# I. Przestrzenie Banacha

To wstępny rozdział do Analizy Funkcjonalnej I poświęcony głównie przykładom najczęściej używanych przestrzeni unormowanych, opartych na pewnych przestrzeniach liniowych funkcji skalarnych (lub ich klas równoważności) z odpowiednio dobraną normą. Poza konkretnymi przykładami omówione są pewne ogólne konstrukcje. Istotna część rozdziału to dowody zupełności („banachowskości") tych przestrzeni — w tym też pewne ogólne metody dowodzenia takich wyników. Ponadto: normy równoważne, izometryczność, specyfika skończonego i nieskończonego wymiaru (zwartość / niezwartość kuli domkniętej), zbieżność szeregów, ośrodkowość.

Podrozdziały

## 0. Przypomnienie (kilku pojęć, oznaczeń, faktów dot. alg. liniowej, topologii metrycznej, normy) i zwartość/niezwartość kuli

### 0.1. Z algebry liniowej

W ramach Analizy Funkcjonalnej rozważa się jedynie przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $= \mathbb{C}$. Niech $X$ – taka przestrzeń liniowa.

**Podprzestrzeń, baza**

- przestrzeń rozpięta $\operatorname{lin} Y$: jeżeli $Y \subset X$, to

$$\operatorname{lin} Y := \left\{ x : \exists_{\substack{y_1,\dots,y_n \in Y \\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}}} \; x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \right\}$$

tzn. jest to wszystkich kombinacji liniowych wektorów z $Y$ *)

$\boxed{\text{Fakt}}$ $\operatorname{lin} Y$ jest najmniejszą (w sensie $\subset$) podprzestrzenią liniową przestrzeni $X$ spośród tych, które zawierają zbiór $Y$.

- $\tilde{X} \underset{lin}{\subset} X$ – tak oznaczamy, że $\tilde{X}$ jest podprzestrzenią liniową p. $X$.

- zbiór $Y$ (nie koniecznie skończony) jest liniowo niezależny wtw dla każdego skończonego ciągu $y_1, \dots y_n$, $n \geq 1$, elementów $Y$ i ciągu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ z $\mathbb{K}$ jeżeli $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j = 0$, to $\forall_{j=1,\dots,n} \; \lambda_j = 0$.

---

*) Gdy $Y$ – skończony, $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$, to zamiast $\operatorname{lin} Y$ używamy też ozn. $\operatorname{lin}(y_1, \dots, y_k)$. Zauważmy też, że suma oznaczająca komb. liniową jest skończona – inna w przestrzeni liniowej sensu nie ma (by mówić o sumach nieskończonych będziemy potrzebowali jakiegoś pojęcia zbieżności – po to m.in. będą normy...).

Inne oznaczenie na „lin" to span.

$\boxed{\text{PB}-2}$

- $Y$ jest **bazą** *) wtw $Y$ jest liniowo niezal. oraz $\mathrm{lin}\, Y = X$.

**Fakt** $Y$ jest bazą wtw jest (maksymalnym (w sensie $\subset$) **) układem liniowo niezależnym w $X$.

**Fakt** („Ocistnienie bazy")

Każda przestrzeń liniowa $X$ posiada bazę, co więcej każdy układ liniowo niezależny w $X$ zawiera się w pewnej bazie. Ponadto każde dwie bazy $X$ są równoliczne.

**Wymiar** $X$, to moc bazy $X$.

- **Przekształcenie (operator) liniowe (-wy)**. Jeżeli $X, Y$ przestrzenie liniowe nad $\mathbb{K}$, to funkcja (przekszt., oper.) $A: X \longrightarrow Y$ jest **liniowe** wtw.

(i) $\forall_{x,y \in X}\ A(x+y) = Ax + Ay$ ***)

(ii) $\forall_{\lambda \in \mathbb{K},\, x \in X}\ A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Symbol $\mathcal{L}(X,Y)$ oznacza zbiór wszystkich przekształceń liniowych z $X$ w $Y$. Stanowi on przestrzeń liniową nad $\mathbb{K}$ gdy określimy standardowo „punktowe" działania ($(A+B)(x) := A(x) + Bx$, $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$). $\mathrm{Ker}\, A := A^{-1}(\{0\})$, $\mathrm{Ran}\, A := A(X)$

---

***) zwyczajowo można ew. pomijać nawias dla funkcji liniowych, szczególnie oznaczanych dużymi literami tzn. np. $Ax := A(x)$.

*) i **) $\longrightarrow$ na str. następnej

◆ **Przestrzeń liniowa ilorazowa $X/Y$** gdy $Y \underset{lin}{\subset} X$, to zbiór $X/Y$ wszystkich klas abstrakcji $[x]$ relacji równoważności $\equiv$ w $X$ zdefiniowanej tak: $x \equiv y$ wtw $x - y \in Y$.
z działaniami: $[x]+[y] := [x+y]$, $\lambda \cdot [x] := [\lambda x]$, $0 := [0]$
(oczywiście te $+, \cdot, 0$ z lewych stron to „nowe" obiekty dla $X/Y$, inne niż te w $X$)

**Fakt** To rzeczywiście poprawne definicje i zadają w $X/Y$ przestrzeń liniową.

---

◆ **Ważny (dla nas przykład) „funkcyjnej" przestrzeni liniowej**

niech $\Omega$ – dowolny niepusty zbiór. Przez

$$\ell(\Omega)$$

będziemy oznaczać przestrzeń liniową wszystkich funkcji $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ (w razie potrzeby $\ell_{\mathbb{K}}(\Omega)$, gdy trzeba sprecyzować czy dla $\mathbb{C}$ czy dla $\mathbb{R}$) ze zwykłymi „punktowymi" działaniami na funkcjach (z z funkcją zerową jako zerem) – tzn. sam zbiór funkcji dla $\ell(\Omega)$ to $\mathbb{K}^{\Omega}$ wg. standardowej notacji teoriomnogościowej, a działania „najbardziej naturalne z możliwych"...

**Uwaga**: w szczególności „zwykła" przestrzeń liniowa $d$-wymiarowa $\mathbb{K}^d$ to $\ell(\{1, \ldots, d\})$

(ewent. z dokładnością do utożsamienia: $(x_1, \ldots x_n) \leftrightarrow x$, gdzie $x : \{1, \ldots, d\} \longrightarrow \mathbb{K}$ dana wzorem $x(j) = x_j$.)

---

dopiski ze str. poprzedniej

*) Inne nazwy: baza liniowa, baza Hamela — należy odróżniać (stanowczo) od baz Schaudera (tzw. topologicznych) lub baz ortonormalnych używanych w kontekście przestrzeni Banacha lub odpow. Hilberta. Bazy (te liniowe) mają dość niewielką przydatność dla p. Banacha, ale „jakąś" mają jednak...

**) Nie mylić z „największymi"...

# 0.2. Z topologii (głównie metrycznej)

◇ Wnętrze, domknięcie, kule, zbieżność

- $\mathrm{Int}\, Y$, $\overline{Y}$ – oznaczenia wnętrza, odpow. domknięcia podzbioru $Y \subset X$, gdzie $X$ przestrzeń topologiczna (w szczeg. gdy metryczna)

- $K(x_0, r)$ – kula „otwarta" o środku $x_0$ i promieniu $r$ *) w przestrzeni metrycznej $(X, \rho)$ tzn.

$$K(x_0,r) := \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\};$$

kulę „domkniętą" będziemy czasem oznaczać przez $\overline{K}(x_0,r)$ tzn.

$$\overline{K}(x_0,r) := \{x \in X : \rho(x,x_0) \leq r\}^{**)},$$

a sferę ozn. $S(x_0,r)$, tzn. $S(x_0,r) := \{x \in X : \rho(x,x_0) = r\}$.

- zbieżność (bez zaznaczania, że chodzi o zb. w sensie $\rho$) oznaczamy przez „$\longrightarrow$", tzn. dla ciągu $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ w $X$ i $x \in X$

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{wtw} \quad \rho(x_n, x) \longrightarrow 0$$

← a to zwykła zbieżność w $\mathbb{R}$...

Czasem dodajemy coś do „$\longrightarrow$", by wyjaśnić, że chodzi o zbieżność w sensie $\rho$ – np. oznaczamy ją „$\xrightarrow{\rho}$", albo „$\xrightarrow{\|\cdot\|}$", gdy chodzi o metrykę indukowaną przez $\|\cdot\|$ (– patrz str. 8), czasem też $\xrightarrow{X}$.

---

**) Ale uwaga! – oznaczenie to bywa niebezpieczne, bo w niektórych przestrzeniach metrycznych może się zdarzyć

$$\overline{K}(x_0,r) \neq \overline{K(x_0,r)}$$

(→ ). Szczególnie nie dla metryk zadanych przez normę w X-liniowej...

*) Niektórzy ozn. przez $B(x_0,r)$ – bardziej z ang. ....

## Zupełność

- $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ jest **ciągiem Cauchy'ego** wtw

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\geq n_0}\ \forall_{m,n\geq N}\ \rho(x_m,x_n)<\varepsilon$$

**Fakt** W przestrzeni metrycznej każdy ciąg zbieżny jest Cauchy'ego, a ciąg Cauchy'ego – ograniczony*).

- **Zupełność:** przestrzeń metryczna $(X,\rho)$ jest **zupełna** wtw dla każdego ciągu Cauchy'ego $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ w $X$ istnieje $x\in X$ t. że $x_n \longrightarrow x$.

(„O podciągowej zupełności")

**Fakt** √ Dla zupełności $X$ wystarcza, że każdy ciąg Cauchy'ego w $X$ posiada podciąg zbieżny w $X$ (tzn. do $x\in X$).

## Odległość od zbioru

- **odległość punktu $x$ od zbioru $Y$** $\subset X$, gdzie $(X,\rho)$ – przestrzeń metryczna, ($x\in X$) oznaczany przez $\mathrm{dist}(x,Y)$ i definiujemy:

$$\mathrm{dist}(x,Y) := \inf_{y\in Y} \rho(x,y).$$

**Fakt** $\mathrm{dist}(x,Y)=0$ wtw $x\in\overline{Y}$.

**Dowód** – znane z topologii lub → △ ... ∎

---

*) Ciąg **ograniczony**, tzn. zbiór wyrazów jest ograniczony, a $Y\subset X$ jest **ograniczony** wtw $\exists_{R\in\mathbb{R},\, x_0\in X}\ K(x_0,R)\supset Y$, o ile $X\neq\emptyset$... (równoważnie: $\forall_{x_0\in X}\ \exists_{R\in\mathbb{R}}\ Y\subset K(x_0,R)$ $\boxed{\text{PB}-6}$ dzięki „nierówności △").

## 0.3 O normach

### ◇ Półnorma, norma, metryka indukowana

- $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest **półnormą** w przestrzeni liniowej *) $X$ wtw

(ii) $\forall_{x \in X} \ \forall_{\lambda \in \mathbb{K}} \quad p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$

(iii) („nier $\Delta$") $\forall_{x,y \in X} \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Często dla półnormy używa się symbolu („w stylu") $|||\cdot|||$, a nawet niekiedy („nielegalnie") $\|\cdot\|$ jak dla normy.

- **norma**, to taka półnorma $p$, która jest **niezdegenerowana**, tzn.

(i) $\forall_{x \in X} \quad p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Dla normy najczęściej używa się symbolu w stylu $\|\cdot\|$.

---

*) Tu już widać, czemu $\mathbb{K}$ musi być $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$ – patrz warunek (ii) z modułem...

- metryka zadana (indukowana) przez normę

Gdy $\|\cdot\|$ norma w przestrzeni liniowej $X$, to metryką zadaną przez normę nazywamy $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$\rho(x,y) := \|x-y\| \quad , \; x,y \in X$$

$\boxed{\text{Fakt}}$ To rzeczywiście metryka w $X$.

## Przestrzeń i podprzestrzeń unormowana

- Przestrzeń unormowana to formalnie para $(X, \|\cdot\|)$, gdzie $X$ – przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lub $= \mathbb{R}$ (mówi się odpowiednio przestrzeń u. zespolona/rzeczywista).

W praktyce mówi się dla uproszczenia często o samym $X$ jako o przestrzeni unormowanej – ściślej wtedy, gdy

(a) wiadomo (nie ma wątpliwości) o jaki wybór normy $\| \ \|$ w danym $X$ chodzi,

(b) chodzi o sytuację „abstrakcyjną" (nie konkretny przykład) $X$ i w $X$ rozważamy jakąś jedną normę $\| \ \|$. Uwaga!

Gdy mówiąc o przestrzeni unormowanej używamy (bez osobnych innych zastrzeżeń) określeń topologicznych np. zbiór otwarty, domknięcie, gęstość i in. lub metrycznych – np. zbieżność, ciąg Cauchy'ego, odległość itp – zawsze chodzi o ich sens względem metryki indukowanej przez normę i topologii wyznaczonej przez tę metrykę.

- Podprzestrzeń przestrzeni unormowanej. Gdy $(X, \|\cdot\|)$ – przestrzeń unormowana oraz $\tilde{X} \subset_{\text{lin}} X$, to po obcięciu $\| \ \|$ z $X$ do $\tilde{X}$ uzyskamy też normę, ale w $\tilde{X}$.

Każdą uzyskaną tak przestrzeń unormowaną $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{|\tilde{X}})$ nazywamy podprzestrzenią (ew. z dodatkiem „unormowaną") $X$.

$\boxed{\text{PB} - 8}$

## ◇ Izometryczności

• **izometria** *) przestrzeni unormowanych $X$ i $Y$ (z $X$ na $Y$)**) to każde takie $\Phi \in \mathcal{L}(X,Y)$, że $\mathrm{Ran}\, X = Y$ oraz

$$\forall_{x \in X} \quad \|\Phi(x)\|_Y = \|x\|_X \quad , \text{ gdzie}$$

$\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ to normy „obowiązujące" w $X$, $Y$ odpowiednio.

Przestrzenie $X, Y$ nazywamy **izometrycznymi** ***) gdy istnieje pewna izometria $X$ na $Y$.

**Fakt** (O przenoszeniu normy) + **Definicja**

Jeśli $X, Y$ przestrzenie liniowe i $\|\,\|$ – norma w $Y$ oraz $\Phi : X \to Y$ liniowa bijekcja, to funkcja $\|\,\|_\Phi : X \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$\|x\|_\Phi := \|\Phi(x)\| \quad , \quad x \in X$$

jest normą w $X$ oraz $\Phi$ jest izometrią z $(X, \|\,\|_\Phi)$ na $(Y, \|\,\|)$. Normę $\|\,\|_\Phi$ nazwiemy **przeniesieniem przez $\Phi$ normy $\|\,\|$**.

