Analiza matematyczna dla informatyków

Sprawdziany

do Wykładów dla pierwszego roku informatyki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego w latach 2007/8, 2008/9, 2009/10, 2011/12, 2012/13, 2013/14, 2014/15, 2015/16, 2016/17.

Marcin Moszyński

4 października 2017

Niniejsze „Sprawdziany” to uzupełnienie mego podręcznika/skryptu *Analiza matematyczna dla informatyków* do Wykładów dla pierwszego roku informatyki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Zawarte są tu teksty zadań z kolokwiów (tylko tzw. ”Dużych- wspólnych dla całego roku) i pisemnych części egzaminów do prowadzonych przeze mnie wykładów z lat 2007/8 — 2016/17 (była przerwa w 2010/11).

Jedynymi odstępstwami od oryginalnych tekstów są pojawiające sie kilkakrotnie przypisy (dotyczą one pomyłek w treści zadań zauważonych już w trakcie lub po sprawdzianach) oraz lilkwidacja części nagłówków zadań i zminiejszenie wolnych miejsc na odpowiedzi w częśći pierwszej „nowszych” egzaminów.

Sprawdziany są ułożone wg. semestrów (zimowy, letni), a w ramach semestru: najpierw kolokwia, potem egzaminy, w obu przypadkach zamieszczone chronologicznie.

Autorem zadań nie jestem oczywiście tylko ja sam! Niektóre zadania, albo ich częsci lub ogólne pomysły, pochodzą od osób prowadzacych ćwiczenia do mych wykładów. Wszystkim Im przy tej okazji dziękuję za pomoc!

Marcin Moszyński

Sprawdziany

z

Semestru Zimowego

Kolokwium z Analizy Matematycznej dla Informatyków

28 listopada 2007r.

Rozwiązania poszczególnych zadań prosimy pisać na **OSOBNYCH, CZYTELNIE PODPISANYCH** kartkach.

W lewym górnym roku prosimy umieścić własne imię, nazwisko i numer indeksu, a poniżej numer zadania.
W prawym górnym rogu proszę podać numer grupy i nazwisko prowadzącego ćwiczenia.

Wszystkie zadania są jednakowo punktowane; (każde z zadań jest warte 15 punktów).
W czasie kolokwium wolno korzystać jedynie z kartek i pisaków. W szczególności niedozwolone jest używanie notatek, kalkulatorów, telefonów itp. udogodnień.

Rozwiązania powinny zawierać uzasadnienia (dowody). Należy się w nich powoływać na fakty, twierdzenia itp. z wykładu bądź z ćwiczeń.

Czas pracy 120 min.

Zadania

Zadanie 1. Wyznaczyć kres górny i kres dolny zbioru A, gdzie

$$A = \left\{ \frac{n+k^2}{2^n+k^2+1} : k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 2. Znaleźć granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, jeżeli

$$a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{n^{1000}}{2^n} \right)^n.$$

Zadanie 3. Znaleźć granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, określonego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{dla} \;\; n \geqslant 1.$$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot n^2 - 7n}{n^3+3n^2+1}.$$

Powodzenia!

Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 1. XII. 2008

- *Proszę o rozwiązania zadań na* ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu, grupa ćwiczeniowa ew. „NSI" ; oraz poniżej — „Zadanie nr...").*
- *Podczas kolokwium* ***nie wolno*** *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- *Wszystkie rozwiązania powinny zawierać* ***uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy*** *się w nich powoływać na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń.* ***Należy*** *także pamiętać o sprawdzaniu koniecznych do ich użycia założeń!*
- *Za każde z zadań można otrzymać maksymalnie 15 punktów.*
- *Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 20 min.*

Zadanie 1. Wyznacz kresy (inf i sup) zbioru

$$\left\{ \frac{nk}{1+2n+3k} \;:\; n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Czy zbiór ten posiada element największy? A najmniejszy (uwaga: $0 \notin \mathbb{N}$)?

Zadanie 2. Zakładamy, że $\{r_n\}_{n\geqslant 1}$ jest pewnym ciągiem o wszystkich wyrazach niezerowych takim, że

$$r_{2n} \longrightarrow \frac{1}{2008}, \qquad r_{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2009}.$$

Znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ określonego rekurencyjnie warunkami:

$$a_1 = x, \quad a_{n+1} = r_n \cdot a_n \quad \text{dla } \; n \geqslant 1,$$

w zależności od wyboru $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Znajdź granice ciągów o wyrazach zadanych następująco:

a) $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}}$; **b)** $b_n = \sqrt[(n!)]{\frac{1}{2^{(n!)}} - \frac{1}{3^{(n!)}}}$.

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, gdzie

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{2008}\right)^n} \cdot n^{2008} + \frac{\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3}}{\sqrt{n(n+1)} - 1}.$$

Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 24. XI. 2009

- *Proszę o rozwiązania zadań na* ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu, grupa ćwiczeniowa; oraz poniżej — „Zadanie nr...”).*
- *Podczas kolokwium* ***nie wolno*** *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- *Wszystkie rozwiązania powinny zawierać* ***uzasadnienia*** *(tzn. dowody). Należy się w nich* ***powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także pamiętać* ***o sprawdzaniu*** *koniecznych do ich użycia założeń!*
- *Za każde z zadań można otrzymać maksymalnie 15 punktów.*
- *Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 30 min.*

Zadanie 1. Wyznacz kresy (inf i sup) zbioru

$$\left\{ \frac{|3^n - k|}{n! + k + 30} : \ n, k \in \mathbb{N}, \ 3^n \neq k \right\}.$$ [1]

Zadanie 2. Znajdź granicę bądź wykaż, że granica nie istnieje, dla ciągów o wyrazach zadanych następująco:

a) $a_n = \sqrt{2^n + n^2} - \sqrt{2^n + 1}$;

b) $b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt[5]{b_n} \quad$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 3.

a) Zakładamy, że $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$ oraz, że $\dfrac{b_n}{a_n} \longrightarrow g$, gdzie $g \in (0; +\infty)$. Udowodnij, że $\sqrt[n]{b_n} \longrightarrow 1$.

b) Znajdź przykład ciągu $\{c_n\}$ o wyrazach dodatnich, dla którego $\sqrt[n]{c_n} \longrightarrow 0$.

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, jeżeli

a) $a_n = \dfrac{10^n + n^{100} + n \cdot e^{2n}}{11^n - n^7 \cdot 10^n}$;

b) $a_n = \dfrac{10^n + n^{100} + n \cdot e^{2n}}{11^n - n^7 \cdot 10^n - (10 + \frac{1}{n})^n}$.

---

[1] To „30” w mianowniku zostało marnie wybrane i skomplikowało niezamierzenie rozwiązanie....Zamysł był taki, by to była stała C taka, że dla wszystkich naturalnych n zachodzi $3^n \leqslant n! + C$. Np. $C = 123$ chyba byłoby już odpowiednie... — proszę sprawdzić!

Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 24. XI. 2011

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...”).*
- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być poparte dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).***
- *Każde z zadań warte jest 10 pkt, a podpunkty są równej wartości.*
- *Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz. i 15 min.*

Zadanie 1.
Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $n^3+2n \leqslant 5^n$. *Uwaga: za dowód słabszego wyniku, mianowicie, że dla dostatecznie dużych n zachodzi* $n^3+2n \leqslant 5^n$ *można otrzymać 4 pkt.*

Zadanie 2.
Znajdź granicę bądź wykaż, że ona nie istnieje, dla ciągów o wyrazach zadanych wzorami:

a) $\dfrac{\sqrt[n]{n^5-4}}{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2}}$; **b)** $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n^2+1}+3n}-\sqrt{2\sqrt[n]{3n^2+1}+n}}$.

Zadanie 3.
Znajdź granicę bądź wykaż, że ona nie istnieje, dla ciągów o wyrazach zadanych wzorami:

a) $\dfrac{2^n+(2,71)^n+\frac{4^n}{n^4}}{\frac{4^n}{n^4}+n^3 3^n}$; **b)** $\dfrac{2^n+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}+\frac{4^n}{n^4}}{\frac{4^n}{n^4}+n^3 3^n}$.

Zadanie 4.
Wyznacz kresy (inf i sup) zbioru $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{7^n-n}+k}{7+k^2} :\ n,k\in\mathbb{N}\right\}$.

Zadanie 5.
Rozstrzygnij które z poniższych zdań są prawdziwe:

a) *Dla każdego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i każdego $g\in\mathbb{R}$*

$$\left[\left(\forall_{r>1}\forall_{r'>1}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{\substack{n\geqslant N\\ n\in\mathbb{N}}}\ g-\frac{r}{r'}<a_n<g+\frac{r'}{r}\right)\Longrightarrow(a_n\longrightarrow g)\right]$$

b) *Dla każdego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i każdego $g\in\mathbb{R}$*

$$\left[(a_n\longrightarrow g)\Longrightarrow\left(\forall_{r\in(-1;0)}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{\substack{n\geqslant N\\ n\in\mathbb{N}}}\ |a_n-g|<r^2\right)\right].$$

Zadanie 6.
Rozstrzygnij, czy poniższe zdanie jest prawdziwe:
Dla każdego niepustego, ograniczonego z góry zbioru $A\subset\mathbb{R}$ i każdego $d\in\mathbb{R}$

$$\left[(\sup A=d\notin A)\Longrightarrow\left(\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{\substack{n\geqslant N\\ n\in\mathbb{N}}}\exists_{a\in A}\ d-\frac{1}{n}<a\leqslant d-\frac{1}{n+1}\right)\right].$$

Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 22. XI. 2012

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...”).*
- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być poparte dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).***
- *Każde z zadań warte jest 15 pkt.*
- *Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz.*

Zadanie 1.
Znajdź najmniejszą spośród liczb naturalnych N, takich, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant N$ zachodzi $6 + \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n}$ lub wykaż, że żadne takie N nie istnieje.

Zadanie 2.
Znajdź granicę bądź wykaż, że ona nie istnieje, dla ciągów o wyrazach zadanych wzorami:

a) $(1,007)^n \cdot \left(\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n+1}\right)^{2013}$; **b)** $\dfrac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{(n^4)}}{\left(3+\frac{3}{n^4}\right)^{(n^2)}}$; **c)** $\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\left(k^{999} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}$.

Zadanie 3.
Wyznacz kresy (inf i sup) poniższych zbiorów i zbadaj, czy zbiory te posiadają element najmniejszy oraz czy posiadają element największy:

a) $\left\{\frac{7n+9k}{9n+7k} : \ n,k \in \mathbb{N}\right\}$; **b)** $\left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{nk} : \ n,k \in \mathbb{N}\right\}$.

Zadanie 4.
Rozstrzygnij które z poniższych zdań są prawdziwe:

a) *Dla każdego ciągu liczbowego* $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ *i każdego* $g \in \mathbb{R}$

$$(a_n \longrightarrow g) \Longrightarrow \left(\exists_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant N} \ \ |a_{n+1} - a_n| < \frac{\epsilon}{4}\right).$$

b) *Dla każdego ciągu liczbowego* $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ *i każdego* $g \in \mathbb{R}$

$$(\ g = \sup\{a_n : \ n \geqslant 1001\} \ \text{ oraz } \ g = \inf\{a_n : n \geqslant 2012\}\ ) \Longrightarrow \ g = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

c) *Dla każdego ciągu liczbowego* $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ *i dla dowolnych* $g, h \in \mathbb{R}$,

$$\left(\lim_{n\to+\infty} a_{(2n)} = g \text{ oraz } \lim_{n\to+\infty} a_{(3n)} = h \text{ oraz } \forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_{(7n+1)} = \sqrt[n]{n}\right) \Longrightarrow \quad g = h.$$

Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 19 XII 2013

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...”).*
- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być poparte dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).***
- *Każde z zadań warte jest 15 pkt.*
- *Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz.*

Uwaga: dla „ustalenia uwagi” i uniknięcia pytań tu $0 \notin \mathbb{N}$.

Zadanie 1.
Wyznacz kresy (inf i sup) poniższych zbiorów i zbadaj, czy zbiory te posiadają element najmniejszy oraz czy posiadają element największy:

a) $\left\{\frac{2013}{1+\epsilon+\epsilon^{-1}} : \epsilon \in (0;\, 1)\right\}$; **b)** $\left\{\frac{2^{m+n}}{2^n+2^{2m}+2^{2n}} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Zadanie 2.
Znajdź granicę (o ile istnieje) dla ciągów o wyrazach zadanych wzorami:

a) $\frac{966\sqrt{n}-1025n^2+1320n^2\cdot\sqrt{n}}{1331\sqrt{n^5}-1410\sqrt[3]{n^4}+1569\sqrt[7]{n^6}}$; **b)** $\sqrt[n]{e^n-2^n}$; **c)** $\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}-2^n}$.

Zadanie 3.
Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1000\,n\sqrt{n}-\frac{3}{4}n^2}$; **b)** $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{(-1)^n}{n^2}}$.

Zadanie 4.
Niech $g = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n-1)^{(n+1)}}$ $\left(=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{11^5}+\frac{1}{14^6}+\ldots\right)$. Wykaż, że $0{,}258 < g < 0{,}259$.
Wskazówka: oblicz (zapisz w postaci dziesiętnej) drugą sumę częściową. Przypomnienie: kalkulator zabroniony...

Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 11 XII 2014 (ok. godz. 14.15)

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...").*
- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być poparte dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).***
- *Każde z zadań warte jest 15 pkt.*
- *Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz.*

Zadanie 1.
Wiemy, że wszystkie wyrazy ciągu $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ są w przedziale $[-10;10]$. Rozważamy ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ zadany rekurencyjnie wzorami:

$$a_0 = 700, \qquad a_{n+1} = 4a_n + r_n \qquad \text{dla } n \geqslant 0.$$

a) Udowodnij istnienie takiej liczby $C > 0$, że dla wszystkich $n \geqslant 0$ zachodzi $|a_n| \leqslant C \cdot (4,1)^n$. Wskaż pewną taką liczbę C.

b) Znajdź granicę ciągu zadanego wzorem $\dfrac{a_n + (4,2)^n}{(4,2)^n - n^{40}4^n}$. *Wolno tu korzystać z informacji zawartej w* **a)** *nawet, gdy się tego punktu nie rozwiązało.*

Zadanie 2.
Znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ zadanego wzorem $\quad a_n = \left(1 - \sqrt[n]{\dfrac{1}{4^n} + \dfrac{n}{7^n}}\right)^n$

lub wykaż, że granica tego ciągu nie istnieje.

