_j)$, $j = 1, \ldots k$ (patrz str PB – 48). Niech $j \in \{1, \ldots, k\}$
and let be called j-th embedding i.e. a map
i niech $I_j : X_j \longrightarrow X$ będzie tzw. <u>j-tym włożeniem</u> tj. przekształce-
given by
niem danym przez

$$(I_j x)_s = \begin{cases} x & s = j \\ 0 & s \neq j \end{cases}, \quad x \in X_j, \quad s = 1, \ldots, k$$

i.e. Let also
(tzn. „$I_j x = (0 \ldots \underset{j}{x}, 0, \ldots 0)$"). Niech też $P_j : X \longrightarrow X_j$
be j-th projection on i.e.
będzie <u>j-tym rzutowaniem (rzutowaniem na $X_j$)</u>, tj.

$$(P_j x) = x_j, \quad x = (x_1, \ldots, x_k) \in X.$$

obviously each of and of is cont. op.
Oczywiście każdy z $I_j$ oraz z $P_j$ jest operatorem ciągłym
and it's easy to compute their norms assuming
$(\longrightarrow \triangle)$ i łatwo wyliczyć ich normy $(\longrightarrow \triangle)$ przy założeniu,
that in the norm was given by see
że w $X$ norma została zadana wzorem (1) ze str. PB 48.

Multiplication operators by

◊ Operatory mnożenia (przez funkcję)

Let non empty set In spaces
Niech $\Omega$ – niepusty zbiór. W przestrzeniach funkcyjnych
on and also in spaces of class of functions on $\Omega$ we shall
na $\Omega$, a także w przestrzeniach klas funkcji na $\Omega$ będziemy
often consider related directly ~~with~~ with operation
często rozważali operatory związane bezpośrednio z operacją
of ~~real~~ multiplication by a fixed
mnożenia przez ustaloną funkcję

$$F:\Omega\longrightarrow\mathbb{K},$$

which all we shall call mult. op. by
które wszystkie będziemy nazywali <u>Operatorami mnożenia przez F</u>
and we shall denote by
i oznaczali na ogół symbolem

$$M_F,$$

indep. on the choice of the space
niezależnie od wyboru konkretnej przestrzeni funkcyjnej / klas
funkcji (doprecyzowywać dokładny wybór będziemy na ogół
przez dodanie informacji o jaką przestrzeń chodzi). W
Depending on the choice of the space we shall need some extra assumptions on F but
zależności od wyboru przestrzeni potrzebne będą różne dodatkowe założenia
the definition is as follows after those special ~~conditions~~
na F, natomiast sama definicja, już przy tych odpowiednich
assumption is as follows see also
założeniach jest następująca (patrz też str. PB-18 i 19).

When such n.s. that
(A) Gdy $(X, \|\,\|)$ – taka przestrzeń unormowana, że
then is given by
$X \subset_{lin} \ell(\Omega)$, to $M_F : X \longrightarrow X$ zadana jest formułą

$$M_F f := F\cdot f, \quad f\in X. \qquad (5)$$

It is a proper def. of a function ~~to~~ from
Jak widać, definicja ta będzie poprawną definicją przekształcenia
in iff is invariant ~~over~~ mult. by F
z X w X wtw X jest niezmiennicza względem mnożenia przez
Moreover the same assumption gives
F.*) Na dodatek, przy tym samym założeniu automatycznie $M_F\in\mathcal{L}(X)$
(→ △).

*) Tzn. (i.e.) $\forall_{f\in X}\ F\cdot f\in X$.

When is n.s. of classes of

(B) Gdy $X$ jest przestrzenią unormowaną klas funkcji

got by the construction ~~of~~ of norm space from seminorm or

uzyskaną za pomocą konstrukcji przestrzeni unormowanej z półnormy lub

by construction of quotient space that is generally

konstrukcji przestrzeni ilorazowej, tzn. ogólnie: *)

where

$$X = \tilde{X}/\tilde{X}_0, \quad \text{gdzie} \quad \tilde{X}_0 \underset{lin}{\subset} \tilde{X} \underset{lin}{\subset} \ell(\Omega),$$

then, is given by

to $M_F : X \longrightarrow X$ zadana jest formułą

$$M_F[f] := [F \cdot f] \qquad \text{dla } f \in \tilde{X} \qquad (5')$$

but we should assume here two invariances

przy czym będziemy tu żądać obu niezmienniczości:

is inv. under mult. by

(i) $\tilde{X}$ jest niezmiennicza względem mnożenia przez $F$

is inv.

(ii) $\tilde{X}_0$ jest niezmiennicza — " — — " — — " —.

Then gives a proper

Wówczas również łatwo wykazać, że (5') zadaje poprawnie

map from to and

przekształcenie z $X$ w $X$ i przy tym $M_F \in \mathcal{L}(X)$ ($\longrightarrow$ ćw)

Moreover

Ponadto tej samej nazwy (oper. mnożenia) i oznaczenia $M_F$ używa się też w różnych przypadkach „mieszanych", tzn. wówczas uzyskamy $M_F \in \mathcal{L}(X,Y)$ dla różnych $X, Y$ zarówno typu z (A), jak i z (B), jednak szczegóły definicji i dodatkowe wymogi dla ich poprawności pozostawiam do ew. przemyślenia słuchaczom (dla różnych możliwych „mieszanych wariantów").