**Dowód** To, że $\|\,\|_\Phi$ norma – łatwe → △, a izometryczność $\Phi$ jasna z def. izometrii. ▨

---

**) nad tym samym $\mathbb{K}$ oczywiście – na ogół milcząco zakładamy, że $\mathbb{K}$ ~~jest~~ to samo dla rozważanych w danym „problemie" przestrzeni.

***) Proszę nie mylić z „izomorficznymi" – o tym będzie nieco dalej.

*) niekiedy mówi się dłużej: „izometria liniowa", my będziemy skracać, choć wówczas powstaje kłopot z nazwą dla wszystkich (niekoniecznie liniowych) przekształceń zachowujących normę...

**Uwaga** („O zachowywaniu własności i obiektów" przez izometrię)

Jeżeli $\Phi$ jest izometrią z $X$ na $Y$,

to można powiedzieć nieco nieformalnie, że z punktu widzenia wszystkich takich własności przestrzeni, które dają się zdefiniować „w języku" operacji liniowych i normy, przestrzenie te są „identyczne". Tzn. $\Phi$ „zachowuje" wszystkie obiekty oraz własności definiowalne w tym języku.

Aby powyższe wyrazić ściśle i precyzyjnie trzeba by w odniesieniu do każdego takiego obiektu / takiej własności formułować odpowiedni fakt (twierdzenie) osobno. To byłoby jednak niezmiernie nudne nawet dla kilku tego typu przypadków... Więc zamiast tych kilku:

→ **Zadanie** Sformułować i dowieść to 100% ściśle dla „obiektu" w stylu" kula / sfera o środku $x$ i promieniu $r$ oraz dla własności topologicznej typu ośrodkowość przestrzeni lub nieco ambitniej - dla takiej własności przestrzeni: każdy punkt każdego odcinka o końcach na $S(0,1)$ jest jednym z tych końców lub leży poza $S(0,1)$. → (!)

## ◇ Równoważność norm

Niech $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ będą obie normami w przestrz. lin. $X$.

**Def.** Normy te są równoważne – oznaczamy to przez $\|\ \|_1 \equiv \|\ \|_2$ – wtw $\exists_{c, C \in \mathbb{R}_+} \forall_{x \in X} \; c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$. *)

Oczywiście $\equiv$ jest relacją równoważności (stąd jej nazwa jest „OK").

---

*) $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ (więc $0 \notin \mathbb{R}_+$)

PB - 10

**Fakt** Równoważne normy w $X$ wyznaczają tę samą zbieżność ciągów i tę samą topologię.

**Dowód** $\triangle$.

**Wniosek** Zmiana normy w $X$ na równoważną jej nie wpływa na kwestię ciągłości funkcji z $X$ ani w $X$.

**Twierdzenie** ("O równoważności norm")

Każde dwie normy w skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej są równoważne.

**Dowód** W przypadku gdy tą przestrzenią jest $\mathbb{K}^d$ (dla pewnego $d \in \mathbb{N}$) wynik ten jest znany z Analizy II. Przypadek ogólny łatwo (szczegóły $\longrightarrow \triangle$) sprowadzić do powyższego z pomocą Faktu O przenoszeniu normy (str. PB-9). ∎

## ◇ Zwartość / niezwartość kuli "domkniętej"

Warto przypomnieć o tym, że kluczowym elementem dowodu (tego z Analizy II) powyższego twierdzenia dla przypadku $\mathbb{K}^d$ był fakt, że kula $\overline{K}(0,1)$ (i stąd też sfera $S(0,1)$) przy wyborze np. euklidesowej normy jest zwarta. Co więcej zachodzi

**Twierdzenie** ("O zwartości kuli")

Gdy $X$ - unormowana i $\dim X < +\infty$, to $\overline{K}(0,1)$ i $S(0,1)$ są podzbiorami zwartymi, co więcej, każdy podzbiór ograniczony*) i domknięty jest zwarty**).

---

*) W przypadku podzbiorów przestrzeni unormowanej $Y$ jest ograniczony wtw $\exists_{R \in \mathbb{R}}\ Y \subset \overline{K}(0,R)$ - patrz przypis na str. PB-6.

**) A podzbiór przestrzeni topologicznej jest zwarty wtw jest zwartą przestrzenią topologiczną w sensie topologii podprzestrzeni.

**Uwaga** $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ jest funkcją Lipschitzowską, bo z nierówności trójkąta

$$\forall_{x,y\in X} \quad \big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x-y\|,$$

jest więc w szczególności funkcją ciągłą. $\overline{K}(0,1)$ i $S(0,1)$ są więc domknięte, jako przeciwobrazy zbiorów domkniętych $[0;1]$ i $\{1\}$, odpowiednio. Wystarczy więc wykazać to „co więcej"... ∎

**Dowód Tw.** **) Niech $F\subset X$, $F$ ograniczony i domknięty. Niech $\{v_1,\dots,v_d\}$ baza w $X$ i niech $\phi:\mathbb{K}^d\to X$ będzie izomorfizmem liniowym zadanym jednoznacznie przez warunki $\phi(e_j)=v_j$ *), $j=1,\dots,d$. Przenosimy normę $\|\ \|$ z $X$ do $\mathbb{K}^d$ przez $\phi$. Dzięki izometryczności $\phi$ (z Faktu „O przenoszeniu normy") $\phi$ jest homeomorfizmem z $\mathbb{K}^d$ z topologią $\mathcal{T}$ wyznaczoną przez $\|\ \|_\phi$ na $X$ (z topologią wyzn. przez $\|\ \|$). Wystarczy zatem wykazać, że $\phi^{-1}(F)$ jest zwartym podzb. $\mathbb{K}^d$ w sensie $\mathcal{T}$. Jednak (dzięki Tw. „O równoważności norm") norma euklidesowa $\|\ \|_2$ i $\|\ \|_\phi$ są równoważne i zatem $\mathcal{T}$ jest jednocześnie topologią wyznaczoną przez $\|\ \|_2$. Wystarczy zatem wykazać, że $\phi^{-1}(F)$ jest domknięty (w sensie $\mathcal{T}$) i ograniczony (w sensie $\|\ \|_2$). $F$ był domknięty, więc z powyżej wspomnianej homeomorficzności także $\phi^{-1}(F)$ jest domknięty – właśnie wzgl. $\mathcal{T}$. Z izometryczności $\phi$ jako z $\mathbb{K}^d$ z $\|\ \|_\phi$, $\phi^{-1}$ jest ograniczony w sensie $\|\ \|_\phi$, ale zatem też w sensie $\|\ \|_2$, dzięki równoważności $\|\ \|_\phi$ i $\|\ \|_2$.

∎

---

*) $e_1,\dots,e_d$ to kolejne wektory bazy standardowej w $\mathbb{K}^d$, tzn. $e_j=(0\dots \underset{j}{1}\dots 0)$.

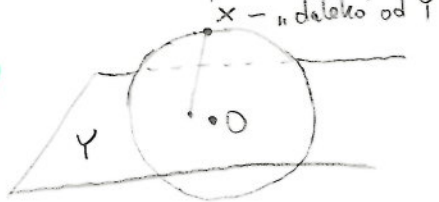
**) Podaję „na wzór" dość szczegółowo, choć to proste, ale dość typowy schemat.

Przypominam, że zwartość, którą się tu na chwilę zajęliśmy jest pojęciem wygodnym, czy raczej — własnością „pożądaną" często. Np. dlatego, że dla funkcji skalarnych ciągłych określonych na zbiorach (przestrzeniach) zwartych obowiązuje przydatne Twierdzenie Weierstrassa (O osiąganiu kresów). Jednak „w większości" ważnych dla nas w tej teorii przestrzeniach — gdy $\dim X = +\infty$ — tej zwartości mieć nie będziemy! Przekonamy się o tym wkrótce po poniższym lemacie, przydatnym nie tylko tu.

**Lemat** („Riesza")

Jeśli $X$ — przestrz. unormowana, $Y \underset{lin}{\subset} X$ i $X \neq Y = \overline{Y}$, to

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{x\in S(0,1)} \ 1 \geq \operatorname{dist}(x,Y) > 1-\varepsilon.$$




**Dowód**

Zauważmy najpierw, że dla każdego $x\in S(0,1)$ mamy

$$\operatorname{dist}(x,Y) = \inf_{y\in Y} \|x-y\| \leq \|x-0\| = \|x\| = 1,$$

wystarczy zatem zadbać o drugą nierówność. Dla $\varepsilon \geq 1$ — jasne (bo...). Ustalmy $\varepsilon\in(0;1)$ — skonstruujemy odpowiedni $x$. Niech więc $x_0$ — dowolnie wybrany wektor z $X\setminus Y$. Ponieważ $Y=\overline{Y}$ zatem (patrz Fakt „o dist" str. PB-6) mamy $\operatorname{dist}(x_0,Y) =: r_0 > 0$.

Wykażemy, że potrzebny $x$ może zostać wybrany w postaci

$$x_y := \frac{1}{\|x_0-y\|}(x_0-y), \qquad (1)$$

z pewnym $y\in Y$. Zauważmy, że po pierwsze, dla $y\in Y$

wektor $x_0 - y$ jest niezerowy, bo $x_0 \notin Y$, czyli określenie przez $t_y := \|x_0 - y\| > 0$ ma sens w (1), a ponadto automatycznie $x_y \in S(0,1)$. Mamy także

$$\forall_{y' \in Y} \quad \|x_y - y'\| = \frac{1}{t_y}\|x_0 - y - t_y y'\| =$$
$$= \frac{1}{t_y}\|x_0 - (y + t_y y')\| \geqslant \frac{\operatorname{dist}(x_0, Y)}{t_y} = \frac{r_0}{t_y},$$

ponieważ $y + t_y y' \in Y$.

A zatem wykazaliśmy, że

$$\operatorname{dist}(x_y, Y) = \inf_{y' \in Y} \|x_y - y'\| \geqslant \frac{r_0}{t_y} = \frac{r_0}{\|x_0 - y\|}$$

Wystarczy zatem udowodnić, że dla pewnego $y \in Y$ zachodzi

$$\frac{r_0}{\|x_0 - y\|} > 1 - \varepsilon, \text{ czyli równoważnie, że}$$

$$\|x_0 - y\| < \frac{r_0}{1-\varepsilon}.$$

Ale $\frac{r_0}{1-\varepsilon_0} > r_0 = \operatorname{dist}(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$, zatem z definicji „inf", takie $y$ musi istnieć (bo $\frac{r_0}{1-\varepsilon_0}$, jako większe od kresu dolnego, nie może być ograniczeniem dolnym $\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}$).

$\boxed{\text{Q}}$

Gdyby zamiast nierówności w Lemacie Riesza uzyskać $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$ (oczywiście wraz z $\|x\| = 1$) to byłoby to coś w rodzaju „prostopadłości" wektora $x$ do przestrzeni $Y$ zgodnie z naszymi geometrycznymi wyobrażeniami z przestrzeni euklidesowych

I choć nie w każdej przestrzeni unormowanej da się „sensownie" wprowadzić jakąś namiastkę pojęcia prostopadłości (znanego dobrze z przestrzeni z iloczynem skalarnym), to mimo tego, ze względu na dowolność $\varepsilon > 0$ w Lemacie Riesza, wygodnie wyobrażać sobie nieformalnie tezę tego lematu, jako możliwość wyboru niezerowego wektora „prawie prostopadłego" do $Y$.

Lemat Riesza wymaga domkniętości podprzestrzeni $Y$. Przyda nam się jeszcze zatem:

**Uwaga**

Skończenie wymiarowe podprzestrzenie liniowe w przestrzeni unormowanej są domknięte.

**Dowód**

Niech $X$ – unormowana, $Y \underset{lin}{\subset} X$, $\dim Y < +\infty$. Niech $x \in \overline{Y}$, zatem wybierzmy $\{y_n\}_{n\geq 1}$ w $Y$ taki, że $y_n \to x$. W szczególności $\{y_n\}_{n\geq 1}$ jest ciągiem ograniczonym w $X$, a zatem i w podprzestrzeni $Y$, tzn. dla pewnego $R \in \mathbb{R}_+$

$\forall_{n\geq 1}\ y_n \in \overline{K}_Y(0,R)$. Ponieważ w $Y$ kula $\overline{K}_Y(0,R)$ jest zwarta na mocy Tw. „O zwartości kuli" zatem istnieje $y \in Y$ oraz podciąg $\{y_n'\}_{n\geq 1}$ ciągu $\{y_n\}_{n\geq 1}$ taki, że w $Y$ $y_n' \to y$. Ale wówczas oczywiście także w $X$: $y_n' \to y$, a ponadto $y_n' \to x$, skoro mieliśmy $y_n \to x$. Stąd $y = x$, więc $x \in Y$. Stąd $\overline{Y} \subset Y$, czyli $Y$ – domknięta. ☐

Teraz już łatwo uzyskamy poniższy wynik:

**Twierdzenie** ("O niezwartości kuli")
Gdy $X$ - unormowana i $\dim X = +\infty$, to $\overline{K}(0,1)$ i $S(0,1)$ nie są zbiorami zwartymi.

**Dowód**
Domknięty podzbiór zbioru zwartego byłby zwarty a $S(0,1)$ jest domkniętym podzbiorem $\overline{K}(0,1)$, zatem wystarczy wykazać niezwartość $S(0,1)$. Skonstruujemy rekurencyjnie pewien ciąg elementów $S(0,1)$. Niech $x_1$ - dowolnie wybrany w $S(0,1)$ (istnieje, bo $X \neq \{0\}$ ...). Gdy dla $n \geq 1$ zdefiniowane są już $x_1, \dots, x_n \in S(0,1)$, to niech $x_{n+1}$ będzie wektorem dobranym za pomocą Lematu Riesza do $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i $Y = \mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$ — domkniętej na mocy niedawnej uwagi. Tak zdefiniowany rekurencyjnie ciąg $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ma więc wyrazy w $S(0,1)$ oraz

$$\forall_{n\geq 1} \quad \mathrm{dist}(x_{n+1}, \mathrm{lin}\{x_1, \dots x_n\}) \geq \frac{1}{2}.$$

W szczególności dla każdego $m, k \geq 1$, jeżeli $m \neq k$ to biorąc $n := \max(m,k) - 1 \geq 2 - 1 = 1$ oraz $j := \min(m,k)$ uzyskamy, więc

$$\|x_m - x_k\| = \|x_{n+1} - x_j\| \geq \mathrm{dist}(x_{n+1}, \mathrm{lin}\{x_1, \dots x_n\}) \overset{j \in \{1, \dots n\}}{\geq} \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Ten ciąg $\{x_n\}_{n\geq 1}$ nie może mieć zatem podciągu zbieżnego, bo zbieżny byłby Cauchy'ego, a to niemożliwe w związku z (2).