Zadanie 3.
Rozważamy szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$. **a)** Znajdź jego sumę, jeżeli ona istnieje. **b)** Znajdź $\sup\{S_n : n \geqslant 0\}$, gdzie $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ jest ciągiem sum częsciowych tego szeregu.

Zadanie 4.
Zbadaj zbieżność szeregów: **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \frac{1333}{n}}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2014n - 2n^{\frac{2}{3}}} + \frac{(-1)^n}{n + \frac{1333}{n}}\right)$.

Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 3 XII 2015 (ok. godz. 14.15)

- Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...”).
- Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być poparte dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).***
- Każde z zadań warte jest 17,5 pkt ($4 \cdot 17,5 = 70$)
- Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz.

Zadanie 1.
Wykaż zbieżność i znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ określonego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Zadanie 2.

Znajdź granicę ciągu $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$ zadanego dla $n \in \mathbb{N}$ wzorem $c_n = \sqrt[n]{5^n + \sum_{k=1}^{n} \left(3 + \frac{1}{k}\right)^k}$ lub wykaż, że granica tego ciągu nie istnieje.

Zadanie 3.
Niech $x_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$ dla $n \geqslant 1$. Zbadaj zbieżność, bezwzględną zbieżność oraz warunkową zbieżność szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x_n$,

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (x_n)^p$ dla każdej wartości parametru **całkowitego** $p \geqslant 2$.

Zadanie 4.
Ciąg liczb rzeczywistych $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ jest ograniczony. Rozważamy pewien ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ spełniający wzór rekurencyjny:

$$a_{n+1} = 10a_n + r_n \quad \text{dla } n \geqslant 0.$$

Udowodnij, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(10,2)^n}$ jest bezwzględnie zbieżny.

Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 15 XII 2016 (ok. godz. 14.15)

- Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...").
- Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być poparte dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).***
- Każde z zadań warte jest 17,5 pkt ($4 \cdot 17,5 = 70$)
- Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz.

Uwaga: dla uniknięcia pytań — przypomnienie: tu $0 \notin \mathbb{N}$.

Zadanie 1.
Znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ określonego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{dla } \ n \geqslant 1$$

lub wykaż, że ciąg ten nie ma granicy.

Zadanie 2.
Niech $c_n := \sqrt[n]{n!}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

a) Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $c_n \leqslant n$.

b) Wykaż, że $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$.

Uwaga: nie zapomnij, że $\sqrt[n]{\cdot}$ pojawia się tu dwukrotnie — po raz pierwszy w definicji c_n...

c) Zbadaj zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$.

Zadanie 3.
Szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny oraz $a_n \neq -1$ dla wszystkich $n \geqslant 0$. Wykaż zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.
Czy musi on (ten drugi szereg) być bezwzględnie zbieżny?

Zadanie 4.
Zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+7}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{n}{2016} - \left(1 - \frac{1}{2016}\right)^n}$.

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 4. II. 2008

Rozwiązania poszczególnych zadań należy pisać na ***osobnych, czytelnie podpisanych*** *kartkach — proszę o napisanie w lewym górnym rogu* ***każdej*** *kartki swego imienia, nazwiska i numeru indeksu oraz poniżej — numeru rozwiązywanego zadania.*
W czasie egzaminu z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp. korzystać ***nie wolno****.*
Rozwiązania, poza zad. 1. (A), 2. (A), 3. (B) oraz 4. (A), powinny zawierać uzasadnienia (tzn. dowody). ***Należy*** *się w nich powoływać na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń.*
Czas na rozwiązanie zadań: 160 min.

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o granicy ciągu monotonicznego".

(B) [**6 pkt.**] Znajdź przykład takiego ciągu liczbowego $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant N}$ **nie** jest monotoniczny oraz zachodzi $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

(C) [**10 pkt.**] Znajdź wszystkie takie $p > 0$, dla których jest zbieżny (tj. ma granicę skończoną) ciąg zadany dla $n \in \mathbb{N}$ wzorem $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p + k + 1}{k^3 - k^2 + 1}$.

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o osiąganiu wartości pośrednich"(Bolzano „o własności Darboux").

(B) [**6 pkt.**] O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [0;1] \cup (2;3) \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $[0;1]$, **b)** $[0;1] \cup [2;3]$, **c)** zbiór trzyelementowy $\{1,\ 2,\ 3\}$.

(C) [**10 pkt.**] **a)** Wykaż, że równanie $\ln x = \frac{1}{3}x$ ma przynajmniej dwa rozwiązania $x > 0$. **b)** Czy istnieją trzy różne rozwiązania tego równania?

Zadanie 3.

(A) [**10 pkt.**] Niech $\alpha > 0$ i rozważmy funkcję $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xe^{-\alpha x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Znajdź kres górny i kres dolny zbioru wartości tej funkcji.

(B) [**4 pkt.**] Podaj wzory definiujące n-ty wielomian Taylora i n-tą resztę Taylora funkcji f w punkcie x_0. Sformułuj twierdzenie Peano o postaci reszty Taylora.

(C) [**6 pkt.**] **a)** Czy funkcja g z punktu (A) dla $\alpha = 1$ jest sumą jakiegoś szeregu potęgowego o środku w $x_0 = 0$ (na całej swej dziedzinie)? **b)** Znajdź wartość pochodnej rzędu 1000 powyższej funkcji g w punkcie 0.

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a „o wartości średniej".

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód **jednego** twierdzenia wybranego spośród powyższych.

(C) [**10 pkt.**] Niech $f : [1;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = a$ oraz niech $a_n = f(n+1) - f(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
(drugi termin) dla Informatyków, 4. III. 2008

Rozwiązania poszczególnych zadań należy pisać na ***osobnych, czytelnie podpisanych*** *kartkach — proszę o napisanie w lewym górnym rogu* ***każdej*** *kartki swego imienia, nazwiska i numeru indeksu oraz poniżej — numeru rozwiązywanego zadania.*
W czasie egzaminu z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp. korzystać ***nie wolno****.*
Rozwiązania, poza zad. 1. (A), 2. (A), 3. (A) oraz 4. (A), powinny zawierać uzasadnienia (tzn. dowody). ***Należy*** *się w nich powoływać na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń.*
Czas na rozwiązanie zadań: 160 min.

Zadanie 1.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj „kryterium porównawcze" zbieżności szeregów.

(B) **[6 pkt.]** Znajdź przykłady **a)** szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ zbieżnego warunkowo takiego, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_n| < \frac{1}{n}$; **b)** szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ rozbieżnego takiego, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_n| < \frac{1}{n}$.

(C) **[10 pkt.]** Zakładamy, że $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Wykaż, że $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Czy przy założeniu jedynie zbieżności obu szeregów $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ musi być zbieżny?

Zadanie 2.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie Weierstrassa „o osiąganiu kresów".

(B) **[6 pkt.]** O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [0;1] \cup [2;3] \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $[0;1]$, **b)** $[0;1) \cup (2;3]$, **c)** $[0;2) \cup (1;3]$.

(C) **[10 pkt.]** Wykaż, że funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \ln(x^2 + \frac{3}{4}) - x^2$ osiąga swój kres górny. Znajdź ten kres.

Zadanie 3.

(A) **[4 pkt.]** Podaj wzory definiujące n-ty wielomian Taylora i n-tą resztę Taylora funkcji f w punkcie x_0. Sformułuj twierdzenie Lagrange'a „o postaci reszty Taylora".

(B) **[6 pkt.]** Niech $R(x) = \sin x - (x - \frac{x^3}{3!})$. Rozstrzygnij, czy jest możliwe by $|R(1)|$ było większe od $\frac{1}{24}$.

(C) **[10 pkt.]** Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Zadanie 4.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie „o granicy iloczynu dwóch ciągów" (część tw. „o rachunkowych własnościach granicy" dla ciągów).

(B) **[10 pkt.]** Podaj dowód powyższego twierdzenia dla przypadku granic skończonych (można pominąć dowód lematu użytego na wykładzie w tym dowodzie).

(C) **[10 pkt.]** Zbadaj, czy ciąg zadany wzorem

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 \cdot 1 + 1} \cdot \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 \cdot 2 + 1} \cdot \ldots \cdot \frac{n - \frac{1}{2}}{2n + 1}$$

posiada granicę; znajdź ją w przypadku odpowiedzi twierdzącej.

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków - termin I, 30. I. 2009

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu; oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno*** *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), powinny zawierać ***uzasadnienia*** *(tzn. dowody). Należy się w nich* ***powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także pamiętać* ***o sprawdzaniu*** *wszystkich koniecznych do ich użycia założeń! Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 40 min.*

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj kryterium Dirichleta zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**6 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$
a) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny?
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy oba szeregi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ są zbieżne?

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n^p(n+2009)}},$$

w zależności od parametru $p > 0$.

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Podaj definicję ciągłości funkcji w punkcie w wersji Heinego i w wersji Cauchy'ego.

(B) [**6 pkt.**] Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ nieciągłej, która jest
a) ograniczona; **b)** nieograniczona.

(C) [**10 pkt.**] Wykaż, że równanie $x^5 - 5x = \sqrt{2}$ posiada przynajmniej 3 rozwiązania $x \in \mathbb{R}$. Czy posiada ich więcej niż 3?

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o ekstremach lokalnych".

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia dla przypadku maksimum lokalnego.

(C) [**10 pkt.**] Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{e^x}.$$

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie wiążące wypukłość funkcji z własnościami jej **pierwszej** pochodnej.

(B) [**6 pkt.**] Rozważamy wielomiany określone na całej prostej $\mathbb{R}$.
a) Podaj przykład wielomianu, który nie jest ani funkcją wypukłą, ani funkcją wklęsłą.
b) Podaj przykład wielomianu, który jest funkcją wypukłą i jednocześnie funkcją wklęsłą.
c) Wyjaśnij, dlaczego wielomian drugiego stopnia jest funkcją wypukłą lub funkcją wklęsłą.

(C) [**10 pkt.**] O dwukrotnie różniczkowalnej funkcji $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wiadomo, że $g(0) = 999$, $g'(0) = 1000$ oraz że $|g''(x)| \leqslant 10000$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Niech $K := g\left(\frac{1}{1000}\right)$. Wykaż, że liczba K ma w zapisie dziesiętnym drugą cyfrę po przecinku równą 9 lub 0. Jakie są jej wcześniejsze cyfry (przed i po przecinku)?

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków - termin II, 4. III. 2009

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno korzystać z*** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), ***powinny zawierać uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy się w nich powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także* ***pamiętać o sprawdzaniu założeń*** *koniecznych do ich użycia!*
Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 40 min.

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o trzech ciągach".

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia.

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ zadanego wzorem $a_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\left(2-\frac{1}{k}\right)^k}$.

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**6 pkt.**] Wskaż przykład takiego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, że
a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest rozbieżny;
b) nie istnieje $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny.

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2009^n}{\sqrt[2009]{n!}} + \frac{(-1)^n}{n+\frac{10100}{n}}\right)$.

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Podaj definicję jednostajnej ciągłości i wyjaśnij **jednym niedługim zdaniem** sens różnicy w definicjach pomiędzy ciągłością („def. Cauchy'ego") a jednostajną ciągłością.

(B) [**6 pkt.**] Czy istnieje funkcja $f:[0;1]\longrightarrow \mathbb{R}$, która
a) jest ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła;
b) jest różniczkowalna, ale nie jest jednostajnie ciągła;
c) jest jednostajnie ciągła i jej zbiór wartości jest dwuelementowy.

(C) [**10 pkt.**] Dla każdego $\alpha > 0$ znajdź zbiór wartości funkcji $g:(0;1]\longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$g(x) = \ln(x^2+1) - \alpha \ln x.$$

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Peano o reszcie Taylora.

(B) [**6 pkt.**] Znajdź 2-gi, 3-ci oraz 1000-czny wielomian Taylora o środku w $x_0 = 0$ funkcji $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = x^3$. Zilustruj powyższe twierdzenie tymi trzema przykładami.

(C) [**10 pkt.**] O funkcji $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ wiadomo, że jest różniczkowalna 1000 krotnie w punkcie 0 oraz $f^{(k)}(0) = k!$ dla każdego $k = 0,\ldots,1000$. Oblicz (o ile istnieje) granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{1000} x^k + 1 - \cos(x^{500})}{\sin(x^{1000})}.$$

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków - termin II' dla NSI, 2. IX. 2009

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno korzystać z*** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), ***powinny zawierać uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy się w nich powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także* ***pamiętać o sprawdzaniu założeń*** *koniecznych do ich użycia!*
Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz.

Zadanie 1.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie „o trzech ciągach".

(B) **[6 pkt.]** Wskaż przykłady ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ oraz $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ o następujących własnościach:
a) $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny, ale jego granica **nie** jest kresem górnym ani dolnym zbioru jego wyrazów $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$;
b) $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny i jego granica jest kresem górnym zbioru jego wyrazów, ale dla każdego $N \in \mathbb{N}$ ciąg ten numerowany od N (tzn. ciąg $\{b_n\}_{n\geqslant N}$) **nie** jest monotoniczny.

(C) **[10 pkt.]** Zbadaj zbieżność ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ zadanego wzorem $a_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\left(3-\frac{1}{2^k}\right)^k}$.

Zadanie 2.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj „kryterium porównawcze" zbieżności szeregów liczbowych.

(B) **[6 pkt.]** Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$
a) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny?
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy oba szeregi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ są zbieżne?

(C) **[10 pkt.]** Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^p \cdot \sqrt{n+1}},$$

w zależności od parametru $p > 0$.

Zadanie 3.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie „o osiąganiu wartości pośrednich"(tzn., tw. Bolzano „o własności Darboux").