Now we give special cases for where

Oto niektóre szczególne przypadki spośród (A) i (B), w których,

we also give some conditions for sufficient for continuity.

poza warunkami tam potrzebnymi, podajemy też warunki wystarczające, by $M_F \in B(X)$.

---

*) Jednak wbrew oznaczeniu, $\tilde{X}_0$ to nie koniecznie $\{0\}$, gdy chodzi o zwykłą konstrukcję przestrzeni ilorazowej w $\tilde{X}$-unormowanej, lecz ogólnie – pewna podprzestrzeń domknięta

- $\underline{M_F \text{ w } \ell^\infty(\Omega)}$

*Let ... then ... in*
Niech $F \in \ell^\infty(\Omega)$, wówczas (5) w $X = \ell^\infty(\Omega)$
*defines properly ... and*
definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.

$\longrightarrow \triangle$.

- $\underline{M_F \text{ w } C_b(\Omega, \mathcal{T})}$ ($\mathcal{T}$ – topologia w $\Omega$)

*Let ... then ... in*
Niech $F \in C_b(\Omega, \mathcal{T})$, wówczas (5) w $X = C_b(\Omega, \mathcal{T})$
*and*
definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz $\|M_F\| \leq \|F\|_\infty$.
*Moreover, ... with some extra assumptions ... on*
Co więcej, przy pewnych dodatkowych założeniach o przestrzeni
*we get*
topologicznej $(\Omega, \mathcal{T})$ zachodzi nawet $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.
*Exercise. ... Formulate and prove such general*
$\boxed{\text{Zadanie}}$ ($\longrightarrow \triangle$) Sformułować i wykazać na tyle ogólny
*result ... which includes all*
wynik powyższego rodzaju, by obejmował on wszystkie $(\Omega, \mathcal{T})$
*with ... and ... subspace topology of*
z $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ i $\mathcal{T}$-topologią podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^d$ (ze
standardową topologią)*).

- $\underline{M_F \text{ w } \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})}$ ($\mathfrak{M}$ – $\sigma$ ciało „w $\Omega$")

*Let ... then*
Niech $F \in \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, wówczas (5) w $X = \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$
*and*
definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.

$\longrightarrow \triangle$.

---

*It could be better if contains more ... look in*
*) Choć zachęcam, by obejmował jeszcze więcej... – warto przejrzeć
*course ... axioms of separability actions ... and their consequences*
nieco kurs „Topologii I" i np. „aksjomaty oddzielania" oraz różne ich konsekwen-
cje.

• $M_a$ w $c$ i w $c_0$
(in … and in)

Let … then … in
Niech $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, wówczas (5) w $X = c_0$

and
definiuje poprawnie $M_a \in B(X)$ oraz $\|M_a\| = \|a\|_\infty$.

similarly when … if also
→ Δ. Podobnie gdy $X = c$, o ile (również) $a \in c$.

for … and
• $M_F$ w $\ell^p_w(\Omega)$ (dla $p \in [1; +\infty)$ i $w > 0$)

when … then … in
Gdy $F \in \ell^\infty(\Omega)$, to (5) w $X = \ell^p_w(\Omega)$

and
definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.

→ Δ.

in … for … and measure
• $M_F$ w $L^p(\Omega, \mu)$ (dla $p \in [1; +\infty]$ ↖! i miary $\mu \geq 0$

on σ-algebra of subsets of
na σ-ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów $\Omega$)

when … and
Gdy $F \in \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$ oraz:

for … see
– dla $p < +\infty$: $\tilde{X} := \tilde{L}^p$, $\tilde{X}_0 := \tilde{X}_{0,p}$ (patrz str. PB-36)

and … is the norm … from seminorm
oraz $X = L^p(\Omega, \mu)$ z normą $\|\ \|_p$ (z półnormy)

for
– dla $p = +\infty$: $\tilde{X} := \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, $\tilde{X}_0 := Z_\mu$

and … ~~with the norm~~ with the quotient norm … see
oraz $X = L^\infty(\Omega, \mu)$ z normą ilorazową $\|\ \|_{\infty\,\mathrm{ess}}$ (patrz str. PB-58, 59),

then … in … defines … and
to (5') w $X$ definiuje poprawnie $M_F \in B(X)$ oraz

$\|M_F\| \leq \operatorname{supess}|F|$.*) → Δ

Recall that … and
*) Przypomnijmy, że jednocześnie $\operatorname{supess}|F| = \|[F]\|_{\mathrm{ess}\,\infty}$, i $[F] \in L^\infty(\Omega, \mu)$,

where is here in the sense … quotient space … for
gdzie [ ] jest tu w sensie przestrzeni ilorazowej $\mathcal{M}_b / Z_\mu$ przy

all … it is … about … and not ab.
wszystkich $p \in [1; +\infty]$ — chodzi bowiem o $F$, a nie o $f \in \tilde{X}$...

(patrz str. PB-60)

The situation is similar here to those from in

Sytuacja jest tu podobna do tej z $M_F$ w $C_b(\Omega, \mathcal{T})$:

with some extra assumption on measure space

przy pewnych dodatkowych założeniach o przestrzeni mierzalnej

we have

$(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ zachodzi nawet $\|M_F\| = \operatorname{sup\,ess}|F|$.

Ex. Formulate and prove the general

$\boxed{\text{Zadanie}}$ ($\longrightarrow$ △) Sformułować i wykazać możliwie ogólny

result by yourself by defining an appropriate (possibly

wynik powyższego rodzaju, samodzielnie definiując odpowiednie (– możliwie

weak) assumption on $\mu$.

słabe...) założenia odnośnie miary $\mu$.