Z obu twierdzeń („O zwartości…” i „O niezwartości…”)
mamy więc

$\boxed{\text{Wniosek}}$

Kula domknięta $\overline{K}(0,1)$ (równoważnie – sfera $S(0,1)$) jest zwartym podzbiorem przestrzeni unormowanej $X$ wtw $\dim X < +\infty$.

# 1. Przykłady przestrzeni unormowanych, przestrzenie Banacha

## 1.1 Przestrzeń Banacha

Zasadnicza część teorii, której poświęcony jest cały nasz wykład AFI dotyczy przestrzeni Banacha – czas więc na definicję.

**Definicja**

Przestrzeń unormowana $(X, \| \|)$ jest **przestrzenią Banacha** *) wtw $X$ jest zupełna (w sensie metryki indukowanej przez normę).

W tym podrozdziale chcemy poznać sporo przykładów przestrzeni unormowanych i zbadać, które z nich są przestrzeniami Banacha. Nieco dalszych przykładów uzyskamy następnie, stosując np. pewne konstrukcje, które będą opisane w ostatnim podrozdziale.

Warto zwrócić uwagę na to, że główna część przykładów tu przedstawionych będzie w jakiś sposób dotyczyła przestrzeni liniowych $\ell(\Omega)$ (dla pewnych zbiorów $\Omega$) (funkcje skalarne na zbiorze $\Omega$) **). Od razu doprecyzujmy nieco „o jakich sposobach" mowa powyżej:

(sposób „P") ***) Przestrzenie $(X, \| \|)$, takie $X \underset{lin}{\subset} \ell(\Omega)$, a norma $\| \cdot \|$ jest tam (choć częściowo) związana ze sposobem „wyodrębnienia" $X$ z „całego" $\ell(\Omega)$.

---

*) W skrócie, jak zwykle, „przestrzeń $X$ jest ...".

**) Choć pojawią się po jakimś czasie także inne przykłady.

***) „P", bo „Podprzestrzeń"

(sposób „P+I") *)

Przestrzenie $(X, \| \ \|)$ takie, że $X = \tilde{X}/\tilde{X}_0$, gdzie $\tilde{X}_0 \underset{lin}{\subset} \tilde{X} \underset{lin}{\subset} \ell(\Omega)$, a norma $\| \ \|$ jest związana zarówno z wyodrębnieniem $\tilde{X}$ z $\ell(\Omega)$ jak i $\tilde{X}_0$ z $\tilde{X}$. W ramach tego ogólnego sposobu zobaczymy dwa „podsposoby" uzyskiwania przestrzeni unormowanych:

(P+Ip) – w $\tilde{X}$ zadana jest $\boxed{p}$ółnorma zerująca się dokładnie na $\tilde{X}_0$ i $\| \ \|$ w $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ uzyskana jest poprzez konstrukcję „norma z półnormy" (patrz nieco dalej w tym podrozdziale) – utożsamiamy pewne klasy wektorów, by mieć „prawdziwą" normę, a nie tylko półnormę...

(P+In) – w $\tilde{X}$ zadana jest „od razu" pewna $\boxed{n}$orma, ale jest ona w jakimś sensie „za dokładna" – rezygnujemy z pewnych szczegółów i utożsamiamy pewne klasy wektorów poprzez konstrukcję „normy ilorazowej" (patrz ostatni podrozdział).

Zacznijmy jednak od prostego spostrzeżenia. („O przestrzeni skończenie wymiarowej")

**Fakt** Każda przestrzeń unormowana skończenie wymiarowa jest p. Banacha.

**Dowód** Dzięki Faktowi „O podciągowej zupełności" (str. PB-6) dla danego ciągu Cauchy'ego $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ wystarczy by istniał podciąg zbieżny, ale $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ jest w szczególności ograniczony, więc ma wyrazy w pewnej kuli $\overline{K}(0,R)$ dla $R \in \mathbb{R}$, więc posiada podciąg zbieżny na mocy

---

*) „P+I" – „$\boxed{p}$odprzestrzeń", a następnie „przestrzeń $\boxed{i}$lorazowa".

Tw. „o zwartości kuli". $\boxed{\text{VIII}}$

$\boxed{\text{Przykład}}$ $\mathbb{K}^d$ z normą euklidesową jest p. Banacha (i podobnie $\mathbb{K}^d$ z innymi „znanymi" normami dla $\mathbb{K}^d$ — o nich dalej...), $d \in \mathbb{N}$.

Wobec powyższego faktu, sprawa „banachowskości" jest dla przestrzeni skończonego wymiaru załatwiona, o ile tylko mamy „rzeczywiście" normę. Główne więc wyzwanie w tym podrozdziale, to rozstrzyganie o zupełności przestrzeni unormowanych $X$ z $\dim X = +\infty$. Jednak w wielu sytuacjach jest nawet samo stwierdzenie, że mamy do czynienia z półnormą nie jest całkiem proste. Zaczniemy więc od dwóch podstawowych (typów) przykładów norm lub półnorm, a sprawę zupełności odłożymy „na deser" •

## 1.2. $\|\cdot\|_\infty$ w $\ell^\infty(\Omega)$

$\Omega$ niech będzie dowolnym niepustym zbiorem i rozważmy podprzestrzeń liniową $\ell^\infty(\Omega)$ przestrzeni $\ell(\Omega)$:

$$\ell^\infty(\Omega) := \{f \in \ell(\Omega) : f \text{ - ograniczona}\} \quad {}^{*)}$$

i dla $f \in \ell^\infty(\Omega)$ określmy:

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Inne często używane oznaczenia to $\ell_b(\Omega)$, $B(\Omega)$ i $\ell_\infty(\Omega)$, na $\ell^\infty(\Omega)$ oraz $\|\ \|_{sup}$ na $\|\ \|_\infty$ (także $\|\ \|_u$ od ang. „uniform" = jednostajny — patrz str. następna...)

---

*) Prosty fakt, że $\ell^\infty(\Omega)$ jest rzeczywiście podprzestrzenią liniową $\ell(\Omega)$ proszę sprawdzić samodzielnie ($\longrightarrow \triangle$).

**Fakt** $\|\cdot\|_\infty$ jest normą w $\ell^\infty(\Omega)$.

**Dowód** – to znane z Analizy I na ogół, na wszelki wypadek przypomnienie dowodu nierówności trójkąta:

- ponieważ „sup jest pewnym ograniczeniem górnym", zatem:

$$\forall_{s\in\Omega}\quad |f(s)+g(s)| \le |f(s)|+|g(s)| \le \sup_{t\in\Omega}|f(t)| + \sup_{t\in\Omega}|g(t)| = \|f\|_\infty+\|g\|_\infty$$

- więc ponieważ „sup jest najmniejszym górnym ograniczeniem", zatem

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{s\in\Omega}|f(s)+g(s)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Pozostałe „punkty" do sprawdzenia $\longrightarrow$ △. $\square$

Warto przypomnieć, że zbieżność w sensie $\|\ \|_\infty$ w $\ell^\infty(\Omega)$ to znana dobrze zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego, tzn. jeżeli $\{f_n\}_{n\ge n_0}$ jest ciągiem o wyrazach w $\ell^\infty(\Omega)$ oraz $f\in\ell^\infty(\Omega)$, to $f_n \xrightarrow[\|\ \|_\infty]{} f$ wtw $f_n \rightrightarrows f$. *) W szczególności z tej zbieżności wynika też „zwykła" zbieżność punktowa.

Biorąc rozmaite zbiory $\Omega$ otrzymujemy różne dość popularne przestrzenie unormowane.

---

*) Jednak uwaga: jest sens (i widzieliście to Państwo niejednokrotnie np. na Analizie I) mówić o zbieżności jednostajnej ciągu funkcji, bez zakładania zarówno ograniczoności poszczególnych wyrazów $f_n$ jak i samej $f$, mimo, że to może nie być zbieżność w $\|\ \|_\infty$ w $\ell^\infty(\Omega)$...

$\boxed{\text{Przykłady}}$ (Przestrzenie unormowane $(\ell^\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$)

- $\ell^\infty(\{1,\dots,d\}) = \mathbb{K}^d$ z normą $\|x\|_\infty := \max_{j=1,\dots,d} |x_j|$. *)
- $\ell^\infty(\mathbb{N})$, $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \ \left(= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|\right)$ **)

przestrz. $\ell^\infty(\mathbb{N})$ oznaczana bywa też przez $m$.

- $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ – podobnie.

## 1.3. Półnorma $|\!|\!| \ |\!|\!|_p$ w $\widetilde{L}^p(\Omega,\mu)$

Przypuśćmy, że $\mu$ jest miarą („dodatnią") w zbiorze $\Omega$, tzn.
(ściślej: „nieujemną")
$(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą $\mu : \mathfrak{M} \to [0; +\infty]$, $\mathfrak{M}$ – $\sigma$-ciało (pewne) podzbiorów $\Omega$.
I niech $p \in [1; +\infty)$. Rozważmy zbiór funkcji

$$\widetilde{L}^p(\Omega,\mu) := \left\{ f \in \mathcal{l}(\Omega) : f \text{ jest } \mathfrak{M}\text{-mierzalna i } \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

i dla $f \in \widetilde{L}^p(\Omega,\mu)$ określmy $|\!|\!| \ |\!|\!|_p : \widetilde{L}^p(\Omega,\mu) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$|\!|\!| f |\!|\!|_p := \left( \int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Czasami symbol $\widetilde{L}^p(\Omega,\mu)$ skrócimy do samego $\widetilde{L}^p$, gdy wiadomo o jakie $\Omega$ i $\mu$ chodzi, ewentualnie tylko do $\widetilde{L}^p(\Omega)$ …

---

*) Jak już było wspomniane stosujemy dla takich funkcji $x : \{1,\dots,d\} \to \mathbb{K}$ zapis $x(j) = x_j$.

**) I analogicznie dla ciągów nieskończonych – dopuszczamy zapis $n$-tego wyrazu zarówno jako $x(n)$ jak i $x_n$.
Ciąg $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (skalarny) to po prostu $x : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. ← „funkcyjny" ← „ciągowy"

**Fakt** $\widetilde{\mathcal{L}}^p(\Omega,\mu) \underset{lin}{\subset} \ell(\Omega)$ oraz $|||\ |||_p$ jest półnormą.

**Dowód** Zamkniętość $\widetilde{\mathcal{L}}^p$ względem mnożenia przez $\lambda \in \mathbb{K}$ oraz warunek $|||\lambda f|||_p = |\lambda|\, |||f|||_p$ są proste ($\to \Delta$).
Znacznie trudniejsza jest zamkniętość $\widetilde{\mathcal{L}}^p$ względem dodawania i nierówność trójkąta dla $|||\ |||_p$ — uzyskamy ją jednak bezpośrednio z (pomiżnej) ważnej „analityczno-teoriomiarowej" nierówności ($\to \Delta$)

**Fakt** („Nierówność Minkowskiego")
Jeżeli $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ są $\mathfrak{M}$-mierzalne, to

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p\, d\mu\right)^{1/p}. \qquad (M)$$

Dla $p=1$ wynika to natychmiast ze zwykłej nierówności trójkąta dla $|\ |$.
Aby wykazać ten fakt (dla $p>1$), posłużymy się innym ważnym wynikiem.

**Fakt** („Nierówność Höldera")
Jeżeli $p \in (1;+\infty)$ oraz $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ *) oraz $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ są $\mathfrak{M}$-mierzalne, **)
to

$$\int_\Omega |f \cdot g|\, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_\Omega |g|^q\, d\mu\right)^{1/q}. \qquad (H)$$

---

*) Tzn. — równoważnie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
**) ewentualne „$0 \cdot \infty$" po prawej oznacza tu $0$.

Dowód tego z kolei faktu oparty będzie na następującym, już nieco bardziej elementarnym lemacie (Analiza I ...)

$\boxed{\text{Lemat}}$

Jeżeli $p, q$ jak wyżej oraz $x, y \geq 0$, to
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

$\boxed{\text{Dowód}} \mapsto \triangle$.

$\boxed{\text{Dowód}}$ „Nier. Höldera": zastosujmy dla każdego $t \in \Omega$ powyższy lemat do $x := \frac{|f(t)|}{|||f|||_p}$, $y := \frac{|g(t)|}{|||g|||_q}$, przy dodatkowym założeniu:

(Z) obie całki z prawej strony (H) są skończone i niezerowe (w szczególności $x, y$ są poprawnie zdefiniowane*)).

Uzyskujemy:
$$\forall_{t \in \Omega} \quad \frac{1}{|||f|||_p \, |||g|||_q} \cdot |f(t) \cdot g(t)| \leq \frac{|f(t)|^p}{p \cdot |||f|||_p^p} + \frac{|g(t)|^q}{q \cdot |||g|||_q}$$
i po obustronnym całkowaniu mamy:
$$\frac{1}{|||f|||_p \, |||g|||_q} \cdot \int_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1,$$ skąd (H).

---

*) Mamy m.in. $q \in (1; +\infty)$.

Jeśli natomiast dodatkowe założenie (Z) nie jest spełnione, łatwo już sprawdzić ( $\longrightarrow$ △ ), że (H) zachodzi, gdyż po obu stronach na raz są $0$ lub $+\infty$. ∎

**Dowód** „Nier. Minkowskiego" przy $p>1$:

Dobieramy $q$ do $p$ jak w nier. Höldera. Mamy:

$$\int_\Omega |f+g|^p d\mu = \int_\Omega |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} d\mu \leq \int_\Omega |f|\cdot|f+g|^{p-1} + \int_\Omega |g|\cdot|f+g|^{p-1}.$$

Teraz w obu całkach z prawej strony użyjemy nier. Höldera użytej odpowiednio do pary funkcji $|f|$, $|f+g|^{p-1}$ i $|g|$, $|f+g|^{p-1}$. Uzyskamy więc:

$$\int_\Omega |f+g|^p d\mu \leq \left[\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\cdot\left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q}. \quad (M')$$

Jednak z $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ mamy $pq=p+q$, skąd $p = pq-q = (p-1)q$. W efekcie drugi czynnik po prawej stronie $(M')$ to $\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{(1-\frac{1}{p})}$, zatem gdy $\int_\Omega |f+g|^p \neq 0$, to dzieląc przez ten czynnik otrzymamy (M), a w przeciwnym razie (M) jest oczywista. ∎

Skomentujmy jeszcze użyte tu oznaczenie $\widetilde{\mathbb{L}}^p(\Omega,\mu)$. Na ogół*) falka „~" nad $\mathbb{L}^p$ jest pomijana po prostu. Jednak tu, dla większej precyzji / jasności, będziemy ją stosować, by odróżnić przestrzeń liniową funkcji $\widetilde{\mathbb{L}}^p(\Omega,\mu)$ od przestrzeni klas funkcji $\mathbb{L}^p(\Omega,\mu)$, którą wkrótce skonstruujemy. Jeśli zrezygnować z owej „~" powstanie oznaczenie dwuznaczne – nieco mylące, ale bardzo powszechnie akceptowane przez „matematyczną społeczność". W celach „dydaktycznych" my przez czas jakiś (przynajmniej) pozostaniemy przy wyraźnym odróżnianiu $\widetilde{\mathbb{L}}^p$ od $\mathbb{L}^p$. **)

## 1.4. Norma $\|\ \|_p$ w niektórych $\widetilde{\mathbb{L}}^p(\Omega,\mu)$ i „małe" $\ell^p$

Ważniejsze jednak od tych kwestii notacyjnych jest to, że $|||\ |||_p$ w pewnych ważnych przypadkach okazuje się być nie tylko półnormą, ale nawet normą!