(B) **[6 pkt.]** O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [0;1] \cup (2;3) \longrightarrow \mathbb{R}$:
a) $[0;1]$, **b)** $[0;1] \cup [2;3]$, **c)** zbiór trzyelementowy $\{1, 2, 3\}$.

(C) **[10 pkt.]** **a)** Wykaż, że równanie $\ln x = \frac{1}{3}x$ ma przynajmniej dwa rozwiązania $x > 0$. **b)** Czy istnieją trzy różne rozwiązania tego równania?

Zadanie 4.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie Lagrange'a „o wartości średniej".

(B) **[10 pkt.]** Podaj dowód powyższego twierdzenia.

(C) **[10 pkt.]** Niech $f : [1; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2009$ oraz niech $a_n = f(n+1) - f(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż zbieżność ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i znajdź $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków - termin I, 1 II 2010

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno korzystać z*** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), ***powinny zawierać uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy się w nich powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także* ***pamiętać o sprawdzaniu założeń*** *koniecznych do ich użycia!*
Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 50 min.

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Bolzano – Weierstrassa.

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia (jeśli w dowodzie używasz lematu użytego na wykładzie, podaj jego sformułowanie, ale dowodu nie zamieszczaj).

(C) [**10 pkt.**] Oblicz, jeśli istnieje, granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ danego wzorem $a_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\left(k \cdot \frac{10k+70}{k+3}\right)}$.

Uwaga: tu **nie** przyda się raczej twierdzenie z punktu (A).

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj kryterium Leibniza zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**6 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$

a) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny?

b) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2}$ jest bezwzględnie zbieżny?

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n^2 - n^{\frac{3}{2}}} + \frac{(-1)^n}{n - \frac{13}{2}\sqrt{n}}\right)$.

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Bolzano „o własności Darboux”(tj. „o osiąganiu wartości pośrednich”).

(B) [**6 pkt.**] Rozstrzygnij, czy dla każdego wielomianu f o współczynnikach rzeczywistych, postaci $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, gdzie $n \geqslant 1$, poniższe zdanie jest prawdziwe:

a) jeżeli n jest nieparzyste i $a_n \neq 0$, to równanie $f(x) = 0$ posiada pierwiastek rzeczywisty;

b) jeżeli $a_n = 1$ oraz $a_0 = -1$, to równanie $f(x) = 0$ posiada pierwiastek rzeczywisty;

c) jeżeli n jest parzyste oraz $a_n = 1$ i $a_0 = -1$, to równanie $f(x) = 0$ posiada co najmniej dwa pierwiastki rzeczywiste.

(C) [**10 pkt.**] Ile rozwiązań $x > 0$ posiada równanie $\sqrt{x} = 7 \ln x$?

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Peano o postaci reszty Taylora.

(B) [**6 pkt.**] Wykaż, że jeśli $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna 2-krotnie w punkcie 0 oraz $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, to $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

(C) [**10 pkt.**] Oblicz, o ile istnieje, granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3) - x^3}{x^3 \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2\right)}.$$

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków - termin II, 3 III 2010

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno korzystać z*** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), ***powinny zawierać uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy się w nich powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także* ***pamiętać o sprawdzaniu założeń*** *koniecznych do ich użycia!*
Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 50 min.

Zadanie 1.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie „o trzech ciągach”.

(B) **[10 pkt.]** Podaj dowód powyższego twierdzenia.

(C) **[10 pkt.]** Oblicz, jeśli istnieje, granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 8}$ danego wzorem $a_n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{7^n+n}-\frac{1}{7}\right)^n}{7^n-n^7}$.

Zadanie 2.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj kryterium asymptotyczne zbieżności szeregów liczbowych.

(B) **[6 pkt.]** Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ spełniającego $\dfrac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{a_n} \longrightarrow 1$

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n}$ jest zbieżny? **b)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n}$ jest bezwzględnie zbieżny? **c)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny?

(C) **[10 pkt.]** Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^n - n^{2010}4^n}{3n5^n + (\ln n)^{100}\left(\frac{9}{2}\right)^n}$.

Zadanie 3.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie Weierstrassa „o osiąganiu kresów”.

(B) **[6 pkt.]** O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [10;11] \cup [12;13] \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $[-1;1]$, **b)** $[0;100) \cup (121;131]$, **c)** $[10;20) \cup (15;30]$.

(C) **[10 pkt.]** Czy funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \ln(e^x + e^9) - e^x$ osiąga któryś ze swych kresów? Znajdź zbiór wartości tej funkcji.

Zadanie 4.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie Lagrange'a o postaci reszty Taylora.

(B) **[6 pkt.]** Niech T_3 oznacza 3-ci wielomian Taylora funkcji f w punkcie x_0 dla

a) $f(x) = 2x^3 + x - 6$, $x_0 = 0$; **b)** $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$.

W obu przypadkach oblicz $T_3(1)$.

(C) **[10 pkt.]** Znajdź pewne przybliżenie wymierne liczby $\sqrt[1000]{e}$ z dokładnością do 10^{-6}.

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 23 I. 2012, godz. 9.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać* ***z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*** *Rozwiązania, powinny być poparte dowodem (poza punktami (A) w zad. 2, 3, 4). Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń.* ***Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*
Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 10 min.***

Zadanie 1.

(A) [**5 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o trzech ciągach".

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia.

(C) [**10=5+5 pkt.**] Wiemy, że wszystkie wyrazy ciągu $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ są w przedziale $[-10;10]$. Rozważamy ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ zadany rekurencyjnie wzorami:

$$a_0 = 700, \qquad a_{n+1} = 4a_n + r_n \qquad \text{dla } n \geqslant 0.$$

a) Udowodnij istnienie takiej liczby $C > 0$, że dla wszystkich $n \geqslant 0$ zachodzi $|a_n| \leqslant C \cdot (4,1)^n$. Wskaż pewną taką liczbę C.

b) Znajdź granicę ciągu zadanego wzorem $\dfrac{a_n + (4,2)^n}{(4,2)^n - n^{40}4^n}$. Wolno tu korzystać z informacji zawartej w **a)** nawet, gdy się tego punktu nie rozwiązało.

Zadanie 2.

(A) [**5 pkt.**] Sformułuj „kryterium porównawcze" zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**6=3+3 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$
a) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^2$ jest zbieżny?
b) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^5$ jest bezwzględnie zbieżny?

(C) [**10 pkt.**] Dla każdego $y \in \mathbb{R}$ zbadaj, czy zbieżny jest szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n + 1}{5^n + n^5}$.

Zadanie 3.

(A) [**5 pkt.**] Sformułuj kryterium Dirichleta zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**6=3+3 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$

a) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt[2012]{n}}$ jest zbieżny?

b) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$?

(C) [**10=5+5 pkt.**] Zbadaj, czy poniższe szeregi są zbieżne:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - 20\sqrt{n} + 101}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(\ln n)^2 - 20\ln n + 101}$.

Zadanie 4.

(A) [**5 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Weierstrassa „o osiąganiu kresów".

(B) [**6=3+3 pkt.**] Czy funkcja $f : [0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

a) jest ograniczona?
b) osiąga swoją największą wartość?

(C) [**10 pkt.**] Funkcja $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, a kres górny zbioru jej wartości jest równy 1. Wykaż, że istnieje $x \in [0;1]$ takie, że $f(x) = \cos x$.

Egzamin „poprawkowy” z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 29 II 2012, godz. 16.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać z* ***notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*** *Rozwiązania (prócz (A) w zad. 2, 3, 4), muszą być poparte dowodami, a ich poszczególne kroki, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń.* ***Należy się powoływać*** *na nie przy każdym użyciu, w sposób umożliwiający ich identyfikację (np. podając nazwę).*
Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 10 min.***

Zadanie 1.

(A) [**5 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o granicy ciągu monotonicznego”.

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia.

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ określonego poniższym wzorem rekurencyjnym i oblicz jego granicę, jeżeli istnieje:

$$a_1 = 7, \qquad a_{n+1} = \frac{2^n + n^{\left(10^{17}\right)}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n^2)} - \frac{1}{n}} \cdot a_n, \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Zadanie 2.

(A) [**5 pkt.**] Sformułuj „kryterium asymptotyczne” zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**9=3+3+3 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$

a) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} \cdot a_n$ jest zbieżny bezwzględnie?

b) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} \cdot a_n$ jest zbieżny?

c) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n} \cdot a_n$ jest zbieżny?

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - n^2 e^n}{10n3^n + 2^n \cdot \ln(n^{20}+1)}$.

Zadanie 3.

(A) [**5 pkt.**] Sformułuj kryterium Leibnitza zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**9=3+3+3 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$

a) jeżeli $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n|a_n|$ jest zbieżny?

b) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n|a_n|$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$?

c) jeżeli $\{|a_n|\}_{n\geqslant 1}$ jest malejący i $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest bezwzględnie zbieżny?

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj, czy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{(n^2)}}{(\ln n)^2 - 20\ln n + 108}$ jest zbieżny.

Uwaga! Dalszy ciąg po drugiej stronie.

Zadanie 4.

(A) [**8=2+3+3 pkt.**] Sformułuj definicje: punktu skupienia zbioru, granicy funkcji w punkcie oraz ciągłości funkcji w punkcie.

(B) [**9=3+3+3 pkt.**] Rozważamy funkcję $f : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną dla $x \geqslant 0$ wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} & \text{dla } x \neq 1 \\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \right)^{-1} & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

a) Rozstrzygnij, czy f jest ciągła.
b) Rozstrzygnij, czy f osiąga swoje oba kresy.
c) Znajdź obraz funkcji f.

(C) [**10 pkt.**] Funkcja $f : (0; 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i osiąga w punkcie 3 swą największą wartość. Wykaż, że istnieje liczba x_0, dla której $f(x_0) = f(3x_0)$.

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 28 I. 2013, godz. 9.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać* ***z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*** *Rozwiązania, powinny być poparte dowodem (poza punktami (A) w zad. 2, 3, 4). Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń.* ***Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*
Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 30 min.***

Zadanie 1.

(A) **[8=3+5 pkt.]** Podaj definicję kresu górnego zbioru i sformułuj twierdzenie „o granicy ciągu monotonicznego".

(B) **[10 pkt.]** Podaj dowód powyższego twierdzenia dla przypadku ciągu rosnącego (zarówno dla ciągu ograniczonego jak i dla nieograniczonego).

(C) **[10=5+5 pkt.]** Zbadaj zbieżność ciągów $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ określonych poniższymi wzorami i oblicz ich granice, jeżeli istnieją: **a)** $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2012}{2013}\right)^n - \left(\frac{2011}{2012}\right)^n}$ dla $n \geqslant 1$,
b) $A_1 = 17$, $A_{n+1} = a_n \cdot A_n$ dla $n \geqslant 1$ (uwaga: a_n zadany jest w podpunkcie **a)**).

Zadanie 2.

(A) **[10=5+5 pkt.]** Sformułuj twierdzenia: „o granicy uogólnionego podciągu" oraz Bolzano – Weierstrassa.

(B) **[8=4+4 pkt.]** Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i jego dowolnego podciągu $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$
a) jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ też jest zbieżny? **b)** jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ także jest bezwzględnie zbieżny?

(C) **[10 pkt.]** Rozważamy taki ograniczony ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, że każdy jego podciąg zbieżny ma granicę mniejszą niż 1. Wykaż, że $a_n < 1$ dla dostatecznie dużych n.

Zadanie 3.

(A) **[11=3+3+5 pkt.]** Podaj definicje zbieżności szeregu oraz asymptotycznego podobieństwa ciągów; sformułuj „kryterium asymptotyczne" zbieżności szeregów liczbowych.

(B) **[8=4+4 pkt.]** Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$
a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) a_n$ jest zbieżny? **b)** jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny?

(C) **[10 pkt.]** Dla każdego parametru $s > 0$ zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{(1+2+\cdots+n)^s}.$$

Zadanie 4.

(A) **[11=3+3+5 pkt.]** Podaj definicje: ciągłości funkcji w punkcie oraz jednostajnej ciągłości funkcji. Sformułuj twierdzenie „o osiąganiu wartości pośrednich".

(B) **[6=2+2+2 pkt.]** O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:
a) $[0;1)$, **b)** $(0;1] \cup [2;3]$, **c)** zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

(C) **[10 pkt.]** Rozważamy funkcję $f : [0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną dla $x \geqslant 0$ wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n n x^n & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \sum_{n=0}^{101} \left(\frac{1}{2}\right)^n n x^n & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Znajdź wszystkie punkty, w których f jest ciągła oraz znajdź obraz f.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 6 III. 2013, godz. 16.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *i niżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać* ***z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*** *Rozwiązania, poza punktami (A) w zad. 2, 3, 4, powinny być zredagowanymi w przejrzystej formie ścisłymi dowodami sformułowanych wyników/odpowiedzi (mogą być wzbogacone o ogólne idee, czy intuicje, ale nie zastąpione przez nie...). Poszczególne kroki dowodów, poza zupełnie elementarnymi, powinny bazować na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń.* ***Twierdzenia te proszę jawnie wskazywać*** *(np. podając ich nazwę).*
Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 30 min.***

Powodzenia! *M.M.*

Zadanie 1.

(A) [**8=4+4 pkt.**] Podaj definicję zbioru liczb naturalnych i sformułuj Zasadę Indukcji Zupełnej.

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód Zasady Indukcji Zupełnej.

(C) [**10=5+5 pkt.**] Dla każdego $c \in [0; 2]$ zbadaj, czy ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ zadany warunkami

$$a_1 = c, \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{(a_n - 1)^2}{17} \quad \text{dla } n \geqslant 1$$

jest monotoniczny od pewnego miejsca oraz zbadaj istnienie granicy i znajdź jej wartość, gdy istnieje.

Zadanie 2.

(A) [**8=4+4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o trzech ciągach" oraz kryterium „porównawcze" zbieżności szeregów.