Shift op.

## ◊ Operatory przesunięcia

Let ... be one of the sets

Niech tu $\Omega$ będzie jednym ze zbiorów $\mathbb{R}$, $[0;+\infty)$,

(we can also consider a general abel group

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ (można by też rozważać nieco ogólniejsze grupy abelowe

or their special subspaces - try to generalize it by yourself!

lub pewne ich specjalne podzbiory – zachęcam do własnych uogólnień...)

Thanks to the extra structure on ... we can "shifts"

Dzięki specjalnej dodatkowej strukturze zbioru $\Omega$, funkcje skalarne

scalar functions on $\Omega$ in by the following sense For

określone na $\Omega$ można „przesuwać" – w następującym sensie. Dla

its shift by $t$ where we

$f \in \ell(\Omega)$ jej <u>przesunięcie o $t$</u>, gdzie $t \in \Omega$, oznaczamy

denote by $f_t$ and we define for or as given by

przez $f_t$ i definiujemy dla przypadku $\Omega = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{Z}$ jako $f_t \in \ell(\Omega)$ daną wzorem

$$f_t(s) := f(s-t), \quad s \in \Omega.$$

But when or then for we define

Gdy natomiast $\Omega = [0;+\infty)$ lub $\mathbb{N}$ to dla $t \in \Omega$ określamy

two shifts on right and left. t-right shift of f

dwa przesunięcia: w prawo i w lewo. <u>Przesunięcie $f$ o $t$</u>

this is given by

<u>w prawo</u> to $f_{+t} \in \ell(\Omega)$ zadane wzorem

$$f_{+t}(s) := \begin{cases} f(s-t) & \text{gdy } s \geq t \\ 0 & \text{gdy } s < t \end{cases}, \quad s \in \Omega,$$

and for t-left shift of f it's simpler

natomiast dla <u>przesunięcia $f$ o $t$ w lewo</u> jest nieco „wygodniej" –

oznaczamy je $f_{-t}$ i jest to element $\ell(\Omega)$ dany przez

$$f_{-t}(s) := f(s+t), \quad s \in \Omega \quad {}^{*)}$$

Teraz, dla różnych przestrzeni funkcji lub klas funkcji związanych z $\ell(\Omega)$ postępujemy podobnie jak przy operatorach mnożenia w punktach (A) i (B) ze str. OF-20 i 21.

---

*) Zachęcam do zilustrowania przejścia od $f$ do $f_{+t}$ i $f_{-t}$ podobnym rysunkiem (jednak uwaga...) jaki jest powyżej dla $f_t$.

so the t-shift will be denoted
A więc operator <u>przesunięcia o $t$</u> będziemy oznaczać
by for
przez $T_t$ (zawsze – niezależnie od wyboru przestrzeni), dla
or and this is given by
$t \in \Omega = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{Z}$ i jest to $T_t : X \longrightarrow X$ zadany:

when is a space of function see
(A) – gdy $X$ przestrzeń funkcji (– patrz (A) str. 20 –), $X \subset_{lin} \ell(\Omega)$
in this case satisfying the invariance condition
w tym wypadku spełniająca warunek niezmienniczości
of the form
postaci

$$\forall_{f\in X} \quad f_t \in X,$$

as
jako:

$$T_t f := f_t, \quad f \in X; \qquad (6)$$

when is a space of classes of functions see i.e.
(B) – gdy $X$ – przestrzeń klas funkcji (– patrz (B) str. 21 –) tzn.
for satisfying 2 "invariances":
$X = \tilde{X}/\tilde{X}_0$ dla $\tilde{X}_0 \subset_{lin} \tilde{X} \subset_{lin} \ell(\Omega)$ spełniających dwie
„niezmienniczości":

$$\forall_{\substack{f\in\tilde{X}\\ g\in\tilde{X}_0}} \quad f_t \in \tilde{X},\ g_t \in \tilde{X}_0,$$

as
jako

$$T_t[f] := [f_t], \quad f \in \tilde{X} \qquad (6')$$

In both cases define properly a map
W obu przypadkach (6) i odpowiednio (6') poprawnie zadaje przekształcenie
and moreover
$T_t : X \longrightarrow X$ i co więcej $T_t \in \mathcal{L}(X)$ $(\longrightarrow \triangle)$.

We make analogically for $[0;+\infty)$ or and we define
Zupełnie analogicznie postępujemy dla $t \in \Omega =$ lub $\mathbb{N}$ i definiujemy
the denoted by t-right / left shift
operatory oznaczane jako $T_{+t} / T_{-t}$ <u>przesunięcia w prawo/lewo o $t$</u>
changing above everywhere by respectively.
zastępując powyżej wszędzie $t$ przez $+t / -t$ – odpowiednio.

For some special cases of X we should describe the problem of bdd and norm.