**Definicja** (do użytku „lokalnego"...) Miara $\mu$ jest małozerowa wtw $\emptyset$ jest jedynym podzbiorem $\mathfrak{M}$ mierzalnym w $\Omega$ miary $\mu$ zerowej. $\left(\forall_{\omega\in\mathfrak{M}}\ \mu(\omega)=0 \Rightarrow \omega=\emptyset\right)$.

**Fakt** („O normie $\|\ \|_p$")

$|||\ |||_p$ jest normą wtw $\mu$ jest małozerowa.

**Uwaga** (notacyjna) w sytuacji j.w. będziemy oznaczać $\|\ \|_p := |||\ |||_p$.

---

*) W wielu podręcznikach, pracach itp.

**) Także symbol $|||\ |||_p$ często zastępowany jest przez $\|\ \|_p$, mimo że może normą nie być.

**Dowód** To bezpośrednio wynika z twierdzenia mówiącego, że całka z funkcji f mierzalnej nieujemnej jest zerowa wtw $f = 0$ $\mu$-prawie wszędzie – to powinno być znane twierdzenie z teorii miary i całki... $\boxed{\Xi}$

Wskazówką do dowodu przypomnianego (pow. twierdzenia z t. m. i c.) może być m. in. inny fakt – przypomnienie z teorii miary (choć można i całkiem inaczej), który zapewne nie raz przyda nam się jeszcze w przyszłości.

**Fakt** („O aproksymacji funkcjami prostymi")

(a) Każda funkcja mierzalna nieujemna f jest granicą punktową pewnego ciągu rosnącego*) funkcji prostych**) nieujemnych $\{f_n\}_{n\geq 1}$.

(b) Gdy f z (a) jest ponadto ograniczona (tzn. należy do $\ell^\infty(\Omega)$), to ciąg $\{f_n\}$ z tezy (a) można wybrać tak, by $f_n \xrightarrow[\|\ \|_\infty]{} f$.

(c) Jeżeli f jest mierzalną funkcją z $\ell^\infty(\Omega)$, to f jest granicą w $\ell^\infty(\Omega)$ (czyli w $\|\ \|_\infty$, jak wyżej) pewnego ciągu funkcji prostych.

W związku z Faktem „O normie $\|\ \|_p$" uzyskujemy sporo nowych (ale i często znanych...) przykładów przestrzeni unormowanych, gdy rozważymy różne miary matorzerowe. Najprostsze z nich to tzw. miary liczące, lub (ogólniej) miary liczące z wagą dodatnią.

---

*) Używam „rosnący" (zamiast „niemalejący" – często spotykany) dla ciągu $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ wtw $\forall_{n\geq n_0}$ $a_{n+1} \geq a_n$. Dla ostrych „>" nierówności – „ściśle rosnący" i podobnie przy malejącym.

**) Tu proste to funkcje mierzalne, liczbowe (w $\mathbb{C}$) o skończonym zbiorze wartości (ogólnie nie muszą być $\geq 0$)

Przypomnijmy:

**miara licząca w $\Omega$** to miara $\# : 2^{\Omega} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ zadana wzorem

$$\#(\omega) = \begin{cases} \text{liczba elementów } \omega, \text{ gdy } \omega - \text{skończony} \\ +\infty, \text{ gdy } \omega - \text{nieskończony} \end{cases} \quad \text{dla } \omega \subset \Omega$$

**miara licząca z wagą w**

Niech $w : \Omega \longrightarrow [0; +\infty)$. Miara licząca z wagą $w$ to ((zwana też „miarą # z gęstością $w$")) po prostu miara $w\,d\#$ (tzn. taka miara $\mu$ określona na $\sigma$-ciele $2^{\Omega}$, że

$$\mu(\omega) = \int_{\omega} w\,d\# = \sum_{t \in \omega} w(t). \quad {*)}$$

Oczywiście $w\,d\#$ jest maiorowana, gdy $(\forall t \in \Omega)\ w > 0$.
W szczególności, gdy $w \equiv 1$ to uzyskamy po prostu $\#$.

Ogólnie tak uzyskane dla danego $p \in [0, +\infty)$ oraz miary liczącej $\mu = w\,d\#$ w $\Omega$ z wagą dodatnią $w$ przestrzenie $\widetilde{L}^p(\Omega, \mu)$ z normą „$p$-tą dla $\mu$" będziemy oznaczać przez $\ell^p_w(\Omega)$ a normy w nich $\| \ \|_{p,w}$ przy czym dla $w \equiv 1$ uprościmy to do $\ell^p(\Omega)$ i $\| \ \|_p$.

Szczególnie ważne ((/popularne)) przykłady to przestrzenie „ciągów" (skończonych lub nieskończonych albo nawet „dwustronnie nieskończonych")

---

*) W sensie sumowania funkcji $\geq 0$ „po dowolnych" (też nieskończonych, nawet nieprzeliczalnych ...) zbiorach indeksów, tzn. $\sum_{t \in A} f(t) := \sup\{ \sum_{t \in A'} f(t) : A' - \text{skończony podzbiór } A \}$ dla $f : A \longrightarrow [0; +\infty)$.
Ten wzór na całkę względem $\#$ powinien być znany z teorii miary...

## Przykłady ($\ell^p$, $\ell^p_w$ – „małe l-p")

- $\ell^p_w(\{1,\dots,d\})$, $\ell^p(\{1,\dots,d\})$

to po prostu $\mathbb{K}^d$ z normą $\|\ \|_{p,w}$ lub odpowiednio $\|\ \|_p$ (dla $w\equiv 1$), gdzie

$$\|x\|_{p,w} := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \cdot w_j\right)^{1/p}, \quad x\in\mathbb{K}^d$$

– w szczególności dla $p=2$, $w_j=1$ otrzymamy $\|\ \|_2$ – euklidesową.

- $\ell^p_w(\mathbb{N})$, $\ell^p(\mathbb{N})$ – czasem skracane do samych $\ell^p_w$, $\ell^p$

to przestrzenie ciągów skalarnych:

$$\ell^p_w(\mathbb{N}) := \left\{x:\mathbb{N}\to\mathbb{K} : \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p w_n < +\infty\right\}$$

z $\|x\|_{p,w} := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p w_n\right)^{1/p}$, $x\in\ell^p_w(\mathbb{N})$.

Oczywiście $\mathbb{N}$ można zastąpić przez dowolne $\mathbb{N}_{n_0} := \{n\in\mathbb{Z} : n\geq n_0\}$.

- $\ell^p_w(\mathbb{Z})$, $\ell^p(\mathbb{Z})$ – analogicznie (tylko $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ dwustronnie...).

Pojawia się jednak naturalne pytanie, po co zajmowaliśmy się w ogóle tymi przestrzeniami mierzalnymi $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$, gdzie $\mu$ nie była matozerowa. Jak już trochę było zapowiadane – dla nich też uzyskamy pewne przestrzenie unormowane. Jednak będzie trzeba nieco zmienić $\widetilde{L}^p(\Omega,\mu)$ i $|||\ |||_p$ tak, by uzyskać odpowiednio $L^p(\Omega,\mu)$ z normą $\|\ \|_p$. Opiszemy ten proces przy pomocy pewnej ogólnej konstrukcji „normy z półnormy" właściwie.

# 1.5 Dwie konstrukcje i „banachowskość"

## Podprzestrzenie

Zacznijmy od jednej prostej, bardzo „podstawowej" i częściowo już znanej konstrukcji. — podprzestrzeni unormowanej

Przypomnijmy (str. PB-8), że dla $(X, \| \|)$ - unormowanej i $Y \underset{lin}{\subset} X$ $(Y, \| \|_{|Y})$ to podprzestrzeń unormowana przestrzeni $(X, \| \|)$. Naturalne jest pytanie, kiedy przy przejściu od przestrzeni $X$ do podprzestrzeni $Y$ „dziedziczy się" banachowskość. Odpowiedź jest prosta.

**Fakt** („O podprzestrzeni Banacha")
Podprzestrzeń unormowana $(Y, \| \|_{|Y})$ przestrzeni Banacha $(X, \| \|)$ jest przestrzenią Banacha wtw $Y$ jest domkniętą podprzestrzenią (liniową) $X$.

**Dowód**

„$\Leftarrow$" Załóżmy, że $\overline{Y} = Y$. Niech $\{x_n\}_{n\geq 1}$ - ciąg Cauchy'ego w $Y$. Ponieważ $X$ - zupełna, zatem $x_n \xrightarrow[\| \|]{} x$ dla pewnego $x \in X$, ale $x \in Y$ skoro $Y$ - domknięta. Stąd $x_n \xrightarrow[\| \|_{|Y}]{} x$, czyli $\{x_n\}_{n\geq 1}$ zbieżny w $(Y, \| \|_{|Y})$.

„$\Rightarrow$" jeszcze łatwiej ($\to \triangle$). $\boxed{\text{Ł}}$

**Uwaga 1:** Ten fakt stanie się użyteczny, gdy poznamy nieco więcej przestrzeni Banacha *).

**Uwaga 2:** w praktyce dość często pomija się „$|Y$" i normę „obciętą" do $Y$ oznacza się tym samym symbolem co $\| \|$ w $X$.
My też tak będziemy zazwyczaj robić...

*) Które można będzie „wstawić" jako $X$.

## Przykłady (przestrzeni – podprzestrzeni unormowanych)

- $C_b(\Omega) := \{ f \in \ell^\infty(\Omega) : f \text{ – ciągła} \}$, gdy $\Omega$ jest wyposażona w pewną topologię $\mathcal{T}$. Np. $C_b(\mathbb{R})$ ($\mathcal{T}$ – „zwykła" topologia w $\mathbb{R}$). Gdy mamy wyraźnie zaznaczyć o jaką chodzi topologię, można to oznaczenie doprecyzować do $C_b(\Omega, \mathcal{T})$. Gdy $\Omega = K$ – przestrzeń topologiczna zwarta, to ograniczoność jest konsekwencją ciągłości i oznaczamy

$$C(K) := C_b(K).$$

W szczególnym przypadku topologii dyskretnej $\mathcal{T}$ w $\Omega$ mamy

$$C_b(\Omega, \mathcal{T}) = \ell^\infty(\Omega).$$

Wymienione wyżej przestrzenie traktujemy jako podprzestrzenie unormowane przestrzeni $(\ell^\infty(\Omega), \| \ \|_\infty)$ (jeśli nie sprecyzujemy innego wyboru normy)

- $c, c_0$ – tak oznaczamy podprzestrzenie unormowane przestrzeni $\ell^\infty(\mathbb{N})$ t. że

$$c := \{ x \in \ell(\mathbb{N}) : x \text{ – zbieżny} \},$$

$$c_0 := \{ x \in \ell(\mathbb{N}) : x_n \longrightarrow 0 \}.$$

- $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, gdzie $\mathfrak{M}$ – pewne $\sigma$-ciało podzbiorów $\Omega$ – tak oznaczamy podprzestrz. unormowaną w $\ell^\infty(\Omega)$ t. że

$$\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M}) := \{ f \in \ell^\infty(\Omega) : f \text{ jest } \mathfrak{M}\text{-mierzalna} \}$$

– gdy wybór $\mathfrak{M}$ jest w jakimś sensie standardowy, to $\mathfrak{M}$ bywa w pow. oznaczeniu pomijane.

• $\ell_{fin}(\Omega)$ – tak oznaczamy na ogół jedynie samą podprzestrzeń liniową w $\ell(\Omega)$ złożoną z funkcji „zerowych poza zbiorem skończonym" tzn.

$$\ell_{fin}(\Omega) := \{ f \in \ell(\Omega) : \exists_{\substack{\Omega' \subset \Omega \\ \Omega' - \text{skończony}}} \forall_{t \in \Omega \setminus \Omega'} f(t) = 0 \}.$$

To podprzestrzeń liniowa wielu „znanych" przestrzeni unormowanych – np. $\ell^\infty(\Omega)$, a ogólniej $\ell^p_w(\Omega)$. Gdy chcemy traktować $\ell_{fin}(\Omega)$ jako odpowiednią podprzestrzeń unormowaną, najlepiej „dopisać" potrzebną normę – np.

$(\ell_{fin}(\Omega), \| \ \|_\infty)$, $(\ell_{fin}(\Omega), \| \ \|_{p,w})$ •

## ◇ Przestrzeń unormowana z półnormy i przestrzenie $L^p$ – „Duże"

Druga konstrukcja, to zapowiadana jest „norma z półnormy".
Zanim ją opiszemy zdefiniujemy odpowiedniki pojęć: zbieżności, granicy, ciągu Cauchy'ego, zupełności dla przestrzeni liniowej z zadaną półnormą. Dzięki nim zgrabniej sformułujemy wyniki związane z tą konstrukcją.

Podkreślam, gdy $(\tilde{X}, |||\ |||)$ jest przestrzenią liniową z półnormą, która nie jest normą, to $\rho : \tilde{X} \times \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadane wzorem $\rho(x,y) := |||x-y|||$ **nie** jest metryką!

Dla tego m.in., by nie sugerować zbyt wiele, nazwy wprowadzanych tu pojęć mają przedrostek „**pół-**". W $(\tilde{X}, |||\ |||)$:

- ciąg $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ w $\tilde{X}$ jest **pół-zbieżny**$^{**)}$ do **pół-granicy**$^{*)}$ $x \in \tilde{X}$ wtw $|||x_n - x||| \longrightarrow 0$;
- ciąg j.w. jest **pół-Cauchy'ego** wtw $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N \geq n_0} \forall_{m,n \geq N} |||x_n - x_m||| < \varepsilon$.

Przestrzeń z półnormą $(\tilde{X}, |||\ |||)$ nazywamy **pół-zupełną** wtw każdy ciąg pół-Cauchy'ego w $(\tilde{X}, |||\ |||)$ jest pół-zbieżny do pewnej pół-granicy w $\tilde{X}$.

---

$*)$ półgranica może nie być jednoznacznie wyznaczona...