(B) [**10=5+5 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$
a) jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to ciąg $\{K_n\}_{n\geqslant 1}$ zadany dla $n \geqslant 1$ wzorem

$$K_n = \frac{1}{\ln(n^2+1)} \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(3k^3 - 2k)}{7 - k^3} \sin k$$

jest zbieżny?
b) jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to istnieje taki podciąg $\{a'_n\}_{n\geqslant 1}$ ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ jest bezwzględnie zbieżny?

(C) [**10 pkt.**] Wykaż, że jeśli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \leqslant d_n \leqslant e_n \leqslant f_n$ dla dostatecznie dużych n oraz $\lim_{n\to+\infty}(f_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty}(d_n - c_n) = 2013$, to $\{e_n - b_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny.

Zadanie 3.

(A) [**8=2+2+4 pkt.**] Podaj definicję ciągu sum częściowych szeregu i sumy szeregu oraz sformułuj kryterium Dirichleta zbieżności szeregów.

(B) [**12=4+4+4 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$
a) jeżeli ciąg $\{\sum_{k=1}^{3n} a_k\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny?
b) gdy ciąg $\{\sum_{k=1}^{3n} |a_k|\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny?
c) jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny oraz dla dostatecznie dużych n zachodzi $\frac{1}{n} \leqslant a_n - a_{n+1}$, to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny?

VERTE!

(C) **[10=7+3 pkt.]** Ciąg $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ ma dodatnie wyrazy oraz zachodzi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln b_n}{\ln n} = g.$$

Udowodnij, że jeśli $g < -1$, to szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny. Czy dla zbieżności tego szeregu wystarczyłoby, że $g \leqslant -1$?

Zadanie 4.

(A) **[11=3+3+5 pkt.]** Podaj definicje: ciągłości funkcji w punkcie oraz jednostajnej ciągłości funkcji. Sformułuj twierdzenie Weierstrassa „o osiąganiu kresów".

(B) **[9=3+3+3 pkt.]** O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [0;1) \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $(0;1)$, **b)** $\mathbb{R}$, **c)** zbiór wszystkich liczb wymiernych z $[0;100]$.

(C) **[10=4+6 pkt.]** Rozważamy funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą $f(x+1) = f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że f osiąga swoj kres dolny i górny oraz, że istnieje nieskończenie wiele takich $c \in \mathbb{R}$, że $f(c+\pi) = f(c)$.

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 28 I 2014, godz. 9.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać* ***z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*** *Rozwiązania powinny być poparte dowodem, poza punktami (A). Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń.* ***Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*
Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 30 min.***

Zadanie 1.

(A) [**10=5+5 pkt.**] Podaj definicję granicy ciągu (w przypadku granicy skończonej oraz granicy nieskończonej) i sformułuj twierdzenie „o trzech ciągach".

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód twierdzenia „o trzech ciągach" dla przypadku granicy skończonej.

(C) [**10=5+5 pkt.**] Zbadaj zbieżność ciągów $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ określonych poniższymi wzorami i oblicz ich granice, jeżeli istnieją:

a) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^{17}\,9^n}{10^n} + \sum\limits_{k=1}^{n^{1001}} \dfrac{1}{k}}$, **b)** $b_1 = 0, \quad b_{n+1} = \dfrac{1}{2-b_n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Zadanie 2.

(A) [**10=5+5 pkt.**] Podaj definicję ciągu Cauchy'ego i sformułuj twierdzenie „o zupełności $\mathbb{R}$".

(B) [**10=4+3+3 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i dla każdej funkcji $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ **a)** jeżeli f jest ciągła oraz $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to $\{f(a_n)\}_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego? **b)** jeżeli $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(0)$, to f jest ciągła w 0? **c)** jeżeli f jest ciągła w 0 i $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, to $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(0)$?

(C) [**10 pkt.**] Czy to prawda, że ciąg $\{C_n\}_{n\geqslant 1}$ zadany dla $n\in\mathbb{N}$ wzorem:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(-1)^k k + 2}$$

a) jest ciągiem Cauchy'ego? **b)** jest ograniczony?

Zadanie 3.

(A) [**10=5+5 pkt.**] Sformułuj „kryterium porównawcze" zbieżności szeregów oraz podaj definicję asymptotycznego podobieństwa ciągów i sformułuj „kryterium asymptotyczne".

(B) [**10=3+3+4 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ograniczonego ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ o wyrazach różnych od 0 **a)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n}$ jest rozbieżny? **b)** jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n a_{n+1} > 0$, to $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n}$ jest rozbieżny? **c)** jeżeli $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n a_{n+1} < 0$, to $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n}$ jest zbieżny warunkowo?

(C) [**10=4+6 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregów: **a)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, **b)** $\sum\limits_{n=10}^{+\infty} \left(\dfrac{n! - 3^n}{(n+1)! + n2^n + 2014}\right)^{\alpha}$ — dla wszystkich wartości parametru $\alpha\in\mathbb{R}$.

Zadanie 4.

(A) [**10=3+4+3 pkt.**] Podaj definicję ciągłości funkcji oraz ciągłości funkcji w punkcie. Sformułuj twierdzenie „o osiąganiu wartości pośrednich" oraz twierdzenie „o osiąganiu kresów".

(B) [**10=2+2+2+2+2 pkt.**] Dla każdego z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy istnieje funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ taka, że zbiór ten jest jej obrazem:
a) $\{1;2\}$, **b)** $(-1;0)\cup(0;1)$, **c)** $(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$, **d)** $[0;1]\cup[2;3]$, **e)** $[0;1]$.

(C) [**10 pkt.**] Wykaż, że równanie:

$$\sqrt{x^2+49} = \sqrt[3]{x^4+27} + 1$$

posiada przynajmniej dwa rozwiązania $x\in\mathbb{R}$.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 5 I 2014[2], godz. 16.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać* ***z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*** *Rozwiązania powinny być poparte dowodem, poza punktami (A). Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń.* ***Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*
Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 30 min.***

Zadanie 1.

(A) [**10=5+5 pkt.**] Podaj definicję granicy ciągu (w przypadku granic skończonych oraz nieskończonych) i sformułuj twierdzenie „o granicy ciągu monotonicznego”.

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód twierdzenia „o granicy ciągu monotonicznego” dla przypadku ciągu malejącego ograniczonego z dołu.

(C) [**10=5+5 pkt.**] Zbadaj zbieżność ciągów $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ określonych poniższymi wzorami i oblicz ich granice, jeżeli istnieją:
a) $a_1 = \frac{\pi e}{12}$, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$, **b)** $b_n = \sqrt[n]{|2014^n - n^{2014}2013^n|}$.

Zadanie 2.

(A) [**10=5+5 pkt.**] Sformułuj kryterium porównawcze zbieżności szeregów. Podaj następujące definicje: ciągu sum częściowych szeregu, szeregu zbieżnego, szeregu zbieżnego warunkowo oraz szeregu zbieżnego bezwzględnie.

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód kryterium porównawczego.

(C) [**10=5+5 pkt.**] Szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny. Definiujemy $a_n = \frac{3n^2}{n^2+1} \cdot b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
a) Wykaż zbieżność $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. **b)** Wykaż, że $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie $\iff$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny bezwzględnie.

Zadanie 3.

(A) [**10=5+5 pkt.**] Sformułuj kryterium Dirichleta oraz kryterium, d'Alemberta zbieżności szeregów.

(B) [**10=2+2+2+2+2 pkt.**] Czy to prawda, że $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i każdego ciągu $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, które spełniają:
a) $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest malejący i zbieżny do 0 oraz $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 1$?
b) $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest malejący i zbieżny do 1 oraz $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 0$?
c) $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony i istnieje taki $x \in (-1; 1)$, że $b_n = x^n$ dla każdego $n \geqslant 1$?
d) $(-1)^n a_n = 1$ dla $n \geqslant 17$ i $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny do 0?
e) $a_n = (-1)^{(n \mod 2013)}$ i $b_n = \frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 2014$?

(C) [**10=5+5 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\sqrt[n]{n} - 1)$, gdy $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ zadany jest wzorem:
a) $(-1)^n$, **b)** $(n \mod 5) - 2$.
Uwaga: symbol $(n \mod k)$ oznacza resztę z dzielenia n przez k.

Zadanie 4.

(A) [**10=3+3+2+2 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o osiąganiu wartości pośrednich” oraz twierdzenie „o osiąganiu kresów”. Podaj definicję funkcji jednostajnie ciągłej oraz funkcji ciągłej.

(B) [**10=2+2+2+2+2 pkt.**] Jeżeli $D \subset \mathbb{R}$ oraz $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, to:
a) D jest przedziałem domkniętym oraz f jest ciągła; **b)** f jest ciągła i ograniczona; **c)** gdy D jest przedziałem domkniętym, to $f(D)$ też jest przedziałem domkniętym, **d)** gdy f jest nieograniczona, to także D jest nieograniczony, **e)** gdy $[0; 1] \subset D$, to $f(\frac{1}{n}) \longrightarrow f(0)$.

(C) [**10 pkt.**] Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki $f(2013) = 2014$ i $f(2014) = 2013$. Wykaż, że f posiada punkt stały (tzn. $f(c) = c$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$).

---
[2]to miało być 5 III...

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 4 II 2015, ok. godz. 9.00

Rozwiązania punktów **(A)** nie wymagają **żadnych** uzasadnień (dowodów).
Punkty **(B), (C)** oraz ich **wszystkie** podpunkty **muszą** zawsze zawierać dowód, jako zasadniczą część rozwiązania. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te **należy każdorazowo wskazywać** w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).
Nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.
Rozwiązania zadań muszą być napisane na **osobnych** kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz poniżej — **numerem zadania**. Czas na rozwiązanie zadań: **3 godz. i 45 min.**

Zadanie 1.

(A) [**10 pkt.**] Podaj definicję ***ograniczenia górnego*** zbioru i ***kresu górnego*** zbioru. Sformułuj ***aksjomat zupełności*** dla $\mathbb{R}$ oraz ***„zasadę Archimedesa”***.

(B) [**10=5+5 pkt.**] Czy to prawda, że dla każdego ciągu liczb $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ oraz $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ zachodzi: **a)** jeżeli $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ściśle monotoniczny i ograniczony, to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ jest kresem górnym lub dolnym A i nie należy do A? **b)** jeśli $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest monotoniczny, to $A \neq \mathbb{Q}$?

(C) [**10 pkt.**] Wyznacz kresy (inf i sup) zbioru $B := \{\ln(n+k) - \ln(1+nk) : n, k \in \mathbb{N}\}$. Czy zbiór ten posiada element największy? A najmniejszy? Uwaga: $0 \notin \mathbb{N}$.

Zadanie 2.

(A) [**10 pkt.**] Podaj definicję ***granicy ciągu*** w przypadku granicy $g \in \mathbb{R}$ oraz $g = -\infty$. Sformułuj twierdzenie ***o trzech ciągach*** i twierdzenie ***o zachowaniu nierówności przy przejściu granicznym***.

(B) [**10=5+5 pkt.**] Czy to prawda, że dla każdej pary ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ takich, że $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny oraz $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ jest rozbieżny, zachodzi: **a)** $\{a_n + b_n\}_{n\geqslant 1}$ jest rozbieżny? **b)** jeśli $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ ma wszystkie wyrazy niezerowe, to $\{a_n b_n\}_{n\geqslant 1}$ jest rozbieżny?

(C) [**10=4+6 pkt.**] Zbadaj zbieżność ciągów $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ określonych poniższymi wzorami i oblicz ich granice, jeżeli istnieją:
a) $a_n = \sqrt[n]{2015^n - 2014^n}$, **b)** $b_n = \sqrt[n]{(c_n)^n - 2014^n}$, gdzie $c_{n+1} = \sqrt{2015 \cdot c_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $c_1 = 2016$. Uwaga: w rekurencyjnej definicji ciągu $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$ użyty jest $\sqrt{\cdot}$, a nie $\sqrt[n]{\cdot}$.

Zadanie 3.

(A) [**10 pkt.**] Podaj definicję ***asymptotycznego podobieństwa*** ciągów i sformułuj kryterium ***asymptotyczne*** zbieżności szeregów. Sformułuj kryterium ***Dirichleta***.

(B) [**10=4+6 pkt.**] Czy to prawda, że szereg
a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n^{2015}}}{n} + \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}\right)$ jest zbieżny? **b)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n^{2015}}}{n} - \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}\right)$ jest zbieżny warunkowo?
Dodatkowe — c) [10 pkt.]: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n^{2015}}}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)$ jest zbieżny?

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{n+\frac{1}{n}}$, gdzie ciąg $c = \{c_n\}_{n\geqslant 1}$ spełnia warunki: $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -3$, $c_4 = 0$ oraz $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ c_{n+4} = c_n$ (tzn. kolejnymi wyrazami c są: $1,\ 2,\ -3,\ 0,\ 1,\ 2,\ -3,\ 0,\ 1,\ 2,$ itd.).

Zadanie 4.

(A) [**10 pkt.**] Podaj definicję ***jednostajnej ciągłości*** funkcji oraz podaj przykład funkcji ***ciągłej, która nie jest jednostajnie ciągła***. Sformułuj twierdzenia[3] ***o osiąganiu wartości pośrednich*** (tj. o własności Darboux).

(B) [**10 pkt.**] Przedstaw dowód twierdzenia ***o osiąganiu wartości pośrednich*** .

(C) [**10 pkt.**] Wykaż, że jeżeli $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to posiada punkt stały (tzn. $f(c) = c$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$).

---
[3]Pow. być: *twierdzenie*.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 21 II 2015 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [7 pkt] Sformułuj ***aksjomat zupełności*** dla $\mathbb{R}$ oraz ***„zasadę maksimum”*** (dla $\mathbb{Z}$). Wyjaśnij zasadniczą różnicę między pojęciemi $\sup A$ i $\max A$ dla ograniczonego z góry podzbioru $A \subset \mathbb{R}$.

A. b) [3 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o gęstości*** $\mathbb{Q}$.

B. a) [5 pkt] Czy to prawda, że dla każdego ciągu liczb $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ oraz $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ zachodzi:
jeżeli $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny, to $\inf A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \sup A$?