Dla niektórych szczególnych przestrzeni X opiszmy kwestię ograniczoności i normy:

- $T_t$ w (in) $\ell^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ *), $C_b(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$ $(p \in [1;+\infty])$, $t \in \mathbb{R}$

  and / oraz $T_{+t}, T_{-t}$ in analogical spaces with / w analogicznych przestrzeniach z $[0;+\infty)$ in place of / w miejsce $\mathbb{R}$ (and / i $t \geq 0$ in place of / w miejsce $t \in \mathbb{R}$)

  all those operators are continuous and
  – wszystkie te operatory są ciągłe oraz $\|T_t\| = 1$

  Moreover
  $\longrightarrow \triangle$. Zachodzi też sporo związków algebraicznych –

  – np:
$$\forall_{t \in \mathbb{R}} \; T_{t+s} = T_t T_s, \quad T_0 = I$$
$$\forall_{t \geq 0} \; T_{\pm(t+s)} = T_{\pm t} T_{\pm s}, \quad T_0 = I,$$
  but for / but
  ale dla $t > 0$ $\; T_{-t} T_{+t} = I$ jednak $T_{+t} T_{-t} \neq I$ **)

- $T_n$ w (in) $\ell^p(\mathbb{Z})$ $(p \in [1;+\infty])$, $n \in \mathbb{Z}$

  and / oraz $T_{+n}, T_{-n}$ w (in) $\ell^p(\mathbb{N})$ $(p \in [1;+\infty])$, $c$, $c_0$

  analogically as above (respectively $n \in \mathbb{Z}$ / $n \in \mathbb{N}_0$ ...) are all continuous and their norm = 1. moreover there are analogical formula as above

  analogicznie jak „w wersji powyżej" (odpowiednio $n \in \mathbb{Z}$ / $n \in \mathbb{N}_0$ ...) są wszystkie ciągłe i mają normy operatorowe równe 1, ponadto zachodzą analogiczne formuły algebraiczne jak wyżej.

for all the above examples are isometries but not

Warto jeszcze dodać, że $\underline{T_t}$ we wszystkich powyższych przykładach są ponadto izometriami $\longrightarrow \triangle$, ale $\underline{T_{\pm t}}$ – NIE.

---

More strictly ... with ... being σ-algebra of Lebesgue measurable sets, however we can also use Borel sets.

*) Ściślej $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}, \mathfrak{M})$ gdzie typowo $\mathfrak{M}$ to σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, choć mogą też być „równie dobre" samie borelowskie.

Please compute "this product" directly

**) Proszę „wyliczyć" jawnie $\underline{T_{+t} T_{-t}}$ ... $\rightarrow \triangle$. $\boxed{\text{OF - 27}}$

As you can see we didn't study
Jak widać w powyższych przykładach nie rozważaliśmy
the weight spaces for weights $\neq$ than
ani przestrzeni „wagowych" $\ell^p_w(\cdot)$ z wagami innymi niż $\underline{w \equiv 1}$
and also for measure $\neq$ than
ani $L^p(\cdot)$ dla miar różnych od miary Lebesgue'a.
It Is because the necessary condition of invariance can be not
Nie zawsze bowiem są spełnione odpowiednie niezbędne
satisfied.
warunki niezmienniczości, które by umożliwiały zdefiniowanie
takich $T_t$, $T_{\pm t}$.

$\boxed{\text{Zadanie}}$ Ex.

Find ~~suff~~ necessary and sufficient condition for $w>0$ which garantee
Znajdź warunki konieczne i dostateczne na $w>0$ *) gwarantujące,
that is properly define in depending on
że $T_{\pm n}$ jest poprawnie określony w $\ell^p_w(\mathbb{N})$ w zależności od
and For such $w$ check the continuity
$p\in[1;+\infty)$, $n\in\mathbb{N}_1$ oraz $+/-$. Dla spełniających te warunki $w$
and compute the norm if the continuity holds
zbadaj ciągłość, a w przypadku ciągłości oblicz $\|T_{\pm n}\|$.

$\longrightarrow$ △.

---

*) Warto by te warunki były „zgrabnie" zapisane w terminach „samego" $w$.

# Pochodna i całkowanie

Z sensownym zdefiniowaniem „operatora pochodnej" w typowych przestrzeniach, które tu rozważamy jest oczywisty problem — mimo liniowości operacji różniczkowania nie mamy szans rozważać takiego operatora jako określonego „na całym" $X$, bo dla naszych typowych $X$ jej elementy $f$ ew. $[f]$ nie wszystkie spełniają warunek różniczkowalności $f$. Ale nawet gdyby $X$ składało się po prostu ze wszystkich funkcji różniczkowalnych, to $f'$ może już tam nie należeć, gdy $f \in X$... Jednym ze sposobów poradzenia sobie z tego typu problemem jest rozważanie operatora pomiędzy różnymi przestrzeniami — np. rozważmy dla $\mathbb{R} \ni a < b \in \mathbb{R}$ przestrzeń liniową

$X = C^1([a;b])$ with z normą $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ $^{*)}$

and oraz $Y = C([a;b])$ (z $\|\cdot\|_\infty$) then wówczas

$D : X \longrightarrow Y$ given by zadany wzorem

$$Df = f', \quad f \in X$$

is jest operatorem liniowym, co więcej — moreover, continuous ciągłym and i oczywiście $\|D\| \leq 1$.

$\boxed{\text{Zadanie}}$ Ex.

compute Oblicz $\|D\|$. $\longrightarrow$

---

$^{*)}$ Proszę sprawdzić, że $(X, \|\ \|)$ jest unormowana, a nawet Banacha $\longrightarrow$.

It's good to use "unbdd" operator in this case...

Jednak podejście tego typu bywa często (/ niekiedy...?) niewygodne z punktu widzenia różnych zastosowań Analizy Funkcjonalnej w innych działach Analizy. Warto wiedzieć, że w takich sytuacjach bywa pomocne odwołanie się do wspominanego już tu kiedyś uogólnienia pojęcia operatora z $\mathcal{L}(X)$ – rozważa się wówczas tzw. operatory nieograniczone, które nie muszą mieć całego $X$ jako dziedziny i formułuje się dla nich rozmaite „namiastki" ciągłości.