$**)$ „samo" ciąg jest pół-zbieżny oznacza, (oczywiście) że istnieje $x \in X$ t.że ciąg ten jest do $x$ pół-zbieżny.

łatwo uzyskać podobne wyniki do tych znanych z przestrzeni unormowanych (ogólniej – metrycznych)

**Fakt** Każdy ciąg pół-zbieżny jest pół-Cauchy'ego. *)
( $\to \triangle$ )

**Fakt** ("O podciągowej pół-zupełności")
Dla pół-zupełności $(\tilde{X}, |||\ |||)$ wystarcza, by każdy ciąg pół-Cauchy'ego posiadał podciąg pół-zbieżny.
(<u>Dowód</u> $\to \triangle$ )

Możemy wreszcie przejść do samej konstrukcji.
Dla półnormy $|||\ |||$ w $\tilde{X}$ zdefiniujmy:

$$\tilde{X}_0 := \{x \in \tilde{X} : |||x||| = 0\}.$$

Oczywiście $\tilde{X}_0 \underset{lin}{\subset} \tilde{X}$ ( $\to \triangle$ ). Rozważmy zatem przestrzeń liniową ilorazową $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ i próbujmy określić

$$\|\ \| : \tilde{X}/\tilde{X}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{wzorem}$$

(N-P)

$$\|[x]\| := |||x|||, \quad x \in \tilde{X}.$$

Zauważmy, że to poprawna definicja, bo gdy $[x]=[x']$ w $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ tzn. $x = x' + x_0$ dla pewnego $x_0 \in \tilde{X}_0$, to otrzymamy (z definicji półnormy)

*) A gdyby dodać jeszcze definicję "pół-ograniczoności" ( $\to \triangle$ - jaką? ), to moglibyśmy dodać tu, że c. pół-Cauchy-ego są pół-ograniczone ... ( $\to \triangle$ ).

$$|||x'||| = |||x'||| - |||x_0||| \leq |||x'+x_0||| \leq |||x'||| + |||x_0||| = |||x'|||,$$

czyli $|||x||| = |||x'|||$.

Tak uzyskane $\|\ \|$ w $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ nazwiemy normą z półnormy $|||\ |||$, która to nazwa jest zasadna dzięki poniższemu wynikowi.

**Fakt** („O normie z półnormy")

Funkcja $\|\ \|$ zdefiniowana przez (N-P) (str. PB-34) jest normą w $\tilde{X}/\tilde{X}_0$. Co więcej $(\tilde{X}/\tilde{X}_0, \|\ \|)$ jest przestrzenią Banacha wtw $(\tilde{X}, |||\ |||)$ jest pół-zupełna.

**Dowód**

To, że $\|\ \|$ jest normą wynika natychmiast*) z (N-P) oraz z definicji działań i zera dla $\tilde{X}/\tilde{X}_0$ (patrz str. PB-4).

Jeśli $y_n = [x_n]$ i $\{y_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(\tilde{X}/\tilde{X}_0, \|\ \|)$, to dzięki temu że $[x_n]-[x_m] = [x_n - x_m]$ oraz dzięki (N-P) ciąg $\{x_n\}$ jest pół-Cauchy'ego w $(\tilde{X}, |||\ |||)$ – jeśli jest ona pół-zupełna to $\{x_n\}$ jest pół-zbieżny do pewnego $x \in \tilde{X}$ tzn.

$\|[x_n]-[x]\| = |||x_n - x||| \to 0$, czyli $\{y_n\}$ zbieżny do $[x]$ w $(\tilde{X}/\tilde{X}_0, \|\ \|)$. To dowodzi „$\Leftarrow$" w drugiej części faktu.

---

*) Ale $\longrightarrow$ ⚠ ... – zachęcam.

Dowód „$\Rightarrow$" jest niemal identyczny ($\longrightarrow \Delta$).

Tym sposobem zdefiniujemy ogólną przestrzeń unormowaną $\left(L^p(\Omega,\mu), \|\ \|_p\right)$ dla miary $\mu$ w $\Omega$ i $p\in[1;+\infty)$:

- $L^p(\Omega,\mu) := \widetilde{L}^p(\Omega,\mu)/\widetilde{X}_{0,p}$, gdzie

$$\widetilde{X}_{0,p} := \{f\in \widetilde{L}^p(\Omega,\mu) : |||f|||_p = 0\};$$

- $\|\ \|_p$ to norma z półnormy $|||\ |||_p$.
- Podobnie jak z $\widetilde{L}^p$ niekiedy będziemy skracać symbol $L^p(\Omega,\mu)$ do $L^p(\Omega)$ lub nawet $L^p$.

**Uwaga 1**

W rozważanym właśnie przypadku, gdy $|||\ |||_p$ była już a priori normą, także zdefiniowaliśmy $\|\ \|_p$ (str. PB-26) ale w $\widetilde{L}(\Omega,\mu)$ – po prostu jako $|||\ |||_p$. Mamy więc wówczas dwuznaczność symbolu $\|\ \|_p$ – na szczęście bardzo „niewielką", w tym bowiem przypadku $\widetilde{X}_{0,p}=\{0\}$ i formalnie różne przestrzenie liniowe $L^p = \widetilde{L}^p/\{0\}$ oraz $\widetilde{L}^p$ można naturalnie utożsamiać przez przekształcenie

$$I:\widetilde{L}^p \longrightarrow L^p$$ dane wzorem $I(f):=[f]$, które oczywiście jest izometrią (liniową) przestrzeni unormowanych $(\widetilde{L}^p,\|\ \|_p)$ i $(L^p,\|\ \|_p)$.

**Uwaga 2**

Nietrudno dowieść (patrz tw. wspomniane na str. PB-27 u góry), że podprzestrzeń $\tilde{X}_{0,p}$ (przez którą dzielimy $\tilde{L}^p$) jest zadana również takim (prostszym niekiedy) wzorem:

$$\tilde{X}_{0,p} = \left\{ f \in \tilde{L}^p(\Omega,\mu) : \ f = 0 \ \ \mu\text{-prawie wszędzie} \right\}.$$

**Dowód** $\longrightarrow$ .

**Uwaga 3**

Zgodnie z definicją elementami $L^p$ nie są „już" funkcje, tylko odpowiednie klasy funkcji — „twory" postaci $[f]$, którymi niekiedy wygodnie się posługiwać. Powszechnie matematycy „gubią" owe „[ ]" ze szkodą dla ścisłości ale z pożytkiem dla prostoty zapisu ... My w celach dydaktycznych przez jakiś czas będziemy formalistami i utrzymamy zapis $[f]$, ale by przyzwyczaić się do powszechnego żargonu zapewne po pewnym czasie przejdziemy do zapisu $f$ zamiast $[f]$, podobnie jak przestaniemy pewnie rozróżniać w zapisie $\tilde{L}^p$ i $L^p$ ...

## Przykłady (wszędzie tu $p \in [1; +\infty)$)

- $L^p(D)$ dla $D \subset \mathbb{R}^d$, $D$ – mierzalny w sensie Lebesgue'a będzie oznaczać $L^p(D, \ell_D)$, gdzie $\ell_D$ – standardowa miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^d$ „obcięta" do $D$.
Zatem w tej przestrzeni, dla $[f] \in L^p(D)$
$$\| [f] \|_p := \left( \int_D |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

- $\ell^p_w(\Omega)$ dla $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $w > 0$ zdefiniowana na str. PB-28/29 zgodnie z Uwagą 1 str. PB-36 utożsamiamy (izometrycznie) z $L^p(\Omega, w\,d\#)$.

- $\ell^p(\mathbb{N})$ – to szczególny przypadek powyższego $\ell^p_w(\Omega)$ z $\Omega = \mathbb{N}$ i $w \equiv 1$ – będziemy często go używać na wykładzie / ćwiczeniach. Przypomnijmy, tu
$$\| f \|_p \underset{\uparrow}{=} \| [f] \|_p := \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |f(n)|^p \right)^{1/p}$$
tu „mamy prawo" utożsamić $f$ i $[f]$ ...
Najwięcej zetkniemy się tu z przypadkiem $p = 1$ i $p = 2$.

Dotąd, gdy mowa o $L^p$ rozważaliśmy tylko $p \in [1; +\infty)$. Jednak w kolejnym - ostatnim podrozdziale zdefiniujemy też $L^\infty(\Omega, \mu)$ z normą $\| \ \|_{ess \infty}$ *) - będzie to na ogół coś innego niż $\ell^\infty(\Omega)$ z $\| \ \|_\infty$ ...

*) „ess" przed $\infty$ od ang. „essential" / fr. „essentiel" - istotny.

# 1.6. Banachowskość – najważniejsze dowody

Dotąd jedynie o skończenie wymiarowych przestrzeniach unormowanych wiemy, że są przestrzeniami Banacha.
Będziemy chcieli rozstrzygnąć, które z pozostałych przykładów przestrzeni unormowanych opisywanych licznie w tym podrozdziale są, a które nie są przestrzeniami Banacha.
Zaczniemy od przestrzeni $\ell^\infty(\Omega)$ (patrz str. PB-20).

**Twierdzenie** („O $\ell^\infty$")
$(\ell^\infty(\Omega), \|\ \|_\infty)$ jest przestrzenią Banacha •

**Dowód** – właściwie powinien to być już fakt znany z Analizy I ew. Topologii (± „zupełność normy jednostajnej"). Na wszelki wypadek jednak przypominam:

1°. Rozważamy ciąg Cauchy'ego $\{f_n\}_{n\geq 1}$ w $\ell^\infty(\Omega)$, stąd dzięki nierówności dla $g \in \ell^\infty(\Omega)$

$$\forall_{t\in\Omega}\ |g(t)| \leq \|g\|_\infty \qquad (1)$$

uzyskujemy, że $\forall_{t\in\Omega}\ \{f_n(t)\}_{n\geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{K}$, z zupełności $\mathbb{R}$ ew. $\mathbb{C}$ jest więc zbieżny – oznaczmy jego granicę $c_t \in \mathbb{K}$. Definiujemy więc $f: \Omega \to \mathbb{K}$ wzorem $f(t) := c_t$.

W efekcie $\{f_n\}_{n\geq 1}$ jest punktowo zbieżny do $f$ tzn.

$$\forall_{t\in\Omega} \quad f_n(t) \longrightarrow f(t). \qquad (2)$$

$2^\circ$ Wykażemy, że $f\in \ell^\infty(\Omega)$ oraz $f_n \xrightarrow[\|\ \|_\infty]{} f$.

To pierwsze jest proste, ponieważ ciąg Cauchy'ego $\{f_n\}_{n\geq 1}$ ograniczony w sensie $\|\ \|_\infty$, tzn. $\forall_{n\geq 1} \|f_n\| \leq M$, gdzie $M\in\mathbb{R}$ – pewna stała. Zatem z (1) oraz (2) otrzymamy zaraz $\sup_{t\in\Omega}|f(t)| \leq M$, czyli $f\in\ell^\infty(\Omega)$

By wykazać, że $f_n \xrightarrow[\|\ \|_\infty]{} f$ ustalmy $\varepsilon>0$ i dobierzmy $N\geq 1$ tak, by zgodnie z war. Cauchy'ego

$$\forall_{m,n\geq N} \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon/2 \qquad (3)$$

Niech $n\geq N$. Mamy z (2) (i z ciągłości $|\cdot|$...)

oraz z (3)

$$\forall_{t\in\Omega} \quad |f_n(t)-f(t)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(t)-f_m(t)| \leq \varepsilon/2$$

i stąd $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. *) $\square$

---

*) Zauważmy, że do dowodu tego szacowania z góry na $\|f_n - f\|_\infty$ nie potrzebowaliśmy wykazanego wcześniej faktu, że $f\in\ell^\infty$ – co więcej można było właściwie go nie wykazywać... – wynika on bowiem z tego, że $f_n$ i $(f_n - f)\in\ell^\infty$ np. dla $n=N$.

Pora na drugi poznany typ przestrzeni unormowanej.

**Twierdzenie** (. O $L^p$ ")

$\left(L^p(\Omega,\mu), \| \|_p\right)$ jest przestrzenią Banacha, dla $p \in [1; +\infty)$.

**Dowód**

Na mocy Faktu " O normie z półnormy" wystarczy wykazać pół-zupełność $\left(\tilde{L}^p, ||| \, |||_p\right)$.

Niech $\{f_n\}_{n\geq 1}$ – ciąg pół-Cauchy'ego w $\tilde{L}^p$. Wykażemy, że posiada on podciąg pół-zbieżny, co zakończy dowód (patrz Fakt " O podciągowej pół-zupełności" str. PB-34). Potrzebny nam podciąg wybierzemy konstruując rekurencyjnie ściśle rosnący ciąg indeksów $\{k_n\}_{n\geq 1}$:

- jako $k_1 \geq 1$ wybieramy jakikolwiek indeks, który spełnia:

$$\forall_{m,m' \geq k_1} \; |||f_m - f_{m'}|||_p^p < \frac{1}{4^1} \qquad (1)$$

- gdy zdefiniowany już $k_n$ $(n \geq 1)$, to jako $k_{n+1}$ wybieramy jakikolwiek indeks, który spełnia:

$$k_{n+1} > k_n \quad i \quad \forall_{m,m' \geq k_{n+1}} \; |||f_m - f_{m'}|||_p^p < \frac{1}{4^{n+1}} \qquad (2)$$

— w obu przypadkach istnienie odpowiednich indeksów zagwarantowane jest przez warunek pół-Cauchy'ego. (ewent. pół-warunek Cauchy'ego, jeśli ktoś woli ...).

Tak zdefiniowany ciąg indeksów $\{k_n\}$ jest ściśle rosnący dzięki (2), zatem $\{g_n\}_{n\geq 1} := \{f_{k_n}\}_{n\geq 1}$ jest podciągiem $\{f_n\}_{n\geq 1}$ oraz

$$\forall_{n\geq 1} \forall_{s\geq n} |||\, g_n - g_s \,|||_p^p < \frac{1}{4^n} \qquad (3)$$

na mocy (1) i (2).

Niech teraz $\Omega_n := \left\{ t\in\Omega : |g_n(t) - g_{n+1}(t)|^p \geq \frac{1}{2^n} \right\} \in \mathfrak{M}$.