B. b) [5 pkt] Czy to prawda, że dla każdego ograniczonego[4] ciągu liczb $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ oraz $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ zachodzi:
jeśli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, to $A \neq [2015; +\infty) \cap \mathbb{Q}$?

Zadanie 2.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [5 pkt] Podaj definicję ciągu ***zbieżnego, rozbieżnego*** oraz ciągu ***rozbieżnego do*** $+\infty$.

A. b) [5 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o trzech ciągach*** i ***o dwóch ciągach***.

B. a) [5 pkt] Czy to prawda, że dla każdej pary ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ zachodzi:
jeśli oba mają granicę równą $+\infty$, to $\{a_n - b_n\}_{n\geqslant 1}$ ma granicę?

B. b) [5 pkt] Czy to prawda, że dla każdej pary ciągów liczbowych **rozbieżnych** $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ zachodzi:
jeśli oba mają granicę, to $\{a_n b_n\}_{n\geqslant 1}$ ma granicę?

B. c) — Dodatkowe [5 pkt] Czy to prawda, że dla każdej pary ciągów liczbowych **rozbieżnych** $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ zachodzi:
jeżeli oba są ograniczone, to $\{\sqrt[n]{|a_n + b_n|}\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny?

Zadanie 3.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Podaj definicję ***sumy*** szeregu oraz definicję szeregu ***zbieżnego***.

A. b) [3 pkt] Sformułuj kryterium ***asymptotyczne*** zbieżności szeregów.

A. c) [3 pkt] Spośród ciągów $\{\frac{7}{n}\}_{n\geqslant 1}$, $\{\frac{(-1)^n}{n}\}_{n\geqslant 1}$, $\{\frac{\sqrt[n]{n}}{4n+1}\}_{n\geqslant 1}$, $\{\frac{-3}{n+2}\}_{n\geqslant 1}$ wskaż **wszystkie**, które są asymptotycznie podobne do ciągu $\{\frac{1}{n}\}_{n\geqslant 1}$.

B. a) [5 pkt] Czy to prawda, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, a szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ jest zbieżny?

---

[4] Miało być bez słowa „ograniczonego”...

B. b) [5 pkt] Czy to prawda, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, a szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cdot b_n)$ jest zbieżny bezwzględnie?

B. c) — Dodatkowe [5 pkt] Czy to prawda, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo, a szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ jest zbieżny warunkowo?

Zadanie 4.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *— **musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o osiąganiu wartości pośrednich*** (tj. o własności Darboux).

A. b) [3 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o jednostajnej ciągłości***.

A. c) [3 pkt] Podaj przykład funkcji ***jednostajnie ciągłej określonej na*** $\mathbb{R}$***, która nie jest ani ograniczona, ani monotoniczna***.

B [10 pkt] Przedstaw dowód twierdzenie ***o osiąganiu wartości pośrednich***.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 21 II 2015
— Część II

*Czas na rozwiązanie zadań cz. II: **2 godz.***
***Nie wolno** korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

*Rozwiązania **muszą zawierać dowód**, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te **należy każdorazowo wskazywać** w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

*Rozwiązania zadań muszą być napisane na **osobnych** kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz poniżej — **numerem zadania**.*
*Każde zadanie jest warte **10 pkt**.*

Zadanie 1. Wyznacz kresy (inf i sup) zbioru $B := \left\{ \left(\frac{n}{k} + \frac{25k}{n} \right)^{-1} \; : \; n, k \in \mathbb{N} \right\}$. Czy zbiór ten posiada element największy? A najmniejszy? Uwaga: $0 \notin \mathbb{N}$.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli $g > h > 0$, ciąg liczbowy $\{r_n\}_{n \geqslant 1}$ jest zbieżny do g, oraz $a_n := \sqrt[n]{|(r_n)^n - h^n|}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\lim_{n \to +\infty} a_n = g$. Uwaga: jeśli nie potrafisz tego zrobić ogólnie, to zrób choć dla poniższego szczególnego przypadku (za **4 pkt.**): $r_n = \left(2 - \frac{3}{n}\right)$ i $h = \frac{1}{2}$.

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregów
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{(3n+2)}}{\sqrt{n}}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{(3n+7)}}{\sqrt{n} + \frac{100}{n}}$.

Zadanie 4. Wykaż, że jeżeli $f : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, ograniczona z góry oraz $f(0) \geqslant 0$, to posiada punkt stały (tzn. $f(c) = c$ dla pewnego $c \in [0; +\infty)$).

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 28 I 2016 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A.) [7 pkt] Sformułuj pięć dowolnie wybranych aksjomatów ***z zestawu aksjomatów liczb rzeczywistych***, które dotyczą nierówności $\leqslant$.

B. a) [4 pkt] Czy to prawda, że dla każdej pary ograniczonych ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ oraz $\{b_n\}_{n\geqslant1}$ zachodzi: $\sup\{a_n+b_n : n\in\mathbb{N}\} \leqslant \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} + \sup\{b_n : n\in\mathbb{N}\}$?

B. b) [4 pkt] Czy to prawda, że dla każdej pary ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ oraz $\{b_n\}_{n\geqslant1}$ zachodzi: $\sup\{a_n+b_n : n\in\mathbb{N}\} = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} + \sup\{b_n : n\in\mathbb{N}\}$?

Zadanie 2.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [5 pkt] Sformułuj twierdzenia ***o trzech ciągach*** i ***o przechodzeniu z nierównością do granicy***.

A. b) [tylko 0 lub 2 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Dla każdej pary ciągów zbieżnych $\{a_n\}_{n\geqslant1}$, $\{b_n\}_{n\geqslant1}$ zachodzi:
jeśli $a_n < b_n$ dla dostatecznie dużych n, to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n < \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

☐ Dla każdej pary ciągów zbieżnych $\{a_n\}_{n\geqslant1}$, $\{b_n\}_{n\geqslant1}$ zachodzi:
jeśli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n < \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, to $a_n < b_n$ dla dostatecznie dużych n.

B. [8 pkt] Przedstaw dowód twierdzenia ***o trzech ciągach*** dla przypadku granicy rzeczywistej.

Zadanie 3.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Podaj definicję ***asymptotycznego podobieństwa*** ciągów i sformułuj kryterium ***asymptotyczne*** zbieżności szeregów.

A. b) [3 pkt] Sformułuj kryterium ***Dirichleta*** zbieżności szeregów.

B. a) [3 pkt] Czy to prawda, że dla każdej pary szeregów zbieżnych bezwzględnie ich suma jest także szeregiem zbieżnym bezwzględnie?

B. b) [2 pkt] Czy to prawda, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{(-1)^{(n^4)}}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^{n(n+1)}}{n^{\frac{5}{4}}}\right)$ jest zbieżny?

B. c) [3 pkt] Czy to prawda, że szereg z podpunktu b) jest zbieżny warunkowo?

Zadanie 4.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Podaj definicję funkcji jednostajnie ciągłej i sformułuj dowolne znane Ci z wykładu twierdzenie dotyczące jednostajnej ciągłości.

A. b) [3 pkt] Podaj przykład funkcji ciągłej $f : [0;1) \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

B [8 pkt] Dla każdego z poniższych założeń osobno:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją jednostajnie ciągłą

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiada skończoną granicę w $+\infty$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i ściśle rosnąca,

rozstrzygnij, czy każda f spełniająca to założenie posiada własność:

$$\lim_{x \to +\infty} f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x}) = 0.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 28 I 2016
— Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt.***

Zadanie 1. Wyznacz kresy (inf i sup) zbioru $B := \left\{ \sqrt[n]{\frac{1}{n}} :\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3 \right\}$.

Zadanie 2. Wykaż zbieżność i znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ spełniającego warunki

$$a_0 = -1, \qquad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{dla wszystkich } n \geqslant 0,$$

gdzie $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0; +\infty)$ jest funkcją ciągłą taką, że

$$f(0) = 0 \quad \text{i} \quad \forall_{x>0}\ f(x) < x.$$

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność szeregów

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^2}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Zadanie 4. Turysta Jaś wybrał się na dwie wycieczki wzdłuż szlaku — przedziału $[a;b]$ prostej rzeczywistej: pierwsza - od a do b, druga zaś - od b do a. W czasie obu wycieczek Jaś szedł naprzód nie zatrzymując się i nie zawracając, a przy starcie Jaś za każdym razem uruchamiał swój wyzerowany uprzednio stoper, by zmierzyć czas marszu. Podczas obu wycieczek czas wskazywany przez stoper zależał w sposób ciągły od położenia Jasia na szlaku. **Udowodnij**, że istnieje takie miejsce na szlaku, w którym stoper Jasia pokazywał ten sam czas podczas pierwszej i podczas drugiej wycieczki.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 22 II 2016 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Podaj definicję ***ograniczenia dolnego*** i ***kresu dolnego*** zbioru $A \subset \mathbb{R}$.

A. b) [tylko 0 lub 3 pkt] Podaj przykład takiego $A \subset \mathbb{R}$, który nie zawiera żadnych przedziałów postaci $(c; d)$, gdzie $c, d \in \mathbb{R}$ i $c < d$ oraz dla którego spełnione są wszystkie poniższe warunki:

$$\sup A, \inf A \in A, \quad \inf(A \setminus \{\inf A\}) = \inf A, \qquad \sup(A \setminus \{\sup A\}) \neq \sup A.$$

B. [8 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań:

a) Dla każdej pary ograniczonych ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ oraz $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ zachodzi
$\inf\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} \geqslant \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

b) Dla każdej pary malejących ograniczonych ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ oraz $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ zachodzi
$\inf\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

c) Dla każdej pary rosnących ograniczonych ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ oraz $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ zachodzi
$\inf\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 2.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie ***Bolzano – Weierstrassa***.

A. b) [tylko 0 lub 3 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Każdy ciąg ograniczony z góry posiada podciąg malejący.

☐ Każdy ciąg rozbieżny do $+\infty$ posiada podciąg ściśle rosnący.

☐ Każdy ciąg, który posiada podciąg ściśle rosnący oraz podciąg ściśle malejący jest rozbieżny.

B. [8 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań:

a) Dla każdego ciągu zbieżnego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i każdego rozbieżnego do $+\infty$ ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ ciąg $\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny.

b) Dla każdego ciągu zbieżnego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i każdego zbieżnego ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ ciąg $\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny.

c) Dla każdego ciągu zbieżnego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i każdego nieograniczonego ciągu liczb naturalnych $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ ciąg $\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny.

Zadanie 3.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...)* — *bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Sformułuj kryterium ***porównawcze*** zbieżności szeregów.

A. b) [4 pkt] Podaj definicję ***asymptotycznego podobieństwa*** ciągów i sformułuj kryterium ***asymptotyczne*** zbieżności szeregów.

B. a) [4 pkt] Wyznacz **wszystkie** parametry $\alpha > 0$, takie że każdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, spełniających $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = 1$ jest zbieżny.

B. b) [4 pkt] Czy to prawda, że szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ jest zbieżny?

Zadanie 4.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...)* — *bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie Weierstrassa „o osiąganiu kresów”.

A. b) [tylko 0 lub 3 pkt] O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [0;10] \cup [12;20) \longrightarrow \mathbb{R}$, wpisując odpowiednio “TAK” lub “NIE” w ramce.

☐ $[0;1]$

☐ $[0;1] \cup (3;5) \cup \{7\}$

☐ $(0;1)$

B. [8 pkt] Przedstaw dowód twierdzenia Weierstrassa „o osiąganiu kresów”.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 22 II 2016
— Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $a \in \mathbb{R}$. Wykaż, że jeśli $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2n}$, to

$$(1+a)^n \leqslant 1 + 2an.$$

Zadanie 2. Wykaż zbieżność i znajdź granice ciągów zadanych poniższymi wzorami dla $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle a_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{100} \frac{k^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{k}}}}$, **b)** $\displaystyle b_n = \sqrt[(n!)]{\sum_{k=1}^{100} \frac{k^{\frac{1}{n!}}}{(n!)^{\frac{1}{k}}}}$.

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n^{888}) \left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right)$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Zadanie 4. Wykaż, że istnieje $x \in [0;1]$ taki, że

$$e^{1-x} - x^2 = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{e^y - 1}.$$

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 28 I 2017 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 3–4 pkt] Podaj definicję ***ograniczenia górnego*** i ***kresu górnego*** zbioru $A \subset \mathbb{R}$.

A. b) [1 pkt] Wskaż zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru pustego.

A. c) [2 pkt] Wyjaśnij krótko związek i różnicę pomiędzy pojęciami ***elementu największego*** i ***kresu górnego*** zbioru; różnicę zilustruj przykładem (ale nie obrazkiem...).

B. [8 pkt] Sformułuj Twierdzenie ***„o granicy ciągu monotonicznego”***. Udowodnij to twierdzenie dla szczególnego przypadku, gdy ciąg jest rosnący i ograniczony z góry.

Zadanie 2.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 4–5 pkt] Dokończ definicję: *Ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest* ***ciągiem Cauchy'ego*** *wtedy i tylko wtedy gdy*

A. b) [4 pkt] Przyjmujemy następującą definicję: Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ***dość miły*** wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{n\geqslant 1} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant |x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Podaj przykład takich dwóch dość miłych ciągów, że pierwszy jest ciągiem Cauchy'ego, a drugi nie.

B. [6 pkt] Dla każdego z ciągów o n-tym wyrazie zadanym dla $n \geqslant 1$ poniższymi wzorami, rozstrzygnij dwie kwestie: **1)** – czy jest on ciągiem Cauchy'ego oraz **2)** – czy posiada on podciąg zbieżny:

a) $n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\pi}$,

c) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$.

Zadanie 3.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 4–5 pkt] Sformułuj kryterium ***Dirichleta*** zbieżności szeregów.

A. b) [4 pkt] Podaj po jednym przykładzie ciągu $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, spełniającego warunek:

(i) ciąg $\{\sum_{k=1}^{n} b_k\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony i ściśle rosnący;

(ii) ciąg $\{\sum_{k=1}^{n} b_k\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony i nie jest monotoniczny.