Integration is much more convinient

Znacznie wygodniej jest z całkowaniem (bowiem – odpowiednio „zaczepionej" funkcji pierwotnej w mniej lub bardziej dosłownym sensie). Dla każdej z przestrzeni $X = C([a;b])$, For any space $L^p([a;b])$ $(p \in [1;+\infty],\ a,b$ – j.w.$)$ można zdefiniować we can define so called tzw. operator Volterry $V : X \longrightarrow X$ wzorem by formula

$$(Vf)(t) := \int_a^t f(s)\,ds\ , \quad t \in [a;b],\ f \in X \tag{7}$$

when gdy $X = C([a;b])$, a gdy and when $X = L^p([a;b])$, to then

$$V[f] := [\mathcal{V}f] \quad \text{dla for } f \in X, \tag{7'}$$

gdzie where $(\mathcal{V}f)(t) := \int_a^t f(s)\,ds\ ,\ t \in [a;b],\ f \in X.$

**Zadanie** Ex.

Sprawdzić, że w obu przypadkach ((7) i (7')) $V$ jest poprawnie określony i $V \in B(X)$ i obliczyć lub choć oszacować z góry $\|V\|$. *)

Check that in both cases (and) is properly defined and and compute or estimate from above

*) Warto posłużyć się Faktami ze strony OF-17 (dla $L^p, p < +\infty$) oraz ze strony OF-19 (dla $L^\infty$)

you can use the fact

*given by infinite matrix*

## ◇ Operatory zadane macierzami nieskończonymi

W przypadku macierzy kwadratowych $d \times d$ utożsamialiśmy ją z pewnym operatorem $A \in B(\mathbb{K}^d)$, przy czym w $\mathbb{K}^d = \ell(\{1,\dots,d\})$ mogliśmy rozważać jakąkolwiek normę.

Naturalne jest pytanie, czy coś podobnego jest możliwe dla nieskończonych macierzy kwadratowych. Zajmiemy się tu tylko
*we should study the simplest case when the matrix is infinite but*
niejako najprostszym przypadkiem, gdy rozważana macierz będzie
*in each row it has only finite non zero terms*
co prawda nieskończona, ale w każdym swym wierszu będzie miała
*We shall precise*
jedynie skończoną liczbę wyrazów niezerowych. Doprecyzujmy najpierw
*First, what we mean by ~~matrix~~ square matrix*
jednak, co będziemy tu rozumieli przez macierz kwadratową
*Let be a set*
(ew. „nieskończoną"). Niech $\Omega \neq \emptyset$ będzie pewnym zbiorem
*"indexes set" usually =*
– dla nas będzie to „zbiór indeksów" – najczęściej równy
*or but for our previous usual matrices d×d*
$\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{N}$, a w przypadku rozważanych właśnie macierzy $d \times d$
*simply The square matrix which in*
po prostu $\Omega = \{1,\dots,d\}$. Macierzą kwadratową o indeksach z $\Omega$
*is any function from in*
nazwiemy po prostu jakąkolwiek funkcję z $\Omega \times \Omega$ w $\mathbb{K}$.
Zgodnie z częstym zwyczajem każdą taką macierz będziemy
*We shall use both notations:*
oznaczać nie tylko „funkcyjnie" $a : \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ z wartościami
*and also*
w konkretnym $(s,t) \in \Omega \times \Omega$ jako $a(s,t)$, ale także w formie
*where*
$a =: (a_{st})_{s,t \in \Omega}$, gdzie $a(s,t) =: a_{st}$.
*so our assumption is*
Wspomniany właśnie warunek zerowania się tylko skończonej liczby wyrazów w każdym wierszu ma postać:

$$\forall_{s \in \Omega} \quad \#\{t \in \Omega : a_{st} \neq 0\} < +\infty \qquad (Z)$$

Assume a satisfies (2)

Niech więc $a$ będzie macierzą kwadratową spełniającą (2)

and denote for the appropriate ~~the set~~ finite set

i oznaczmy dla $s \in \Omega$ odpowiedni zbiór skończony jako $\Omega_s$

$$\Omega_s := \{ t \in \Omega : a_{st} \neq 0 \}.$$

Assumption allows to define the operator

Założenie (2) umożliwia poprawne zdefiniowanie operatora

called formal operator

$\mathcal{A} : \ell(\Omega) \longrightarrow \ell(\Omega)$, który nazwiemy <u>operatorem formalnym</u>

given by a by

<u>(wyznaczonym przez a)</u>: wzorem

$$(\mathcal{A}x)(s) := \sum_{t \in \Omega_s} a_{st} x(t), \tag{7}$$

analogically as in $\mathbb{K}^d$.

analogicznie jak to ma miejsce dla operatora w $\mathbb{K}^d$ wyznaczonego przez macierz kwadratową $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$. Oczywiście ($\longrightarrow$ △)

obviously

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\ell(\Omega))$. Można też, dla rozmaitych przestrzeni

For many n.s. such that we can

unormowanych $(X, \| \ \|)$ takich, że $X \underset{lin}{\subset} \ell(\Omega)$ sformułować

formulate extra assumption on a which garantee that X is

dodatkowe założenia o macierzy $a$, gwarantujące, że $X$ jest

invariant for it means

<u>przestrzenią niezmienniczą dla $\mathcal{A}$</u>, tzn.

$$\forall_{x \in X} \ \mathcal{A}x \in X \tag{8}$$

and that

oraz, że

$$A := \mathcal{A}|_X \tag{9}$$

is continuous from to i.e.

jest ciągły (z $X$ w $X$), tzn. $A \in B(X)$.