Dzięki (3) („$s=n+1$") dla $n\geq 1$ mamy

$$\frac{1}{4^n} > |||g_n - g_{n+1}|||_p^p = \int_\Omega |g_n - g_{n+1}|^p d\mu \geq \int_{\Omega_n} |g_n - g_{n+1}|^p d\mu \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_n} \frac{1}{2^n} d\mu = \frac{\mu(\Omega_n)}{2^n},$$

zatem

$$\forall_{n\geq 1} \quad \mu(\Omega_n) < \frac{1}{2^n}. \qquad (4)$$

Rozważmy teraz zbiór

$$\widetilde{\Omega} := \left\{ t\in\Omega : \exists_{N\geq 1} \forall_{n\geq N} \; t\notin\Omega_n \right\} =$$

$$= \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} (\Omega\setminus\Omega_n). \qquad (5)$$

Jeżeli zatem $t\in\widetilde{\Omega}$, to dla pewnego $N(t)$ zachodzi

$$\forall_{n\geq N(t)} \quad |g_n(t) - g_{n+1}(t)| < \frac{1}{(2^{\frac{1}{p}})^n},$$

więc szereg (liczbowy) $\sum_{n=1}^{+\infty} (g_{n+1}(t) - g_n(t))$ jest zbieżny, bo jest bezwzględnie zbieżny.

Zauważmy, że $n$-ty wyraz ciągu sum częściowych tego szeregu to

$$S_n(t) := \sum_{k=1}^{n} \left( g_{n+1}(t) - g_n(t) \right) = \sum_{k=2}^{n+1} g_k(t) - \sum_{k=1}^{n} g_k(t) =$$

$$= g_{n+1}(t) - g_1(t),$$ więc skoro $\{S_n(t)\}_{n\geq 1}$ jest zbieżny, to $\{g_n(t)\}_{n\geq 1}$ także (bo dla $n \geq 2$ $g_n(t) = S_{n-1}(t) + g_1(t)$).

Wykazaliśmy zatem, że $\{g_n|_{\tilde{\Omega}}\}_{n\geq 1}$ jest punktowo zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez $\tilde{g}$ — mamy $\tilde{g} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ i rozszerzmy $\tilde{g}$ do $g : \Omega \to \mathbb{C}$, biorąc $g(t) = 0$ dla $t \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$ — oczywiście taka funkcja $g$ jest $\mathfrak{M}$-mierzalna. Wykażemy teraz, że

$$\mu(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) = 0.$$

Mamy z (5) i z wzorów de Morgana

$$\Omega \setminus \tilde{\Omega} = \bigcap_{N\geq 1} R_N, \text{ gdzie } R_N := \bigcup_{n\geq N} \Omega_n.$$

Zatem $\{R_N\}_{N\geq 1}$ jest rodziną zstępującą („$\searrow$" w sensie $\subset$) oraz

$$\mu(R_N) \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \mu(\Omega_n) \underset{z(4)}{\leq} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \xrightarrow[N]{} 0$$

więc przecięcie tej rodziny, czyli właśnie $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$ ma miarę $\mu$ zerową! W efekcie ciąg funkcji $\{g_n\}_{n\geq 1}$ jest zbieżny $\mu$-prawie wszędzie.

My jednak chcielibyśmy, by $g \in \tilde{L}^p$ oraz by $|||g_n - g|||_p \longrightarrow 0$ ... Udowodnimy to stosując lemat Fatou ($\longrightarrow$ Teoria miary i całki...) oraz (3):

$$\int_{\Omega} |g_n - g|^p \, d\mu = \int_{\tilde{\Omega}} |g_n - g|^p \, d\mu = \int_{\tilde{\Omega}} \lim_{m\to\infty} |g_n(t) - g_m(t)|^p \, d\mu(t)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} \underline{\lim}_{m\to\infty} |g_n(t) - g_m(t)|^p \, d\mu(t) \leqslant \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_{\tilde{\Omega}} |g_n - g_m|^p \, d\mu =$$

$$= \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_{\Omega} \ldots = \underline{\lim}_{m\to\infty} |||g_n - g_m|||_p^p \leqslant \frac{1}{4^n}$$

dla każdego $n \geqslant 1$. Stąd np. $(g_1 - g) \in \tilde{L}^p$, czyli także $g \in \tilde{L}^p$ (bo $g_1 \in \tilde{L}^p$), a ponadto z tw. o „3 ciągach"

$$|||g_n - g|||_p = \left(\int_{\Omega} |g_n - g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 .$$

$\boxed{\text{cbdu}}$

$\boxed{\text{Uwaga}}$

Zatem gdy miara $\mu$ jest małozerowa, to $(\tilde{L}^p(\Omega, \mu), \| \ \|_p)$ także jest przestrzenią Banacha, na mocy np. Uwagi 1 str. PB-36 (albo bezpośrednio - z powyższego dowodu: z jego części dot. pół-zupełności $(\tilde{L}^p(\Omega, \mu), ||| \ |||_p)$ ). W szczególności wszystkie przestrzenie $\ell^p_w(\Omega)$ są Banacha dla $p \in [1; +\infty)$ oraz $w > 0$. (patrz strony PB-28:29).

Jako podsumowanie głównych „praktycznych" wyników tego podrozdziału rozstrzygniemy kwestię banachowskości wszystkich opisanych dotąd przykładów przestrzeni unormowanych. Wszystkie te przykłady można rozstrzygnąć w oparciu o:

- Twierdzenie „O $L^p$" (str. PB-42)
- Twierdzenie „O $\ell^\infty$" (str. PB-40)
- Fakt „O podprzestrzeni Banacha" (str. PB-30)
- Fakt „O przestrzeni skończeniewymiarowej" (str. PB-19).

**Przykłady**

Niżej skrót p. B. to „przestrzeń Banacha".

→ przestrzeń (unormowana) skończenie wymiarowa — jest p. B.

→ $L^\infty(\Omega)$ — jest p. B

→ $\widetilde{L}^p(\Omega,\mu)$ dla $\mu$ - małozerowej, w tym każde $\ell^p_w(\Omega)$ - jest p.B dla $p\in[1;\infty)$ i $w>0$.

→ $L^p(\Omega,\mu)$, $p\in[1;\infty)$ — jest p. B.

→ $C_b(\Omega,\tau)$, w tym $C(K)$ dla $K$ - zwartej przestrzeni topol. - jest p. B

→ $c$ - jest p. B.

→ $c_0$ - jest p. B

→ $\mathcal{M}_b(\Omega,\mathfrak{M})$ - jest p. B

→ $\ell_{fin}(\Omega)$ przy każdym wyborze normy (spośród $\| \ \|_\infty$ lub $\| \ \|_{w,p}$, $p \in [1; +\infty)$) NIE jest p. B, jeżeli $\Omega$ jest zbiorem nieskończonym! *) → ⚠.

---

*) W szczególnym przypadku – gdy $\Omega$ – przeliczalny (np. $\Omega = \mathbb{N}$) będziemy mogli wkrótce wykazać, że przestrzeń liniowa $\ell_{fin}(\Omega)$ w ogóle nie da się unormować w sposób zupełny!

# 2. Dalsze konstrukcje przestrzeni Banacha – produkt i przestrzeń ilorazowa

Zasób naszych przykładów przestrzeni unormowanych i Banacha nieco jeszcze rozszerzymy dzięki dwóm tytułowym konstrukcjom.

## 2.1 Produkt *)

Zajmiemy się tu tylko skończonym produktem, tzn. załóżmy, że $(X_j, \|\ \|_j)$ są przestrzeniami unormowanymi dla $j = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ i rozważmy produkt $X := X_1 \times \dots \times X_k$ przestrzeni liniowych $X_1, \dots, X_k$ (ze standardowymi działaniami „po współrzędnych"). Nawet w tak prostym (bo skończonym) przypadku jest wiele dość „naturalnych" sposobów definiowania normy w $X$. Na użytek naszego wykładu dokonamy więc dość arbitralnego wyboru (choć ten właśnie wybór wydaje się najpopularniejszy, w kontekście ogólnych przestrzeni Banacha przynajmniej) — określimy mianowicie dla $x \in X$, $x = (x_1, \dots, x_k)$

$$\|x\| := \sum_{j=1}^{k} \|x_j\|_j . \qquad (1)$$

Przestrzeń $(X, \|\ \|)$ będziemy tu nazywać **produktem*) przestrzeni unormowanych** $(X_1, \|\ \|_1), \dots, (X_k\ \|\ \|_k)$.

*) Używa się też nazwy **suma prosta**, mimo, że „produkt" raczej należy tłumaczyć na polski jako „mnożenie tzn. iloczyn...

Zasadność tej nazwy potwierdza niejako poniższy wynik

**Fakt** („O produkcie")

1. $(X, \| \ \|)$, gdzie $\| \ \|$ zadana wzorem (1), jest przestrzenią unormowaną.

2. Zbieżność w $X$ jest zbieżnością „po współrzędnych", tzn. dla każdego ciągu $\{x^{(n)}\}_{n \geq n_0}$ o wyrazach w $X$ oraz każdego $x \in X$

$$x^{(n)} \xrightarrow[\| \ \|]{} x \quad \text{wtw} \quad \forall_{j=1,\dots,k} \ (x^{(n)})_j \xrightarrow[\| \ \|_j]{} x_j .$$

W szczególności topologia w $X$ jest topologią produktową dla $X_1, \dots, X_k$.

3. Jeżeli $X_1, \dots, X_k$ są przestrzeniami Banacha, to także $X$ jest przestrzenią Banacha. ■

**Dowód** (– skrótowy, bo to proste...)

1. $\longrightarrow \triangle$

2. Ponieważ $\forall_{j=1,\dots,k} \forall_{x \in X} \|x_j\|_j \leq \|x\|$ (dzięki (1)) więc „$\Rightarrow$" jest jasna. Z kolei „$\Leftarrow$" wynika bezpośrednio z (1) i arytmetycznych własności granicy ciągów liczbowych. W efekcie produktowość topologii w $X$ wynika z faktu, że w przestrzeni metrycznej topologia jest wyznaczona przez zbieżność jednoznacznie oraz że zbieżność w produkcie topologicznym jest właśnie zbieżnością po współrzędnych.

3. Łatwo analogicznie jak w 2. wykazać, że $\{x^{(n)}\}_{n \geq n_0}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $X$ wtw $\forall_{j=1,\dots,k} \{(x^{(n)})_j\}_{n \geq n_0}$ są

ciągami Cauchy'ego w $X_j$ $\longrightarrow$ $\triangle$.
A to razem z 2. daje natychmiast 3. $\boxed{\text{CNU}}$

$\boxed{\text{Uwaga}}$

Dla $p \in [1; +\infty]$ oraz $x \in X = \underbrace{X_1 \times \ldots \times X_k}_{\text{oznaczamy}}$

$$\|x\|_{[p]} := \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|_j^p\right)^{1/p} & \text{gdy } p \in [1; +\infty) \\ \max_{j=1,\ldots k} \|x_j\|_j & \text{gdy } p = +\infty. \end{cases}$$

W szczególności np. $\| \ \|_{[1]}$ to właśnie $\| \ \|$ dana przez (1). Nietrudno dowieść ($\longrightarrow$ $\triangle$), że w powyższym Fakcie „O produkcie" można zastąpić normę $\| \ \|$ w $X$ którąkolwiek spośród $\| \ \|_p$, $p \in [1; +\infty]$. Co więcej wszystkie te normy (tzn. każde dwie) są równoważne ($\longrightarrow$ $\triangle$). Warto też wspomnieć o tym, że gdy w przyszłości zajmiemy się przestrzeniami z iloczynem skalarnym i przestrzeniami Hilberta, to właśnie wybór $\| \ \|_{[2]}$ a nie wybrany wcześniej $\| \ \|_{[1]}$ będzie „najbardziej stosowny"...

Przy okazji mówienia o produkcie warto wspomnieć o „łącznej ciągłości działań" w przestrzeni unormowanej, którą można wyrazić następująco.

**Fakt** („O łącznej ciągłości działań")

Jeśli $(X, \|\ \|)$ – przestrzeń unormowana, to funkcje

$$+ : X \times X \longrightarrow X \qquad \text{oraz} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$$

(tzn. odpowiednio suma wektorów i iloczyn liczby przez wektor) są ciągłe.*)

**Dowód** Teza wynika łatwo ( $\longrightarrow \triangle$ ) z 2. w Fakcie „O produkcie" oraz oszacowań:

$$\|x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| = \|x - y\|_{X \times X}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X \times X$; oraz

$$\|\lambda x - \mu y\| = \|\lambda x - \lambda y + \lambda y - \mu y\| \leq |\lambda| \|x - y\| + |\lambda - \mu| \|y\|$$

dla $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$. ■

---

*) Oczywiście $\mathbb{K}$ traktujemy tu jako przestrzeń unormowaną z normą równą modułowi $|\ |$.

## 2.2 Przestrzeń ilorazowa i $L^\infty(\Omega,\mu)$

Przestrzeń liniowa ilorazowa $X/Y$ dla przestrzeni liniowej $X$ oraz $Y \subseteq_{lin} X$ została przypomniana na str. PB-4.

Teraz „spróbujemy" ją unormować, zakładając, że $(X, \|\ \|)$ – unormowana. Ponieważ nie zawsze się to uda „w pełni", ale zawsze uda się „choć w połowie", określmy dla $[x] \in X/Y$

$$|||[x]||| := \mathrm{dist}(x, Y). \qquad (2)$$

Zauważmy, że (2) określa poprawnie funkcję

$$|||\ ||| : X/Y \longrightarrow \mathbb{R},$$

bo gdy $x \equiv x'$ (tzn. $x - x' \in Y$) to $x' = x + y_0$, gdzie $y_0 \in Y$

$\mathrm{dist}(x', Y) = \inf_{y\in Y} \|x - (y - y_0)\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$ (bo $\{y - y_0 : y \in Y\} = Y$), tzn. prawa strona (2) nie zależy od wyboru reprezentanta klasy $[x]$.

$\boxed{\text{Twierdzenie}}$ („O przestrzeni ilorazowej")

1. $|||\ |||$ jest półnormą w $X/Y$.
2. $|||\ |||$ jest normą w $X/Y$ wtw $Y = \overline{Y}$.

Jeśli ponadto $Y$ – domknięta oraz $\|\ \|_i := |||\ |||$, to:

3. $\Pi(K_X(x_0, r)) = K_{X/Y}([x_0], r)$ dla każdego $x_0 \in X$ oraz $r \geq 0$. W szczególności $\Pi : X \longrightarrow X/Y$ *) jest przekształceniem liniowym ciągłym, otwartym, gdzie $\Pi$ zadane jest wzorem $\Pi(x) := [x]$, $x \in X$.

*) $X/Y$ tzn. $(X/Y, \|\ \|_i)$.

4. Jeżeli $X$ jest przestrzenią Banacha, to także $(X/Y, \| \|_i)$ jest przestrzenią Banacha.

$\boxed{\text{Dowód}}$

1. Niech $x_1, x_2 \in X$ i niech $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $y_1, y_2 \in Y$ tak, że $\|x_j - y_j\| < \underbrace{\operatorname{dist}(x_j, Y)}_{= |||[x_j]|||} + \varepsilon/2$ dla $j = 1, 2$.