B. [6 pkt] Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

Zadanie 4.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [5 pkt] Dla funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sformułuj:

(i) definicję ciągłości f w punkcie $a \in \mathbb{R}$ (tzw. ***wersję Heinego***):

(ii) warunek równoważny powyższej ciągłości f w punkcie $a \in \mathbb{R}$ w tzw. ***wersji Cauchy'ego***:

(iii) definicję jednostajnej ciągłości f.

A. b) [6 pkt] W każdej ramce podaj wartość odpowiedniej granicy funkcji, o ile istnieje; natomiast gdy nie istnieje, wpisz **"BRAK"**:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(13x^3)}{e^{(x^3)}-1}$ $\boxed{}$

b) $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x^5}\right)$ $\boxed{}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{(-x^2)}-e^{(-1)}}{x^2-1}$ $\boxed{}$

B. [4 pkt] Podaj przykład ciągłej funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna we wszystkich punktach $a \neq 17$ i dla której $f'(17) = +\infty$.

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 28 I 2017 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.

Wykaż zbieżność i znajdź granice ciągów o wyrazach zadanych dla $n \geqslant 1$ następująco:

a) $a_n = \sqrt[n]{11^n - 10^n + n^{110}}$, **b)** $b_n = \left(a_n - \frac{71}{7}\right)^n$, gdzie a_n jest określony w a).

Zadanie 2.

Rozważamy funkcję ciągłą $f : [0;\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ liczb z $[0;\ 1]$ o tej własności, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi

$$|f(x_n)| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Wykaż, że równanie $f(x) = 0$ posiada rozwiązanie x w przedziale $[0; 1]$.

Zadanie 3.

Zakładamy, że ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ ma wszystkie wyrazy większe lub równe zero. Niech dla $n \geqslant 1$:

$$a_n := \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \qquad g_n := \sqrt{x_n x_{n+1}}.$$

a) Wykaż, że jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ jest zbieżny, to oba szeregi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ są zbieżne.

b) Czy ze zbieżności $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$?

c) Czy ze zbieżności $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$?

Zadanie 4.

Rozważamy funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą $f(x + 2016) = f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

a) Udowodnij, że f jest ograniczona.

b) Udowodnij, że f posiada punkt stały (tzn. $f(c) = c$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$).

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 18 II 2017 — Część I

*Czas na rozwiązanie zadań cz. I: **2 godz.** Do zdobycia: 60 pkt.*
***Nie wolno** korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* B — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 2–3 pkt] Sformułuj **„aksjomat zupełności”** („ciągłości”) zbioru liczb rzeczywistych.

A. b) [tylko 0 lub 2 pkt] Dla każdego z poniższych zbiorów wskaż zbiór jego wszystkich ograniczeń **dolnych**:

(i) $\mathbb{R}$

(ii) $(3; 6)$

(iii) $[3; 6)$

A. c) [2 pkt] Wskaż przykład ciągu ograniczonego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ którego zbiór wszystkich wyrazów nie ma elementu najmniejszego, ani największego.

B. [8 pkt] Sformułuj **twierdzenie *„o zupełności* $\mathbb{R}$*”*** (nie chodzi o aksjomat..., chodzi o twierdzenie związane z pojęciem ciągu Cauchy'ego ...). Udowodnij to twierdzenie.

Zadanie 2.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* B — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 3–4 pkt] Sformułuj twierdzenie ***„o zachowaniu nierówności przy przejściu granicznym”*** (dla ciągów).

A. b) [2=1+1 pkt] Przyjmujemy następującą definicję: Ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ***dość zły*** wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{N\geqslant 1}\exists_{n\geqslant N} \quad |x_{n+1} - x_n| \geqslant n.$$

Podaj przykład dość złego ciągu. Rozstrzygnij, czy ciąg dość zły może mieć podciąg zbieżny.

B. [9 pkt] Dla każdego z ciągów o n-tym wyrazie zadanym dla $n \geqslant 1$ poniższymi wzorami, rozstrzygnij dwie kwestie: **1)** – czy jest zbieżny oraz **2)** – czy jest ograniczony:

a) $\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^n}{\pi^k}$,

c) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{n}$.

Zadanie 3.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* B — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 4–5 pkt] Sformułuj kryterium ***porównawcze*** zbieżności szeregów.

A. b) [4 pkt] Podaj po jednym przykładzie par ciągów $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, takich, że:

(i) $a_n \longrightarrow 0$, ciąg $\{\sum_{k=1}^{n} b_k\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony, ale $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ jest rozbieżny

(ii) $a_n \longrightarrow 0$, ciąg $\{\sum_{k=1}^{n} b_k\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony oraz $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ ma sumę równą 1:

B. [6 pkt] Szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ jest iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.
Zbadaj zbieżność $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ oraz zbieżność $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$.

Zadanie 4.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [tylko 0 lub 4–5 pkt] Sformułuj twierdzenie ***„Bolzano o własności Darboux"***

A. b) [6 pkt] W każdej ramce podaj wartość odpowiedniej granicy funkcji, o ile istnieje; natomiast gdy nie istnieje, wpisz **"BRAK"**:

a) $\lim_{x\to\pi} \frac{\mathrm{tg}(x^2)}{\cos x}$ $\boxed{}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x^5}\right)$ $\boxed{}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{(-x^3)} - 1}{x^2}$ $\boxed{}$

B. [4 pkt] Podaj przykład ograniczonej różniczkowalnej funkcji $f : (0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie ma granicy w punkcie 0.

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 18 II 2017 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.

a) Wykaż, że dla **każdego** $x \in \mathbb{R}$ oraz **parzystego** $n \geqslant 2$ zachodzi

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Czy parzystość n jest tu istotna?

b) Rozważamy ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ zadany wzorem rekurencyjnym

$$a_1 = c, \qquad a_{n+1} = \frac{(a_n+1)^4 - 1}{4} \quad \text{dla } n \geqslant 1,$$

gdzie c jest pewną wybraną liczbą. Wykaż, że ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest monotoniczny przy każdym wyborze $c \in \mathbb{R}$.

c) Znajdź granicę powyższego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ w zależności od wartości c.

Zadanie 2.

Dla ciągów o wyrazach zadanych poniższymi wzorami (dla $n \geqslant 1$) zbadaj istnienie granic i znajdź je, o ile istnieją:

a) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{1000^n}}$, **b)** $b_n = \left(a_n + 1 - \frac{1}{n}\right)^n$, gdzie a_n jest określony w a).

Zadanie 3.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbadaj zbieżność oraz bezwzględną zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2+14}\, x^n$.

Zadanie 4.

Rozważamy funkcję ciągłą $f : D \longrightarrow D$, gdzie $D = [0; +\infty)$, spełniającą

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{12}{13}.$$

Udowodnij, że f posiada punkt stały (tzn. $f(c) = c$ dla pewnego $c \in D$).

Sprawdziany

z

Semestru Letniego

Kolokwium z Analizy Matematycznej
dla Informatyków, 10. IV. 2008

Rozwiązania poszczególnych zadań należy pisać na ***osobnych, czytelnie podpisanych*** *kartkach. Proszę o napisanie w lewym górnym rogu* ***każdej*** *kartki swego imienia, nazwiska i numeru indeksu oraz poniżej — numeru rozwiązywanego zadania, a jeszcze niżej — imienia i nazwiska osoby prowadzącej Państwa grupę ćwiczeniową.*
W czasie kolokwium z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp. korzystać ***nie wolno****.*
Wszystkie rozwiązania powinny zawierać uzasadnienia (tzn. dowody). ***Należy*** *się w nich powoływać na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń.*
Czas na rozwiązanie zadań: 90 min.

Zadanie 1. Oblicz:

(A) **[10 pkt.]** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{4-e^{2x}}\,dx$;

(B) **[10 pkt.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n-\frac{k^2}{n}}$.

Zadanie 2. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana jest wzorem $f(x) = x_1^3 + 2x_2^2 - x_1^2$.

(A) **[7 pkt.]** Znajdź wszystkie punkty, w których f posiada ekstrema lokalne i określ ich rodzaj (maksimum, czy minimum lok.).

(B) **[5 pkt.]** Niech g będzie obcięciem funkcji f do zbioru $\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 4x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$.
Czy g osiąga swoją wartość najmniejszą? A swoją wartość największą?

(C) **[8 pkt.]** Znajdź kres górny i kres dolny zbioru wartości funkcji g z pkt. B.

Zadanie 3. Rozważamy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = u(x) \cdot (x_1^2 + x_2^2)$, gdzie

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } (x_1 = 0 \text{ lub } x_2 = 0) \\ 0 & \text{dla pozostałych przypadków.} \end{cases}$$

Zbadaj:

(A) **[5 pkt.]** Ciągłość f w punkcie 0;

(B) **[5 pkt.]** Istnienie pochodnych cząstkowych f w punkcie 0;

(C) **[5 pkt.]** Istnienie pochodnych kierunkowych f w punkcie 0;

(D) **[5 pkt.]** Różniczkowalność f w punkcie 0.

Kolokwium z Analizy Matematycznej
dla Informatyków II, 6. IV. 2009

*Rozwiązania poszczególnych zadań należy pisać na **osobnych**, czytelnie podpisanych kartkach. Proszę o napisanie w lewym górnym rogu **każdej** kartki **swego imienia, nazwiska i numeru indeksu** oraz poniżej — **numeru rozwiązywanego zadania**, a jeszcze niżej — imienia i **nazwiska osoby prowadzącej Państwa grupę ćwiczeniową**.*
*W czasie kolokwium z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp. korzystać **nie wolno**.*
*Wszystkie rozwiązania powinny zawierać uzasadnienia (tzn. dowody). **Należy się w nich powoływać na twierdzenia** z wykładu (ew. z ćwiczeń), pamiętając też o sprawdzaniu **założeń**.*
Czas na rozwiązanie zadań: 120 min.

Zadanie 1. Oblicz:

(A) **[10 pkt.]** $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$.

(B) **[10 pkt.]** $\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x\left((\ln x)^2-1\right)}\,dx$ oraz $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x\left((\ln x)^2-1\right)}\,dx$.

Zadanie 2. Niech ρ_1 i ρ_2 będą dwiema metrykami w zbiorze X. Definiujemy $\rho : X \times X \longrightarrow X$ [5] wzorem $\rho(x,y) = \rho_1(x,y) + \rho_2(x,y)$ dla $x, y \in X$.

(A) **[7 pkt.]** Wykaż, że ρ także jest metryką w X.

(B) **[6 pkt.]** Zakładamy, że ρ_1 jest metryką dyskretną (tzn. $\rho_1(x,y) = 0$ dla $x = y$, a $\rho_1(x,y) = 1$ dla $x \neq y$). Wykaż, że w przestrzeni metrycznej (X, ρ) dla dowolnego $x \in X$ kula $K(x, \frac{1}{2})$ o środku x i promieniu $\frac{1}{2}$ to zbiór jednopunktowy $\{x\}$.

(C) **[7 pkt.]** Wykaż, że przy założeniu z punktu (B) każdy podzbiór $A \subset X$ jest otwarty i jednocześnie domknięty w sensie metryki ρ.

Zadanie 3. Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana jest wzorem $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ dla $x \in \mathbb{R}^3$. Niech $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \; x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 0\}$ i niech g będzie obcięciem funkcji f do zbioru A.

(A) **[5 pkt.]** Zbadaj, czy A jest otwarty i czy jest domknięty. Wykaż, że g osiąga swoją wartość największą.

(B) **[10 pkt.]** Wyznacz wartość największą g.

(C) **[5 pkt.]** Niech $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1, \; x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 0\}$ i niech h będzie obcięciem funkcji f do zbioru B. Czy h osiąga swoją wartość największą? A swoją wartość najmniejszą?

---

[5] Powinno było być: „$\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$”.

Kolokwium z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 30. III. 2010

Rozwiązania poszczególnych zadań należy pisać na ***osobnych****, czytelnie podpisanych kartkach. Proszę o napisanie na nich w lewym górnym rogu* ***swego imienia, nazwiska i numeru indeksu*** *oraz poniżej —* ***numeru rozwiązywanego zadania****, a jeszcze niżej —* ***nazwiska osoby prowadzącej*** *Państwa* ***grupę ćwiczeniową****.*
W czasie kolokwium z notatek, podręczników, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp. korzystać ***nie wolno****.*
Wszystkie rozwiązania powinny zawierać uzasadnienia (tzn. dowody). ***Należy się w nich powoływać na twierdzenia*** *z wykładu (ew. z ćwiczeń), pamiętając też o sprawdzaniu* ***założeń****.*
Czas na rozwiązanie zadań: 150 min.

Zadanie 1. Oblicz:

(A) **[10 pkt.]** $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 n^3}{k^6 - 4n^6}$.

(B) **[10 pkt.]** $\lim_{x\to 0+} \frac{\int_{x^3}^{7x^2} \cos(t^{2010})\, dt}{x^2}$.

Zadanie 2. O funkcji $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ zakładamy, że jest klasy C^1 oraz dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) > -1.$$

(A) **[4 pkt.]** Czy f posiada pochodną kierunkową w punkcie $(1, 2, 3)$ w kierunku $v = (2, 1, 0)$? Jeśli tak, to oblicz ją.

(B) **[10 pkt.]** Wykaż, że $f(1, 1, 1) > f(0, 0, 0)$. *Wskazówka:* funkcję f warto złożyć z funkcją ***wewnętrzną*** jednej zmiennej „t" zadaną np. wzorem (t, t, t) albo (t, t^2, t^3).

(C) **[6 pkt.]** Określmy $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ wzorem $h(x) = g(f(x))$, gdzie $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jest zadana wzorem $g(t) = (t, t^2, t^3)$. Wykaż, że w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}^3$ jakobian $Jh(x)$ funkcji h w punkcie x jest równy 0 (tzn. $Jh(x) := \det MJh(x) = 0$).

Zadanie 3. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana jest wzorem $f(x) = x_1x_2 + x_1$.

(A) **[3 pkt.]** Niech $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ x_2 + x_1^2 \leqslant 1\}$. Zbadaj, czy A jest otwarty, czy A jest domknięty oraz czy A jest zwarty. Odpowiedź uzasadnij w sposób ścisły.