Zajmiemy się (na razie?...) tylko dwoma, bardzo szczególnymi przypadkami.

matrix

• <u>Macierz diagonalna</u> – to sytuacja, gdy macierz $a=\{a_{st}\}_{s,t\in\Omega}$ jest taka, że $\forall_{s\in\Omega}\ \Omega_s=\{s\}$, tzn. $\forall_{s,t\in\Omega}\ (t\neq s \Rightarrow a_{st}=0)$.

it is when ... i.e.

Then given in by assuming will

Wówczas $A$ zadany w $X$ przez (9) (pod warunkiem (8)) będzie

be just the multiplication operator! More strictly:

po prostu operatorem mnożenia! Ściślej:

where for

$$A = M_F, \quad \text{gdzie } F(s)=a_{ss} \text{ dla } s\in\Omega.$$

the necessary condition (8) and for could be found

– potrzebne do (8) oraz $\underbrace{\text{do tego, by } A\in B(X) \text{ warunki}}$ można zatem w zależności od konkretnego

on the choice of $X$ and $\|\ \|$ as for mult. operator

wyboru $X$ i $\|\ \|$ znaleźć wcześniej – gdy rozważaliśmy operatory mnożenia (str OF – 22 i 23).

matrix has sense only for some $\Omega$

• <u>Macierz „trójdiagonalna"</u> – to dotyczy <u>tylko</u> niektórych

as

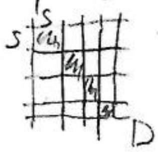
zbiorów $\Omega$, typu skończony lub nieskończony „przedział" w $\mathbb{Z}$ –

then we can speak not only about

– np. $\{1,\dots,d\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ itp. Wówczas możemy mówić

the diagonal consisting on for where

nie tylko o diagonali złożonej z $a_{s,t}$ dla $(s,t)\in D$, gdzie

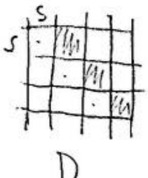


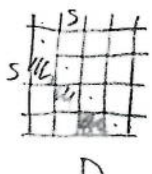
$$D := \{(s,t)\in\Omega\times\Omega : s=t\}$$

but also upper lower

ale także o <u>naddiagonali</u> $D_+$ i poddiagonali $D_-$:

$$D_{\underset{(-)}{+}} := \{(s,t)\in\Omega\times\Omega:\ t=s\underset{(-)}{+}1\}$$





A is iff

Macierz $a$ nazywamy <u>„trójdiagonalną"</u> wtw

$$\forall_{(s,t)\in\Omega\times\Omega\setminus(D\cup D_+\cup D_-)}\quad a_{st}=0.$$

We can also say that $a$ is given then by 3 "sequences"

Inaczej mówiąc $a$ jest wówczas wyznaczona przez trzy „ciągi":

– diagonalny $\alpha$, $\alpha:\Omega\to\mathbb{K}$, $\alpha(s)=a_{ss}$, $s\in\Omega$

upper

– naddiagonalny $\beta$, $\beta:\Omega_+\to\mathbb{K}$, $\beta(s)=a_{s(s+1)}$, $s\in\Omega_+:=\{s\in\Omega: s+1\in\Omega\}$

lower

– poddiagonalny $\gamma$, $\gamma:\Omega_-\to\mathbb{K}$, $\gamma(s)=a_{s(s-1)}$, $s\in\Omega_-:=\{s\in\Omega: s-1\in\Omega\}$.

Ex.

# Zadanie (→)

Prove for / or / and / being

Wykaż, że jeżeli $\Omega = \mathbb{N}$ lub $\mathbb{Z}$ oraz $X$ jest

one of / of / for

jedną z przestrzeni $\ell^p(\Omega)$ $p \in [1;+\infty]$ lub – dla $\mathbb{N}$ –

space / or / and / being bdd that then

przestrzenią $c$ albo $c_0$ oraz $\alpha, \beta, \gamma$ są ograniczone,

8 is satisfied. / and / is continuous

to (8) jest spełniony oraz $A$ zadany przez (9) jest ciągły.

Find an upper bound / for $\|A\|$ in terms of $\alpha, \beta, \gamma$

Oszacuj z góry $\|A\|$ w terminach $\alpha, \beta, \gamma$ przy pow. założeniach.

Na końcu tego przykładu dodajmy, że w szczególnym

when / or / and moreover

przypadku $X = \ell^2(\mathbb{N})$ lub $\ell^2(\mathbb{Z})$, gdy ponadto:

$$\forall_{s\in\Omega}\ \alpha(s) \in \mathbb{R}, \quad \forall_{s\in\Omega_-}\ \gamma(s) = \beta(s-1).$$

(odpowiada to formalnie „samosprzężonej" macierzy $a$, tzn. $\forall_{s,t\in\Omega}$ $\overline{a_{st}} = a_{ts}$),

then we call

to taki operator $A$ nazywany

Jacobi operator (or "matrix")

jest <u>operatorem (bądź „macierzą") Jacobiego</u> *)

And when / is constantly

Przy jeszcze jednym założeniu, że $\gamma$ jest stale równy 1,

we call / discrete

to $A$ nazywany jest też <u>dyskretnym operatorem</u>

with "potential" / and when

<u>Schrödingera (z „potencjałem" $\alpha$)</u>, a gdy jeszcze

it's so called / free / discrete

$\alpha \equiv 0$, to jest to tzw. <u>swobodny dyskretny operator</u>
<u>Schrödingera</u>.