Mamy zatem:

$$|||[x_1+x_2]||| = \operatorname{dist}(x_1+x_2, Y) \leq \|(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\| \leq \|x_1-y_1\| + \|x_2-y_2\|$$
$$< |||[x_1]||| + |||[x_2]||| + \varepsilon,$$

co dzięki dowolności $\varepsilon > 0$ daje nierówność trójkąta dla $||| \; |||$. Drugi warunek („jednorodność z modułem") dowodzi się dla $||| \; |||$ jeszcze łatwiej $\longrightarrow \triangle$.

2. Mamy $|||[x]||| = 0 \iff \operatorname{dist}(x, Y) = 0 \iff x \in \overline{Y}$, ale $[x] = 0 \iff x \in Y$. Stąd $\underbrace{}_{(i\ z\ 1.)}$ $||| \; |||$ jest normą wtw $Y = \overline{Y}$.

Dla dowodu części „ponadto" zakładamy, że $Y = \overline{Y}$, zatem dzięki 2. $\| \|_i$ jest normą w $X/Y$.

3. Zauważmy najpierw, że $\pi(K_X(0,r)) \subset K_{X/Y}(0,r)$, gdyż

$$\forall_{x \in X} \quad \|\pi(x)\|_i = |||[x]||| = \operatorname{dist}(x, Y) \leq \|x - 0\| = \|x\|. \qquad (3)$$

Wykażemy, że jest „=" w powyższym „$\subset$".

Niech $[x]\in X/Y$, $\|[x]\|_i < r$. Zatem

$$\inf\{\|x-y\| : y\in Y\} = \mathrm{dist}(x,Y) = \|[x]\|_i < r,$$

tzn. (r nie jest ograniczeniem dolnym $\{\|x-y\| : y\in Y\}$) dla pewnego $y\in Y$ $\|x-y\|<r$, tzn. $x-y\in K_X(0,r)$. Ale

$$\pi(x-y) = [x-y] = [x], \text{ skoro } y\in Y, \text{ więc } [x]\in \pi(K_X(0,r)).$$

W efekcie $\pi(K_X(0,r)) = K_{X/Y}(0,r)$, co jest wzorem z 3. dla przypadku $x_0=0$. Wzór dla dowolnego $x_0$ otrzymamy stąd natychmiast dzięki liniowości $\pi$ (— natychmiastowy wniosek z definicji działań w $X/Y$ ... ) ( ) oraz ze wzoru *)

$$x_0 + K(0,r) = K(x_0,r).$$

By zakończyć dowód 3 pozostaje wykazać ciągłość i otwartość $\pi$. Jednak znów dzięki liniowości $\pi$ ciągłość dostaniemy z (3), gdyż jeśli $x_n \xrightarrow[X]{} x$, to

$$\|\pi(x_n)-\pi(x)\|_i = \|\pi(x_n-x)\|_i \leq \|x_n - x\|,$$

więc $\pi(x_n) \xrightarrow[X/Y]{} \pi(x)$. Otwartość wynika zaś z tego, że obraz sumy (teoriomnogościowej) to suma obrazów, a obraz każdej kuli otwartej jest na mocy wykazanego już wzoru także kulą otwartą.

---

*) + po lewej stronie to dodawanie wektora i zbioru zadane standardowo, tzn. $v+C := \{v+w : w\in C\}$. Przypominam też przy okazji dodawanie dwóch zbiorów: $C+D := \{x+y : x\in C, y\in D\}$. Czyli każdy z trzech użytych tu symboli „+" jest de facto innym działaniem...

4. Niech $\{[x_n]\}_{n\geq 1}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $X/Y$. Przy pomocy łatwej rekursji konstruujemy najpierw ściśle rosnący ciąg indeksów $\{k_n\}_{n\geq 1}$ taki, że

$$\forall_{n\geq 1}\forall_{m\geq k_n} \|[x_{k_n}]-[x_m]\|_i < \frac{1}{2^n}$$

$\longrightarrow$ ⚠ *)

Wówczas mamy w szczególności

$$\forall_{n\geq 1} \|[x_{k_n}]-[x_{k_{(n+1)}}]\|_i < \frac{1}{2^n}. \quad (4)$$

Teraz skonstruujemy, także rekurencyjnie, pewien ciąg $\{\tilde{x}_n\}_{n\geq 1}$ w $X$, który będzie spełniał:

$$\forall_{n\geq 1} \quad (a)\ [\tilde{x}_n]=[x_{k_n}] \ ; \ (b)\ \|\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}. \quad (5)$$

Konstrukcja ta jest następująca:

1° $\tilde{x}_1 := x_{k_1}$

2° jeżeli mamy już wybrany $\tilde{x}_n$ dla pewnego $n\geq 1$, przy czym zachodzi (a), to na mocy (4)

$$\frac{1}{2^n} > \|[x_{k_n}]-[x_{k_{(n+1)}}]\|_i = \|[\tilde{x}_n]-[x_{k_{(n+1)}}]\|_i = \|[\tilde{x}_n - x_{k_{(n+1)}}]\|_i\,,$$

tzn. $[\tilde{x}_n - x_{k_{(n+1)}}] \in K_{X/Y}(0, \frac{1}{2^n})$. A zatem na mocy wykazanego

---

*) Można to zrobić w sposób analogiczny do konstrukcji z dowodu Tw. „O $L^p$" (ze strony PB-42).

już punktu 3. twierdzenia wybierzmy $z_n \in K_X(0, \frac{1}{2^n})$ taki, że $[z_n]=[\tilde{x}_n - x_{k(n+1)}]$ i zdefiniujmy

$$\tilde{x}_{n+1} := \tilde{x}_n - z_n.$$

Mamy zatem

$$z_n = \tilde{x}_n - \tilde{x}_{n+1},$$

czyli $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n+1}\| = \|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ – tzn. spełnione jest więc (b) dla rozważanego $n$. Ponadto, skoro $[z_n]=[\tilde{x}_n - x_{k(n+1)}]$, to

$$[\tilde{x}_{n+1}] = [\tilde{x}_n - z_n] = [\tilde{x}_n] - [z_n] = [\tilde{x}_n] - [\tilde{x}_n] + [x_{k(n+1)}] = [x_{k(n+1)}].$$

A to oznacza, że skonstruowane $\tilde{x}_{n+1}$ spełnia (b) z (5) dla $n+1$. W efekcie, indukcyjnie, uzyskamy, że (5) jest spełnione rzeczywiście, dla tak skonstruowanego ciągu $\{\tilde{x}_n\}_{n\geq 1}$.

Tym sposobem „przenieśliśmy problem" z $X/Y$ do „samego" $X$. Łatwo wykazać bowiem ( $\longrightarrow$ $\triangle$ *) ), że dzięki (5) $\{\tilde{x}_n\}_{n\geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $X$. A zatem $\tilde{x}_n \xrightarrow[X]{} x$ dla pewnego $x \in X$, dzięki zupełności $X$. Jednak z ciągłości $\pi$ (znów z 3.) mamy więc

$$[x_{k_n}] = [\tilde{x}_n] = \pi(\tilde{x}_n) \xrightarrow[X/Y]{} \pi(x) = [x],$$

czyli $\{[x_{k_n}]\}_{n\geq 1}$ jest zbieżnym podciągiem $\{[x_n]\}_{n\geq 1}$, co na mocy

---

*) Wskazówka: $\tilde{x}_n - \tilde{x}_m = (x_n - x_{n+1}) + \ldots + (x_{m-1} - x_m) = \sum_{j=n}^{m-1} (x_j - x_{j+1})$

dla $m > n$.

Fakt „O podciągowej zupełności" daje zupełność $X/Y$. $\boxed{\checkmark}$

**Definicja** Opisana w tym twierdzeniu przestrzeń $(X/Y, \|\ \|_i)$ to przestrzeń ilorazowa (unormowana) dla przestrzeni unormowanej $X$ i podprzestrzeni $Y$.

**Uwagi**

1. Powyższa definicja obowiązuje jedynie, gdy $Y = \overline{Y}$ — bez tego nie mamy normy!

2. Choć konstrukcja przestrzeni ilorazowej unormowanej przypomina nieco konstrukcję „normy z półnormy", jest to jednak wyraźnie inna konstrukcja!

3. Norma $\|\ \|_i$ w $X/Y$ jest jednoznacznie wyznaczona przez $X$ i $Y$, czego nie zaznaczamy w notacji — w razie potrzeby można oczywiście uwzględnić np. zależność od wyboru $Y$. Jednak niekiedy*) będziemy pomijać nawet owo „$i$" i użyjemy tego samego symbolu $\|\ \|$, co w $\|\ \|$. Jest spora szansa, że to nie doprowadzi do nieporozumień, gdy (konsekwentnie) jedna z norm będzie „przykładana" do elementów postaci $x \in X$, a druga do tych postaci $[x] \in X/Y$.

*) W głównym przykładzie $L^\infty(\Omega, \mu)$, który za chwilę, będziemy na razie nieco ostrożniejsi przez jakiś czas...

4. Warto zauważyć kilka alternatywnych formuł definiujących $\| \ \|_i$ ($\longrightarrow \triangle$):

$$\|[x]\|_i = \mathrm{dist}(x, Y) = \inf_{x'\in[x]} \|x'\| = \inf_{y\in Y}\|x+y\| = \inf_{y\in Y}\|x-y\|.$$

Opisana w twierdzeniu konstrukcja przestrzeni ilorazowej okazuje się być nie tylko narzędziem do „tworzenia" nowych przestrzeni Banacha, ale także wygodnym środkiem technicznym w rozmaitych dowodach (o czym pewnie przekonamy się tu nie raz). W tym rozdziale jednak najważniejsze jest dla nas to pierwsze, a szczególnie nasze zasadnicze zastosowanie do konstrukcji zapowiadanej już przestrzeni typu „$L^\infty$" powstałej „na bazie" „$\ell^\infty$".

$\boxed{\text{Przykład}}$ (przestrzeń „$L^\infty$" i norma „$\| \ \|_{ess\infty}$")

Rozważmy (znów) przestrzeń mierzalną $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$. W przestrzeni $\mathcal{M}_b := \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$ (która (sama) „nie potrzebuje" miary $\mu$, a jedynie jej σ-ciała $\mathfrak{M}$) rozważmy jej podprzestrzeń, zdefiniowaną już w sposób wyraźnie zależny od $\mu$:

$$Z_\mu := \{f \in \mathcal{M}_b : \ f = 0 \ \ \mu\text{-p.w.}\}.$$

Nietrudno wykazać $\longrightarrow \triangle$ (to dobre przypomnienie prostych ale ważnych faktów i metod stosowanych w teorii miary...)

że $Z_\mu$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową $\mathcal{M}_b$.
Zatem $\mathcal{M}_b / Z_\mu$ jest przestrzenią Banacha z odpowiednią normą $\| \ \|_i$. Stosujemy dla tej przestrzeni oznaczenie $L^\infty(\Omega, \mu)$, a normę często oznacza się „żargonowo" $\| \ \|_\infty$, co jednak byłoby niebezpieczne w połączeniu ze stosowanym jednocześnie zwyczajem (naszym jeszcze nie...) pomijania „[ ]" przy „[f]". Dla tego tu będziemy używać oznaczenia

$$\| \ \|_{\infty\, ess} \quad (\text{ewent } \| \ \|_{ess\, \infty})$$

(od essential = istotny). Podobnie jak dla $\| \ \|_p$ w $L^p(\Omega, \mu)$ i $p \in [1, +\infty)$ w oznaczeniu normy brak $\mu$...
Warto podkreślić, że pod wieloma względami to właśnie ta przestrzeń $L^\infty(\Omega, \mu)$ jest właściwym „granicznym uzupełnieniem" całej rodziny przestrzeni $L^p(\Omega, \mu)$ z $p < +\infty$ niż np. przestrzeń $\ell^\infty(\Omega)$ – i stąd chociażby jej oznaczenie z dużym „L". Niekiedy będziemy więc rozważać „rodzinę $L^p$ rozszerzoną" tzn. $L^p(\Omega, \mu)$ dla $p \in [1; +\infty]$ zamiast tylko $p \in [1; +\infty)$, podobnie jak mieliśmy już np. w przypadku $\ell^p(\Omega)$.

W związku z symbolem $\| \quad \|_{\infty\, ess}$ warto też wspomnieć o innym symbolu zawierającym „ess". Dla $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ oznaczamy

$$\operatorname{supess} g := \inf \left\{ \sup_{t \in \Omega \setminus Z} g(t) : Z \in \mathfrak{M},\ \mu(Z) = 0 \right\}.$$

$\boxed{\text{Fakt}}$

Jeżeli $f \in \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$, to

$$\|[f]\|_{\infty\, ess} = \operatorname{supess} |f|$$

(przy czym dla celu obu stron tej równości rozważamy oczywiście tę samą miarę $\mu$ na $\sigma$-ciele $\mathfrak{M}$).

$\boxed{\text{Dowód}}$ $\longrightarrow \Delta$.

# 3. Liniowa gęstość, ośrodkowość, szeregi i bazy Schaudera

W tym ostatnim podrozdziale omówimy kilka, wspomnianych w tytule, ogólnych pojęć przydatnych w teorii przestrzeni Banacha.

## 3.1 Liniowa gęstość i ośrodkowość

Przypominamy, że gęstość podzbioru $C$ przestrzeni topologicznej $X$ oznacza po prostu że $\overline{C} = X$. Dla przestrzeni unormowanej $X$ zdefiniujemy słabszy warunek – liniową gęstość.

$\boxed{\text{Definicja}}$ Niech $C \subset X$.
$C$ jest liniowo-gęsty wtw $\operatorname{lin} C$ jest gęsty
(tzn. $\overline{\operatorname{lin} C} = X$ *)).

Oczywiście z gęstości wynika liniowa gęstość (bo $\operatorname{lin} C \supset C$) jednak odwrotnie już nie. Można jednak uzyskać łatwo wynik niejako „pośredni". Oznaczmy

$\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} C$ := zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów z $C$ o współczynnikach wymiernych (w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), bądź odpowiednio z $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

---

*) Jednak to nie to samo często, co $\operatorname{lin}(\overline{C}) = X$ ... – warto znaleźć przykład ... $\longrightarrow$

Mamy więc
$$C \subset \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}} C \subset \mathrm{lin}\, C \qquad (1)$$
i zachodzi

$\boxed{\text{Fakt}}$

$C$ jest liniowo gęsty wtw $\mathrm{lin}_{\mathbb{Q}} C$ jest gęsty.

$\boxed{\text{Dowód}}$ „$\Leftarrow$" – jasne z (1).