(B) **[3 pkt.]** Wykaż, że funkcja, będąca obcięciem f do zbioru A, osiąga swoje oba kresy.

(C) **[10 pkt.]** Znajdź wspomniane wyżej oba kresy funkcji z punktu (B).

(D) **[4 pkt.]** Czy funkcja będąca obcięciem f do zbioru $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 < 4\}$. osiąga któryś ze swoich kresów?

Kolokwium z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 29 III 2012

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...").*
- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być poparte dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).***
- *Każde z zadań warte jest* **15 pkt**. *Czas na rozwiązanie zadań:* **2 godz. 30 min.**

Zadanie 1.
Dla każdej liczby rzeczywistej $a \in \mathbb{R}$ znajdź liczbę rozwiązań $x \in \mathbb{R}$ równania $e^{-|x|}(x-1)^3 = a$.

Zadanie 2.

a) Znajdź pewne przybliżenie wymierne liczby $c := \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ z dokładnością do $0,01$ (tzn. wskaż jakieś $q \in \mathbb{Q}$ takie, że $|c-q| \leqslant 0,01$).

b) Funkcja $h : [0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana jest wzorem $h(x) = \cos(\sqrt{x})$ dla $x \geqslant 0$. Znajdź wszystkie takie $n \in \mathbb{N}$, dla których h jest n krotnie różniczkowalna w 0.

Zadanie 3.
Niech α, β, γ będą kątami pewnego trójkąta ostrokątnego. Wykaż, że $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 \geqslant 1$.
Czy istnieje większe niż 1 ograniczenie („dolne") dla lewej strony powyższej nierówności?

Zadanie 4.
Rozważamy ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ taki, że $f_n : (0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz $f_n(x) = x\left(1 - n^2 e^{-n\sqrt{x}}\right)$ dla $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$. Zbadaj zbieżność **punktową**, **jednostajną** i **niemal jednostajną** tego **ciągu** funkcyjnego. W każdym z tych trzech przypadków, gdy zbieżność zachodzi, wskaż granicę.

Kolokwium z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 9 V 2013

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...").*
- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być poparte dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).***
- *Każde z zadań warte jest* **15 pkt**. *Czas na rozwiązanie zadań:* **3 godz.**

Zadanie 1.
Znajdź sumy szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)7^n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n(n+\frac{1}{2})}{n!}$.

Zadanie 2.
Rozważamy funkcje $f_n : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadane wzorem $f_n(x) = \frac{x^2}{n^2+x^2}$ dla $n \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 0$. Zbadaj zbieżność **punktową**, **jednostajną** i **niemal jednostajną**:

a) ciągu funkcyjnego $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$;

b) szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Zadanie 3.
Oblicz całki:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$;

b) $\displaystyle\int_{[0;\ \ln 2]} \frac{2e^{3x}+e^{2x}+2e^x}{2e^{3x}+2e^{2x}+e^x+1}\, dx$.

Zadanie 4.
Funkcja $g : (0;\ +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest nieograniczona, ciągła oraz ma granicę w $+\infty$ równą π. Wykaż istnienie granicy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_{x/3}^{3x} g(t)\, dt$$

oraz znajdź wartość tej granicy.

Kolokwium „DUŻE" z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 8 V 2014

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach (własne imię, nazwisko, nr indeksu, nr grupy ćwiczeniowej; oraz niżej — „Zadanie nr ...").*
- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno się opierać na dowodach. Poszczególne ich kroki, poza zupełnie elementarnymi, powinny być uzasadniane twierdzeniami (w tym lematami, faktami itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwy).***
- *Każde z zadań warte jest* **15 pkt**. *Czas na rozwiązanie zadań:* **3 godz.**

Zadanie 1.

a) (3 pkt) Znajdź pierwszy drugi oraz trzeci wielomian Taylora funkcji f w punkcie $x_0 = 1$ oraz ich wartości w $x = 1001$ dla $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt[2014]{x}$.

b) (12 pkt) Znajdź jakiekolwiek przybliżenie wymierne liczby $\sqrt[2014]{\frac{17}{16}}$ z błędem nieprzekraczającym $\frac{1}{1000000}$.

Zadanie 2.
Rozważamy funkcje f_n, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takie, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ jest **jednostajnie** zbieżny do f oraz zakładamy, że każda z funkcji f_n posiada własność **W** (spośród poniższych). Rozstrzygnij, czy f musi także posiadac własność **W**, gdy **W** oznacza:

a) (3 pkt) ciągłość;

b) (3 pkt) różniczkowalność;

c) (3 pkt) wklęsłość;

d) (3 pkt) parzystość (g jest parzysta wtw $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ g(-x) = g(x)$);

e) (3 pkt) ścisłą rosnącość.

Zadanie 3.
Rozważamy funkcję $f : (-5; 5) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną dla $x \in (-5; 5)$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}.$$

Wykaż, że f jest ciągła. Czy f jest różniczkowalna? Jeśli tak, oblicz $f'(0)$.

Zadanie 4.

a) 8 pkt Zbadaj, czy istnieje $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{4n}\right)}{n}$, a jeśli tak, to oblicz tę granicę.

b) 7 pkt Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej $\int_{(0;1]} \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{x})}{x}\, dx$.

Kolokwium z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 14 V 2015 (ok. godz. 14)

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych kartkach:*

  w lewym górnym rogu *własne imię, nazwisko, nr indeksu oraz niżej — „Zadanie nr ...”*

  w prawym górnym rogu *nr grupy ćwiczeniowej.*

- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być opatrzone dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwy).***

- *Każde z zadań warte jest* ***15 pkt****.*

- *Czas na rozwiązanie zadań:* ***2,5 godz****.*

Zadanie 1.
Znajdź jakiekolwiek wymierne przybliżenie liczby $\left(\cos(\sqrt{2}/2)\right)^2$ z dokładnością do $\frac{1}{40}$.

Zadanie 2.
Definiujemy funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3 + x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wyjaśnij dlaczego ta definicja jest poprawna. W jakich punktach $x \in \mathbb{R}$ funkcja f jest ciągła, a w jakich jest różniczkowalna? Jeśli $f'(0)$ istnieje, to zbadaj, czy $f'(0) \in (0; \frac{13}{10})$.

Zadanie 3.
Oblicz $\lim_{n\to+\infty} \frac{2e}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{4k}{n} + \frac{4k^2}{n^2}\right) e^{\frac{2k}{n}}$ lub wykaż, że ta granica nie istnieje.

Zadanie 4.
Oblicz $\lim_{x\to 0+} \frac{\int_{x^3}^{7x^2} \cos(t^{2010})\, dt}{x^2}$ lub wykaż, że ta granica nie istnieje.

Kolokwium z Analizy Matematycznej
dla Informatyków, 12 V 2016 (ok. godz. 14.)

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych kartkach:*

  w lewym górnym rogu *własne imię, nazwisko, nr indeksu oraz niżej — „Zadanie nr ...”*

  w prawym górnym rogu *nr grupy ćwiczeniowej.*

- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być opatrzone dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwy).***
- *Każde z zadań warte jest* ***15 pkt***[6].
- *Czas na rozwiązanie zadań:* ***2,5 godz.***

Zadanie 1.
Znajdź jakiekolwiek wymierne przybliżenie liczby $\cos(\sqrt{2})$ z dokładnością do $\frac{1}{10}$.

Zadanie 2.
Rozważamy funkcję $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n} \operatorname{arctg}(nx)$.

a) Wykaż, że F jest poprawnie określona, tj. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n} \operatorname{arctg}(nx)$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

b) Udowodnij, że F jest ciągła. **c)** Czy F jest różniczkowalna? Jeśli tak, oblicz $F'(0)$.

Zadanie 3.
Oblicz całki: **a)** $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$, **b)** $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} \, dx$

oraz rozstrzygnij, czy całka z **b)** jest większa od $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Zadanie 4.
Funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *stałą z prawej* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x,y \geqslant M} \; f(x) = f(y).$$

Rozważmy ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, którego każdy wyraz jest stały z prawej. Rozstrzygnij, czy f musi być stała z prawej, jeśli:

a) $\{f_n\}$ jest punktowo zbieżny do f; **b)** $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do f.

[6] pow. być 17,5

Kolokwium z Analizy Matematycznej
dla Informatyków, 11 V 2017 (ok. godz. 14.15)

- *Proszę o rozwiązania każdego z zadań na osobnych, czytelnie oznaczonych kartkach:*

  w lewym górnym rogu *własne imię, nazwisko, nr indeksu oraz niżej — „Zadanie nr ...”*

  w prawym górnym rogu *nr grupy ćwiczeniowej.*

- *Podczas kolokwium nie wolno korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- ***Rozwiązanie każdego zadania powinno być opatrzone dowodem. Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy każdorazowo wskazywać w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwy).***
- *Każde z zadań warte jest **17,5 pkt**.*
- *Czas na rozwiązanie zadań: **3 godz**.*

Zadanie 1.
Wykaż następujące kryterium na ekstrema: Niech $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ będzie n–krotnie różniczkowalna w $c \in (a;b)$, gdzie $n \geqslant 2$. Jeżeli $f^{(k)}(c) = 0$ dla każdego $k = 1, \ldots, n-1$ oraz $\alpha := f^{(n)}(c) \neq 0$, to

(i) jeżeli n jest parzyste i $\alpha > 0$ (< 0), to f posiada ścisłe minimum (maksimum) lokalne w c — *wybierz wersję dla maksimum lub dla minimum*;

(ii) jeżeli n jest nieparzyste, to f nie posiada ekstremum lokalnego w c.

Zadanie 2.
Rozważamy funkcję $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$G(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n! + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(A) Wyjaśnij, dlaczego powyższa definicja G jest poprawną definicją pewnej funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.

(B) Udowodnij, że G jest różniczkowalna i znajdź wartość $G'(0)$.

(C) Udowodnij, że G' jest ciągła.

Zadanie 3.
(A) Udowodnij, że funkcja g zadana na przedziale $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$ wzorem $g(x) := \dfrac{x}{\sin x}$ jest rosnąca.

(B) Wykaż nierówności: $\dfrac{\pi^2}{9} \leqslant \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\, dx \leqslant \frac{\pi^2}{6}.$

(C) Dla **wybranej jednej** z powyższych „nierówności” zbadaj, czy jest ona równością.

Uwaga: w podpunktach późniejszych można korzystać z wyników punktów wcześniejszych, nawet jeśli nie zostały udowodnione.

Zadanie 4.
Znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ zadanego dla $n \geqslant 1$ wzorem $a_n := \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
lub wykaż, że granica tego ciągu nie istnieje.

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 9. VI. 2008

*Rozwiązania poszczególnych zadań należy pisać na **osobnych, czytelnie podpisanych** kartkach — proszę o napisanie w lewym górnym rogu **każdej** kartki swego imienia, nazwiska i numeru indeksu oraz poniżej — numeru rozwiązywanego zadania.*
*W czasie egzaminu z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp. korzystać **nie wolno**.*
*Rozwiązania, poza zad. 1. (A), 2. (A), 3. (A) oraz 4. (A), powinny zawierać uzasadnienia (tzn. dowody). **Należy** się w nich powoływać na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń.*
Czas na rozwiązanie zadań: 200 min.

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o wartości średniej" dla całki.

(B) [**6 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia.

(C) [**10 pkt.**] Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{2007} e^{\left(\frac{x^{2008}}{n}\right)}\,dx$.

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o mnożnikach Lagrange'a".

(B) [**6 pkt.**] Rozważamy powierzchnię $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 4x+y^2-2z+5=0\}$.
Udowodnij, że wśród wszystkich punktów zbioru M istnieje punkt o najmniejszej odległości od $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$.

(C) [**10 pkt.**] Znajdź wspomnianą powyżej najmniejszą odległość.

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o całkowaniu przez podstawienie" dla całki Lebesgue'a (względem d-wymiarowej miary Lebesgue'a).

(B) [**6**$=3\times$**2 pkt.**] Podaj przykład funkcji $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ spełniającej warunek:

a) f jest nieograniczona, całkowalna w sensie Lebesgue'a i $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda^1=1$.

b) f jest nieciągła w każdym punkcie, całkowalna w sensie Lebesgue'a i $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda^1=1$.

c) f jest ciągła i całka Lebesgue'a z f jest nieokreślona.

(C) [**10 pkt.**] Oblicz $\displaystyle\int_K f\,d\lambda^2$, gdzie $K=\{x\in\mathbb{R}^2:\ 1\leqslant x_1^2+x_2^2\leqslant 4,\ x_2\geqslant x_1\geqslant 0\}$
oraz $f(x)=2x_1x_2$ dla $x\in K$.

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj „globalne twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności" dla rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

(B) [**6 pkt.**] W oparciu o powyższe twierdzenie wykaż, że istnieje dokładnie jedna para funkcji różniczkowalnych f_1, f_2 określonych na $\mathbb{R}$, takich, że dla dowolnego $t\in\mathbb{R}$ zachodzi:
$f_1'(t)=\sin(t)f_1(t)+t^2f_2(t)$, $f_2'(t)=e^tf_1(t)+tf_2(t)+7t^2$ oraz $f_1(0)=f_2(0)=0$
(radzę nie podejmować prób znalezienia wzorów na te funkcje...).

(C) [**10 pkt.**] Populacja ryb w pewnym jeziorze opisana jest nieujemną funkcją p (a zatem $p(t)$ oznacza liczebność tej populacji w chwili t). Zakładamy, że dla tej populacji obowiązuje równanie różniczkowe

$$p'=k\cdot\sqrt{p},$$

gdzie k jest pewną stałą. Początkowo w jeziorze było 100 ryb, a po 6-ciu miesiącach było ich 169. Ile ryb będzie po roku (zakładamy, że miesiące są równej długości i że w roku jest ich 12...)?

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków - termin II, 8. IX. 2008

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu; oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno*** *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza zad. 1. (A), 2. (A), 3. (A) oraz 4. (A), powinny zawierać ***uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy*** *się w nich powoływać na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń.* ***Należy*** *także pamiętać o sprawdzaniu wszystkich koniecznych do ich użycia założeń! Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz. i 30 min.*

Zadanie 1.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj „podstawowe twierdzenie rachunku całkowego".