---

*) Czasem dodatkowo zakłada się, że $\forall_{s\in\Omega_-}$ $\gamma(s) \neq 0$.

# ◊ Transformata Fouriera w $L^1(\mathbb{R}^d)$

We define first

Określimy najpierw przekształcenie $\hat{\ }: \tilde{L}^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$

by

wzorem

$$\hat f(t) := c(d)\int_{\mathbb{R}^d} e^{-its} f(s)\,ds, \quad t\in\mathbb{R}^d,\ f\in\tilde L^1, \qquad (10)$$

where ... and ... is a constant

gdzie $ts := \sum_{j=1}^{d} t_j s_j$, a $c(d)$ oznacza pewną liczbę dodatnią —

usually ... but sometimes

najczęściej przyjmowane bywa $c(d) := (2\pi)^{-d/2}$, niektórzy jednak wolą, by $c(d) := 1$ ... — gdy wybór ten będzie istotny, będziemy ustalać odpowiednią wartość.

Function ... is called

Funkcję $\hat f$ nazywa się <u>transformatą Fouriera</u> $f$, a samo $\hat{\ }$ — <u>transformatą Fouriera</u> (tu: „<u>w $\tilde L^1$</u>")

of ... and ... in

$e^{-its} f(s)$ is integrable

Oczywiście funkcja całkowana po prawej stronie (10) jest całkowalna,

because ... and ... thus ... is ... by ... properly

bo $f\in\tilde L^1$ i $|e^{-its}|=1$, zatem $\hat f$ jest przez (10) poprawnie

defined

określoną funkcją z $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.

Naszym celem jest zdefiniowanie pewnego operatora określonego

Our goal is to define an operator on $L^1(\mathbb{R}^d)$

na nieco innej przestrzeni — na $L^1(\mathbb{R}^d)$. Będzie on nazywany podobnie — transformata Fouriera w $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Zacznijmy od następującego znanego wyniku.

$\boxed{\text{Lemat}}$ („Riemanna – Lebesgue'a")

If ... then ... is continuous,

Jeżeli $f\in\tilde L^1(\mathbb{R}^d)$, to $\hat f$ jest ciągła, $\forall_{t\in\mathbb{R}^d}\ |\hat f(t)| \leqslant c(d)\,|||f|||_1$

and

oraz

$$\lim_{|t|\to+\infty} \hat f(t) = 0. \qquad (11)$$

Above $= |t_1| + .. + |t_d|$

Powyżej przez $|t|$ ~~oznaczamy normę euklidesową~~ $\cancel{t \in \mathbb{R}^d}$,

~~tzn~~ $\cancel{|t| := (t \cdot t)^{1/2}}$.

For the proof we need a fact.

Dla dowodu lematu potrzebny będzie nam pomocniczy fakt.

A cube in $\mathbb{R}^d$ is ... a subset of $\mathbb{R}^d$ of the form

**Kostką** w $\mathbb{R}^d$ nazywamy każdy podzbiór $\mathbb{R}^d$ postaci

$$Q = I_1 \times \ldots \times I_d$$

where ... is interval of finite length for ... similarly

gdzie $I_j$ jest przedziałem skończonej długości dla $j = 1, \ldots, d$. Podobnie

opened cube (and closed)

**kostka otwarta** (**domknięta**) to taki $Q$ postaci j.w., że

każdy z $I_j$ jest przedziałem otwartym (domkniętym) skończonej długości.

$\boxed{\text{Fakt}}$

For any ... and

Dla każdego $f \in \tilde{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1; +\infty)$, oraz $\varepsilon > 0$

$\exists$ ... is a cube ... such that

istnieje $g \in \operatorname{lin}\{\chi_Q : Q$ jest kostką w $\mathbb{R}^d$ (otwartą (domkniętą)) $\}$ taki, że

open (close)

$|||f - g|||_p < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Dowód}}$ (szkic) (in the exercices lesson).

To typowy dowód „teoriomiarowy" – najpierw „przybliżamy" (w sensie $|||\ |||_p$) funkcję $f$ funkcją prostą. Następnie funkcje charakterystyczne $\chi_\omega$ zbiorów mierzalnych $\omega \subset \mathbb{R}^d$ (miary skończonej) przybliżamy funkcjami charakterystycznymi zbiorów otwartych, a następnie te – kombinacjami liniowymi kostek ... – szczegóły całego dowodu: $\rightarrow$ $\triangle$. $\boxed{\text{VC}}$

Proof

**Dowód** (Lematu Riemanna – Lebesgue'a)

for we have

Pierwsza część jest prosta: dla $t \in \mathbb{R}^d$ mamy bowiem

$$|\hat{f}(t)| = c(d)\left|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-its} f(s)\,ds\right| \le c(d)\int_{\mathbb{R}^d} |e^{-its} f(s)|\,ds = c(d)\cdot |||f|||_1, \quad (12)$$

and continuity of is simple consequence of

a ciągłość funkcji $\hat{f}$ to prosta konsekwencja Tw. Lebesgue'a

dominated convergence

„O zbieżności majoryzowalnej" $(\longrightarrow \Delta)$.