„$\Rightarrow$". Przypuśćmy, że $C$ liniowo gęsty i niech $\left(x \in X \text{ oraz}\right)$ $\varepsilon > 0$.
Wystarczy znaleźć $x' \in \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}} C$ takie, że $\|x' - x\| < \varepsilon$. Wybierzmy więc najpierw $\tilde{x} \in \mathrm{lin}\, C$ taki, że $\|\tilde{x} - x\| < \varepsilon/2$, ma on postać
$$\tilde{x} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{\lambda}_k c_k$$
dla pewnych $m \geq 1$, $\tilde{\lambda}_1, \dots \tilde{\lambda}_m \in \mathbb{K}$, $c_1, \dots c_m \in C$.
Wystarczy teraz znaleźć $\lambda'_1, \dots \lambda'_m \in \mathbb{Q}$ /odpowiednio $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ takie, że $x'$ dany wzorem
$$x' := \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k c_k$$
spełnia warunek
$$\|x' - \tilde{x}\| < \varepsilon/2 .$$
Ale takie $\lambda'_1, \dots \lambda'_m$ istnieją, wystarczy bowiem ...

C.D. $\longrightarrow \Delta$.

$\boxed{\text{Ć}}$

Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczna jest ośrodkowa wtw posiada podzbiór conajwyżej przeliczalny, gęsty.
Wiele przestrzeni Banacha, które będziemy rozważać będzie ośrodkowych, choć nie wszystkie. W niektórych problemach ośrodkowość odgrywa istotną rolę. Dlatego wygodny byłby następujący wynik, który pozwala się w tym przypadku zajmować podzbiorami „tylko" liniowo-gęstymi, zamiast „aż" gęstymi...

**Fakt** („Ośrodkowość z liniowej gęstości")
Przestrzeń unormowana jest ośrodkowa wtw posiada conajwyżej przeliczalny podzbiór liniowo gęsty.

**Dowód**
$\Rightarrow$ – oczywiste, bo podzbiór gęsty jest „tym bardziej" liniowo gęsty
$\Leftarrow$ Niech $C$ będzie conajwyżej przeliczalnym podzbiorem $X$ – unormowanej, liniowo gęstym w $X$. Niech $\tilde{C} := \text{lin}_{\mathbb{Q}} C$.
Na mocy poprzedniego faktu $\tilde{C}$ jest gęsty. Ponadto nietrudno sprawdzić (niewielkie przypomnienie Wstępu do Matematyki / Teorii Mnogości...) $\longrightarrow$ $\triangle$ *), że $\tilde{C}$ jest też zbiorem conajwyżej przeliczalnym (choć np. lin $C$ już raczej nie...).
$\tilde{C}$ jest więc ośrodkiem. $\boxed{\text{cu}}$

---

*) Wskazówka: proszę się najpierw zająć mocą zbioru złożonego z wszystkich kombinacji $m$-elementowych o odpowiednich współczynnikach, przy ustalonym $m \in \mathbb{N}_1$.

## Przykłady

1. $\ell^p(\mathbb{N})$ jest ośrodkowa dla $p \in [1;+\infty)$.

By to wykazać rozważmy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcję/ciąg $e_n \in \ell(\mathbb{N})$ zadaną wzorem

$$e_n(k) := \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ e_n \in \ell^p(\mathbb{N})$, ponadto łatwo zauważyć ($\rightarrow \triangle$), że

$$\operatorname{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \ell_{fin}(\mathbb{N}).$$

Zatem liniowa gęstość zbioru $C := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ to gęstość $\ell_{fin}(\mathbb{N})$ w $\ell^p(\mathbb{N})$, którą nietrudno sprawdzić — zostawiam to jako (pouczające) ćwiczenie $\rightarrow \triangle$. W efekcie $C$ jest przeliczalnym podzbiorem liniowo gęstym, stąd ośrodkowość dzięki poprzedniemu faktowi.

2. $\ell^p_w(\mathbb{I})$ jest ośrodkowa dla każdego $\emptyset \neq \mathbb{I}$ - przeliczalnego (co najwyżej), $p \in [1;+\infty)$ oraz $w > 0$. Dowód analogiczny do tego z przykł. 1 $\rightarrow \triangle$.

3. $\ell^\infty(\Omega)$ **nie** jest ośrodkowa, jeśli $\Omega$ jest zbiorem nieskończonym (a gdy $\Omega$ - skończony, to jest, bo ...). Dowód: $\rightarrow \triangle$ !*)

---

*) Jednak bynajmniej NIE jest dowodem fakt, że $\ell_{fin}(\mathbb{N})$ nie jest gęsty w $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (nawet dla $\Omega = \mathbb{N}$)

4. $C([a;b])$ jest ośrodkowa, $(a,b\in\mathbb{R},\ a\leq b)$. W tym wypadku jako przeliczalny podzbiór liniowo gęsty możemy wziąć zbiór wszystkich jednomianów $J := \{X^n : n\in\mathbb{N}_0\}$, gdzie $X^n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $X^n(t) = t^n$. *)
Mamy bowiem $\operatorname{lin} J$ – to zbiór wszystkich wielomianów $W([a;b])$ na $[a;b]$, a gęstość $W([a;b])$ (w normie $\|\ \|_\infty$) wynika z tw. Stone'a Weierstrassa.

Przytoczone tu przykłady można na różne strony uogólniać. W oparciu o Fakt „Ośrodkowość z lin. gęstości" daje się przy pewnym wsparciu topologii oraz teorii miary dowieść, że dla „dużej klasy" przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ przestrzeń $L^p(\Omega,\mu)$ jest ośrodkowa przy $p\in[1;+\infty)$. Innymi metodami można też często dowieść, że $L^\infty(\Omega,\mu)$ ośrodkowa nie jest...

Na koniec tego „pod-pod rozdziału" przypominam jeszcze ważny fakt z topologii metrycznej:

$\boxed{\text{Fakt}}$ („O podprzestrzeni ośrodkowej")
Podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metrycznej jest ośrodkowa.

---

*) Standardowym zwyczajem, dla $t=0$ i $n=0$ przyjmujemy $0^0=1$.

## 3.2 Szeregi w przestrzeniach unormowanych. Bazy Schaudera

◇ szeregi

Część teorii szeregów znanej dobrze dla szeregów liczbowych daje się przenieść na grunt szeregów o wyrazach w przestrzeni unormowanej $(X, \|\ \|)$. Niech $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ $(n_0 \in \mathbb{Z})$ będzie pewnym ciągiem o wyrazach w $X$ — będzie on tu dla nas „ciągiem wyrazów szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$". Przyjmujemy bowiem (tradycyjną), analogiczną do znanej nam z szeregów liczbowych terminologię:

- **szereg** $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ to ściśle po prostu (tzw.) **ciąg sum częściowych** $\{S_n\}_{n \geq n_0}$ dany wzorem

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} x_k \quad , \quad n \geq n_0$$

(w szczególności $\{S_n\}_{n \geq n_0}$, tak jak $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ to ciąg o wyrazach w $X$).

- szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ jest **zbieżny** wtw $\{S_n\}_{n \geq n_0}$ jest zbieżny w $X$, tzn. istnieje $G \in X$ t.że $S_n \xrightarrow[X]{} G$. W tej sytuacji $G$ nazywamy **sumą szeregu** $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ (lepiej nie „granicą", choć „od biedy..."), mówimy (wtedy) też: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ **jest zbieżny do $G$**.
- symbol $G = \sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$, gdy $G \in X$ jest co prawda nieco mylący/dwuznaczny (bo $G \in X$, ale $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ to pewien ciąg w $X$...) ale będzie używany jako skrót zdania: $G$ jest sumą $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$. W związku z tym symbol $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ używamy nie tylko na oznaczenie

samego szeregu, ale również jako jego sumy, o ile ona istnieje (tu – należy do X, nieco inaczej niż dla szeregów rzeczywistych, dla których suma $\pm\infty$ też była dopuszczana).

Ważnym pojęciem, też dosyć analogicznym do odpowiedniego „skalarnego" pojęcia jest zbieżność bezwzględna.

**Definicja**

Szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ jest **zbieżny bezwzględnie** wtw szereg (już nie w X lecz liczbowy...) $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|x_n\|$ jest zbieżny.

Poniższy wynik jest swego rodzaju uogólnieniem „skalarnego" twierdzenia o bezwzględnej zbieżności.

**Twierdzenie** („O bezwzględnej zbieżności w przestrzeniach unormowanych")

Jeśli X jest przestrzenią Banacha, to każdy szereg bezwzględnie zbieżny o wyrazach w X jest zbieżny.

Ponadto, jeśli X jest taką przestrzenią unormowaną, że każdy szereg bezwzględnie zbieżny o wyrazach w X jest zbieżny, **) to X – Banacha.

**Dowód**

Pierwsza część – podobnie jak dla szeregów liczbowych – to prosta konsekwencja zupełności i nierówności trójkąta. Mamy bowiem dla $m>n$

$$\|S_m - S_n\| = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\Big\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \qquad (1)$$

i jeśli $\varepsilon > 0$ to, dzięki zbieżności $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|x_n\|$, suma po prawej stronie (1) będzie $< \varepsilon$ d.d.d. $n$ *) (gdy $m>n$). Czyli

---

*) d.d.d. = dla dostatecznie dużych.

**) Warto (→ ...) w oparciu o to „przetworzyć" nieco dowód Tw. „OLP" (str. 42).

Ciąg sum częściowych jest Cauchy'ego, więc zbieżny.

Dla dowodu drugiej części użyjemy Faktu „O podciągowej zupełności" oraz konstrukcji użytej już (i zostawionej jako „$\triangle$"...) raz na stronie PB-55 (dającej wzór (4)).

Niech mianowicie $\{x_n\}_{n\geq 1}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $X$ i niech $\{k_n\}_{n\geq 1}$ - ściśle rosnący ciąg indeksów taki, że

$$\forall_{n\geq 1} \quad \| x_{k_n} - x_{k_{(n+1)}} \| < \frac{1}{2^n}. \qquad (2)$$

Niech $z_n := x_{k_{(n+1)}} - x_{k_n}$ dla $n \geq 1$, wówczas

$$\forall_n \quad x_{k_{(n+1)}} = x_{k_1} + \sum_{j=1}^{n} z_j \qquad (3)$$

Ale z (2) $\|z_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ dla wszystkich $n \geq 1$, zatem $\sum_{n=1}^{+\infty} \|z_n\|$ jest bezwzględnie zbieżny — jest więc zbieżny, tzn. jego ciąg sum częściowych $\{\sum_{j=1}^{n} z_j\}_{n\geq 1}$ jest zbieżny, a stąd na mocy (3) $\{x_{k_{(n+1)}}\}_{n\geq 1}$ jest zbieżny — a to podciąg ciągu $\{x_n\}_{n\geq 1}$. $\boxed{/ / /}$

Warto jeszcze sformułować tu związaną wiecej z powyższym wynikiem uwagę.

$\boxed{\text{Uwaga}}$ Jeżeli w $X$ - unormowanej $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny i jest on też bezwzględnie zbieżny, to
$\| \sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n \| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \|x_n\|$. $\boxed{\text{Dowód}}$: $\longrightarrow \triangle$.

Oczywiście gdy mówimy o zbieżności szeregów tak rozumianych, to nie tylko wybór ciągu wyrazów $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ ma wpływ na zbieżność / rozbieżność *), ale także wybór przestrzeni unormowanej (zarówno $X$ jak i normy $\| \ \|$ w niej) w której tę zbieżność zamierzamy rozważać. Tak samo zresztą jak w wypadku każdej zbieżności ciągów o wyrazach w przestrzeni unormowanej.

**Przykład**

Rozważmy ciąg wektorów $\{x_n\}_{n \geq 1}$, $x_n := \frac{1}{n} \cdot e_n \in \ell(\mathbb{N}_1)$.
Oczywiście $\forall_n \ x_n \in \ell^p(\mathbb{N}_1)$ przy wszystkich możliwych $p \in [1; +\infty]$.
Nietrudno wykazać, że $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny w $\ell^p(\mathbb{N}_1)$ dla $p \in (1; +\infty]$ oraz rozbieżny dla $p = 1$. Ponadto dla żadnego z tych $p$ szereg taki nie jest bezwzględnie zbieżny. Wszystko to proszę sprawdzić samodzielnie...

*) rozbieżność definiujemy oczywiście jako brak zbieżności (i dla ciągów i w szczególności dla szeregów).

## ◊ Bazy Schaudera

Z kwestią zbieżności szeregów związane jest pojęcie baz Schaudera *), wspominanych już na początku rozdziału (PB-4 w *)) przy okazji zupełnie innych baz – w sensie liniowym.

**Definicja**

Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ o wyrazach w przestrzeni Banacha *) $X$ jest **bazą Schaudera** wtw każdy $x \in X$ daje się jednoznacznie zapisać w postaci

$$x = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x_n ,$$

dla pewnego $a = \{a_n\}_{n\geqslant n_0} \in \ell(\mathbb{N}_{n_0})$.

$$\left( \text{tzn. } \forall_{x \in X} \ \exists!_{a \in \ell(\mathbb{N}_{n_0})} \ x = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x_n \right).$$

**Uwagi**

1. Baza Schaudera musi być w szczególności układem liniowo niezależnym $\longrightarrow \triangle$

---

*) Julian Schauder i Stefan Banach. Obaj są przedstawicielami tzw. lwowskiej szkoły matematycznej. Banach nieco bardziej znany (choćby przez „swoje" przestrzenie). Obaj Polacy (Schauder – pochodzenia żydowskiego). Banach zmarł zaraz po wojnie (II, w 1945), Schauder został zabity przez hitlerowców podczas wojny (w 1943). Obaj związani blisko z Hugonem Steinhausem ... [szukaj dalej].

2. Zbiór wyrazów każdej bazy Schaudera musi być liniowo gęsty w $X$ $\longrightarrow$ $\triangle$. W szczególności, jeśli $X$ posiada bazę Schaudera (a nie musi – w odróżnieniu choćby od posiadania „zwykłej" bazy), to $X$ – ośrodkowa. Jednak nie każdy zbiór liniowo gęsty daje się „ustawić" w ciąg będący (w przestrzeni Banacha) bazą Schaudera

3. Z oczywistych względów tak zdefiniowane bazy Schaudera mogą dotyczyć jedynie przestrzeni wymiaru nieskończonego.

## Przykłady

1. W każdej z przestrzeni $\ell^p(\mathbb{N})$ dla $p \in [1; +\infty)$ i w $c_0$ ciąg $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stanowi bazę Schaudera ($\longrightarrow \triangle$).

2. Ciąg $\{x^n\}_{n \geq 0}$ <u>nie</u> jest bazą Schaudera w $C([0;1])$ ($\longrightarrow \triangle$), choć zbiór jego wyrazów jest liniowo gęsty.