To prove we choose for and

By wykazać (11) dobieramy do $\varepsilon > 0$ oraz $f \in \tilde{L}^1$

a function being of cubes, using the above

funkcję $g$, będącą liniową kombinacją kostek, z pomocą Faktu

to get

poprzedniego, tak, by $|||f - g|||_1 < \varepsilon/2$.

Using we have

Mamy dzięki (12)

$$|\hat{f}(t)| \le |\hat{f}(t) - \hat{g}(t)| + |\hat{g}(t)| \le |\widehat{(f-g)}(t)| + |\hat{g}(t)| \le |||f-g|||_1 + |\hat{g}(t)| <$$

$$< |\hat{g}(t)| + \varepsilon/2 \quad (13)$$

we also have where and some

Mamy też $g = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{Q_k}$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{K}$ i $Q_k$ – pewne

cubes and so by if

kostki oraz $\hat{g} = \sum_{k=1}^{m} c_k \hat{\chi}_{Q_k}$, zatem dzięki (13) jeżeli

we prove that for any in

wykażemy, że dla każdej kostki $Q$ w $\mathbb{R}^d$

$$\lim_{|t| \to +\infty} |\hat{\chi}_Q(t)| = 0, \quad (14)$$

we can finish the proof. Assume thus that

to dowód będzie zakończony. Załóżmy więc, że $Q = I_1 \times \ldots \times I_d$,

where interval with ends

gdzie $I_k$ – odcinek o końcach $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $a_k \le b_k$.

We have
Mamy
$$\hat{\chi}_Q(t) = c(d)\int_Q e^{-its}\,ds = c(d)\cdot\prod_{k=1}^{d}\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_ju}\,du, \qquad (15)$$

moreover
ponadto
$$\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_ju}\,du = \begin{cases} b_j - a_j & \text{when / gdy } t_j = 0 \\ \frac{i}{t_j}\left[e^{-ib_jt_j} - e^{-ia_jt_j}\right] & \text{when / gdy } t_j \neq 0 \end{cases},$$

thats
czyli
$$\left|\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_ju}\,du\right| \leq \begin{cases} 2C & \text{when / gdy } t_j = 0 \\ \frac{2}{|t_j|} & \text{when / gdy } t_j \neq 0 \end{cases}, \qquad (16)$$

when
gdzie $C := \max_{j=1,\dots,d}(|a_j| + |b_j|) + 1$. Let now again
Niech więc znów $\varepsilon > 0$

and let
i niech $M = 1 + \frac{c(d)(2C)^{d-1}\cdot 2d}{\varepsilon}$. Then, if
Wówczas, jeśli

then we can chose
$|t| > M$, to możemy wybrać $j_t \in \{1,\dots,d\}$ $|t_{j_t}| > \frac{M}{d}$

so from
zatem z (16)
$$\left|\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_ju}\,du\right| \leq \frac{2d}{M}.$$

But for we have
Jednak dla $j \neq j_t$ mamy $\left|\int_{a_j}^{b_j} e^{-it_ju}\,du\right| \leq |b_j - a_j| \leq 2C$

so from
zatem z (15)
$$\left|\hat{\chi}_Q(t)\right| \leq c(d)(2C)^{d-1}\cdot\frac{2d}{M} < \varepsilon,$$

which proves
co dowodzi (14).

Consider now a subset of

Rozważamy teraz podzbiór $C_0(\mathbb{R}^d)$ przestrzeni $C_b(\mathbb{R}^d)$:

continuous

$$C_0(\mathbb{R}^d) := \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} : f - \text{ciągła} \ \text{ i } \lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0 \}$$

this is linear subsp. which is

— jest to oczywiście podprzestrzeń liniowa, będziemy ją więc

a norm subspace of moreover

traktować jako podprzestrzeń unormowaną $C_b(\mathbb{R}^d)$, ponadto

is closed in so it's

oczywiście $C_0(\mathbb{R}^d)$ jest domknięta w $C_b(\mathbb{R}^d)$, zatem

a space. is

jest przestrzenią Banacha. Ponieważ oczywiście $\Lambda$ jest

linear, so by

przekształceniem liniowym, zatem w efekcie, na mocy

Lematu Riemanna-Lebesgue'a, $\Lambda \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d), C_0(\mathbb{R}^d))$

and is seminorm bdd' by

i $\Lambda$ jest półnormowo ograniczony przez $c(d)$

see And when

(patrz str. <u>OF-17</u>). Jednocześnie, gdy $f \in \tilde{X}_{0,1}$

see then a.e. on

(patrz str. <u>PB-36 i 37</u>), to $f = 0$ prawie wszędzie na $\mathbb{R}^d$,

so $\forall$ It allows us,

zatem $\hat{f}(t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}^d$. To pozwala

by the use of the construction from to define

nam na mocy konstrukcji ze stron <u>OF-16 i 17</u>, zdefiniować

linear map from

przekształcenie liniowe z $L^1(\mathbb{R}^d) = \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d) / \tilde{X}_{0,1}$:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d),$$

$$\mathcal{F}([f]) = \hat{f}, \quad f \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\mathbb{R}^d).$$

We call it in Using

Nazywamy je <u>transformatą Fouriera w $L^1(\mathbb{R}^d)$</u>. Dzięki Faktowi

we get

„O oper. ograniczonym z półnormowo ograniczonego" (<u>str. OF-17</u>) mamy:

**Fakt**

$\mathcal{F} \in B(L^1(\mathbb{R}^d), C_0(\mathbb{R}^d))$ and oraz $\|\mathcal{F}\| \leq c(d)$.