(B) **[6= 2×3 pkt.]** Dla $x \in [-1;\, 1]$ niech $F(x) = \int_{[-1;\, x]} f(t)\, dt$, gdzie $f(t)$ równe jest **a)** $e^{(t^2)}$;

b) $\begin{cases} -1 & \text{dla} \quad t \in [-1;\, 0] \\ 1 & \text{dla} \quad t \in (0;\, 1] \end{cases}$. Dla a) i dla b) zbadaj, czy F posiada pochodną w 0, a jeśli tak, to oblicz ją.

(C) **[10 pkt.]** Oblicz $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \sin(t^3)\, dt}{x^4}$.

Zadanie 2.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie „o ekstremach lokalnych" dla funkcji wielu zmiennych.

(B) **[6 pkt.]** Rozważamy zbiór $D = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4 \text{ oraz } x_3 \geqslant 0\}$ i funkcję $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2$. Udowodnij, że wśród wszystkich punktów zbioru D istnieje taki, w którym f osiąga swą wartość największą oraz taki, w którym osiąga ona swą wartość najmniejszą.

(C) **[10 pkt.]** Znajdź najmniejszą i największą wartość f.

Zadanie 3.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie „o całkowaniu przez podstawienie" dla całki Lebesgue'a (względem d-wymiarowej miary Lebesgue'a).

(B) **[6= 3×2 pkt.]** Podaj przykład funkcji $f : [0;\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) nieciągłej, ale całkowalnej w sensie Riemanna;

b) niecałkowalnej w sensie Riemanna, ale ograniczonej i całkowalnej w sensie Lebesgue'a;

c) nieograniczonej, ale całkowalnej w sensie Lebesgue'a.

(C) **[10 pkt.]** Niech $B = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0\}$ oraz $g(x) = x_1$ dla $x \in B$. Oblicz $\int_B g\, d\lambda^3$.

Zadanie 4.

(A) **[4 pkt.]** Podaj ścisłą definicję *rozwiązania* równania różniczkowego $y' = F(t, y)$, gdzie $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ oraz $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Co to jest *zagadnienie Cauchy'ego (tj. początkowe)* dla takiego równania?

(B) **[6 pkt.]** Czy równanie różniczkowe dla funkcji skalarnej $y' = e^{(\sin t)} y + \sin(e^t)$ posiada rozwiązanie określone na całym $\mathbb{R}$ spełniające warunek $y(0) = 0$? Jeśli tak, to ile takich rozwiązań istnieje?

(C) **[10 pkt.]** Dla pewnej rośliny kiełkującej na dnie jeziora oznaczamy przez $w(t)$ jej wysokość mierzoną w metrach od dna po czasie $t \geqslant 0$ liczonym w latach od chwili osiągnięcia przez nią poziomu wody. Wiadomo, że w tym okresie wzrost rośliny opisany jest równaniem różniczkowym

$$w' = \frac{1}{2} + \frac{1}{t+1} w.$$

Po roku część nadwodna tej rośliny osiągnęła wysokość dwukrotnie większą od podwodnej. Jaka jest głębokość jeziora?

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 12. VI. 2009

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno korzystać z*** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), ***powinny zawierać uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy się w nich powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także* ***pamiętać o sprawdzaniu założeń*** *koniecznych do ich użycia! Czas na rozwiązanie zadań: 3 godz. i 10 min.*

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o sumach Riemanna".

(B) [**6 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia (można pominąć dowód użytego na wykładzie lematu, ale należy podać sformułowanie tego lematu, jeśli będzie on użyty).

(C) [**10 pkt.**] Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_{x^2}^{2x} t^4 e^{(t^2)}\,dt}{e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}}$. [7]

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Podaj definicję pochodnej kierunkowej funkcji wielu zmiennych.

(B) [**6 pkt.**] Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w 0 oraz $Df(0)(h) = h_1 - 2h_2$ dla $h \in \mathbb{R}^2$. Znajdź obie pochodne cząstkowe f w 0 oraz pochodną kierunkową f w 0 w kierunku wektora $(4, 7)$.

(C) [**10 pkt.**] Niech $A = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \leqslant 30000,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0\}$ i niech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x_1x_2x_3$. Wykaż, że wśród wszystkich punktów zbioru A istnieje taki, w którym f osiąga swą wartość największą oraz oblicz tę wartość.

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Fubiniego.

(B) [**6 pkt.**] Znajdź wszystkie zbiory będące elementami σ-ciała $\mathfrak{M}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ generowanego przez rodzinę $\mathcal{A}$ złożoną z tylko jednego zbioru: $\{1, 2\}$. Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ **nie**mierzalnej względem $\mathfrak{M}$ (tzn. przykład f **nie** $\mathfrak{M}$-mierzalnej).

(C) [**10 pkt.**] Oblicz (jeśli jest określona) $\int_W f\,d\lambda^2$, gdzie $W = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x_1 \leqslant -x_2\}$ oraz $f(x) = \dfrac{x_1x_2}{1 + (x_1^2 + x_2^2)^2}$ dla $x \in W$.

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o równaniu liniowym" (dotyczące skalarnego afinicznego równania różniczkowego).

(B) [**6 pkt.**] Ile jest takich funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, które spełniają warunki $f(0) = 0 = f'(0)$ oraz $f''(x) = xf'(x) + x^3$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$? (może warto uwzględnić to, że pytamy tylko o liczbę takich funkcji, a nie o ich postać...).

(C) [**10 pkt.**] W pewnej krainie od wielu setek lat produkuje się papierosy. Liczebność populacji tej krainy w chwili t (czas mierzymy tu w wiekach, tj. stuleciach) wynosi $k(t)$, przy czym liczebność palaczy papierosów w tej krainie wynosi $p(t)$, a liczebność niepalących $n(t)$. Po żmudnych badaniach stwierdzono, że wzrost populacji opisuje w tej krainie prawo zapisane równaniem różniczkowym $k' = 3n + 2p$, a wzrost podpopulacji złożonej z palaczy — prawo opisane równaniem $p' = n + 2p$. Początkowo liczba palaczy i niepalących w tej krainie była równa. Po jakim czasie liczba palaczy będzie dwa razy wyższa od liczby niepalących?

---

[7] W mianowniku niechcący zabrakło jeszcze planowanego „$-x$" po „-1".....

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków — termin II, 7. IX. 2009

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno korzystać z*** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), ***powinny zawierać uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy się w nich powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń,* ***pamiętając o sprawdzaniu założeń*** *koniecznych do użycia tych twierdzeń. Czas na rozwiązanie zadań: 3 $\frac{1}{2}$ godz.*

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o sumach Riemanna".

(B) [**6 pkt.**] Oblicz granice ciągów zadanych wzorami:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^7}{n^8}$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{(\frac{k}{n})}}{n}$.

(C) [**10 pkt.**] Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin(x^2)} e^{(t^2)}\,dt}{x^2}$.

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o ekstremach lokalnych" dla funkcji wielu zmiennych.

(B) [**6 pkt.**] Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w 0 oraz $Df(0)(h) = 2h_1 - 7h_2$ dla $h \in \mathbb{R}^2$. Funkcja $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana jest przy pomocy f wzorem $u(t) = f(2009t, t^{2009})$. Oblicz $u'(0)$.

(C) [**10 pkt.**] Niech $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 4\}$ i niech $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3$. Wykaż, że wśród wszystkich punktów zbioru K istnieje taki, w którym f osiąga swą wartość największą oraz oblicz tę wartość.

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Fubiniego.

(B) [**6 pkt.**] Rozważamy zbiór trzyelementowy $X = \{1, 2, 3\}$ i σ-ciało $\mathfrak{M}$ jego podzbiorów generowane przez rodzinę $\mathcal{A}$ złożoną z tylko jednego zbioru: $\{2\}$. Znajdź wszystkie zbiory będące elementami σ-ciała $\mathfrak{M}$. Podaj przykład funkcji $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ **nie**mierzalnej względem $\mathfrak{M}$ (tzn. przykład f **nie** $\mathfrak{M}$-mierzalnej) oraz przykład funkcji mierzalnej względem $\mathfrak{M}$.

(C) [**10 pkt.**] Niech $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 7\}$. Oblicz $\int_W x_3 e^{x_3}\,dx$.

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o równaniu liniowym" (dotyczące skalarnego afinicznego równania różniczkowego).

(B) [**6 pkt.**] Ile jest takich funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, które spełniają warunki $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ oraz $f'(x) = \ln(1 + |x|)f(x) + |x|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$? (uwaga: pytamy tylko o liczbę takich funkcji, a nie o ich postać.).

(C) [**10 pkt.**] Do zamkniętego izolowanego naczynia wypełnionego powietrzem o temperaturze $0°$ C wrzucono kawałek metalu o temperaturze $1000°$ C. Szybkość nagrzewania się powietrza w naczyniu, liczona w $°$ C na godzinę, jest proporcjonalna w każdej chwili do różnicy pomiędzy temperaturą metalu a temperaturą powietrza w naczyniu, ze współczynnikiem proporcjonalności wynoszącym $0,5$. Szybkość stygnięcia (nie nagrzewania się) tego kawałka metalu jest też proporcjonalna w każdej chwili do owej różnicy. Po upływie 1 godziny różnica temperatur metalu i powietrza wyniosła $500°$ C. Po jakim czasie różnica ta wyniesie $250°$ C? Jaka będzie wówczas temperatura powietrza w naczyniu?

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 16. VI. 2010

Proszę o rozwiązania zadań na **osobnych kartkach, czytelnie oznaczonych** *w lewym górnym rogu* **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** *oraz poniżej —* **numerem zadania**.
Podczas egzaminu **nie wolno korzystać z** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), **powinny zawierać uzasadnienia** *(tzn. dowody).* **Należy się w nich powoływać** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także* **pamiętać o sprawdzaniu założeń** *koniecznych do ich użycia!*
Czas na rozwiązanie zadań: **3 godz. i 10 min.**

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj „podstawowe twierdzenie rachunku całkowego”.

(B) [**6**= 2×**3 pkt.**] Dla $x \in [-1;\,1]$ i $j = 1, 2$ niech $F_j(x) = \int_{[-1;\,x]} g_j(t)\,dt$, gdzie dla $t \in [-1;\,1]$ $g_1(t) = \sin(|t|^3)$, $g_2(t) = g_1(t) + \delta_0(t)$ oraz $\delta_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \neq 0, \\ 1 & \text{dla} \quad t = 0. \end{cases}$ Zbadaj, czy funkcje F_1, F_2 są ciągłe i czy posiadają pochodną w 0, a jeśli posiadają, to oblicz $F_j'(0)$.

(C) [**10 pkt.**] Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_{x^2}^{2010x} \ln(1+t^4)\,dt}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}}$.

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Weierstrassa, dotyczące kresów funkcji „wielu zmiennych”.

(B) [**6=2+4 pkt.**] Rozważamy zbiór $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \; 0 \leqslant x_3 \leqslant 2010\}$ i funkcję $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x_1 x_2 x_3$. Udowodnij, że f osiąga swe oba kresy. Niech g będzie obcięciem f do zbioru $D' = \{x \in D : \; x_3 > 0\}$. Czy g także osiąga oba kresy?

(C) [**10 pkt.**] Znajdź najmniejszą i największą wartość f. *Uwaga: dziedziną f jest D.*

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o zbieżności majoryzowalnej” **albo** „o zbieżności monotonicznej” dla granicy całek.

(B) [**6=2+2+2 pkt.**] Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{11, 22, 33\}$. Znajdź wszystkie zbiory będące elementami σ–ciała $\mathfrak{M}_X$ podzbiorów X, generowanego przez rodzinę $\mathcal{A}$ złożoną z tylko jednego zbioru: $\{1, 2\}$. Dla Y rozważamy σ–ciało $\mathfrak{M}_Y = 2^Y$. Podaj przykład funkcji f z X **na** Y mierzalnej względem zadanych σ–ciał (tzn. przykład funkcji $\mathfrak{M}_X$, $\mathfrak{M}_Y$-mierzalnej oraz **na**). Podaj przykład funkcji g z X **na** Y **nie**mierzalnej względem tych σ–ciał.

(C) [**10 pkt.**] Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_D f_n\,d\lambda^3$, gdzie $f_n(x) = x_3^3 \left(1 + \frac{x_3^2}{n}\right)^n$ dla $x \in D$ oraz zbiór D jest taki jak w zadaniu 2.

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj „globalne twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności” dla rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

(B) [**6=4+2 pkt.**] Wykaż, że przy dowolnych $t_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ istnieje para funkcji różniczkowalnych $f_1, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, takich, że dla **każdego** $t \in \mathbb{R}$ zachodzi: $f_1'(t) = \sin(tf_2(t))$, $f_2'(t) = \cos(t^2 f_1(t))$ oraz $f_1(t_0) = a_1$ i $f_2(t_0) = a_2$. Znajdź liczbę takich par funkcji w zależności od t_0, a_1, a_2.

(C) [**10=7+3 pkt.**] Rozwój pewnej populacji komarów opisany jest nieujemną funkcją k (a zatem $k(t)$ oznacza liczebność tej populacji w chwili t). Zakładamy, że w części okresu wiosennego obowiązuje tu równanie różniczkowe

$$k' = c \cdot k^2,$$

gdzie c jest pewną stałą. W dniu 1 kwietnia w tej populacji było 10 milionów komarów, a po miesiącu było ich 20 milionów. Ile komarów było 16 maja? Którego dnia, najpóźniej, ten model matematyczny musi przestać obowiązywać?

Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków — termin II, 6. IX. 2010

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych kartkach, czytelnie oznaczonych*** *w lewym górnym rogu* **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** *oraz poniżej —* **numerem zadania**.
Podczas egzaminu ***nie wolno korzystać z*** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), ***powinny zawierać uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy się w nich powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także* ***pamiętać o sprawdzaniu założeń*** *koniecznych do ich użycia!*
Czas na rozwiązanie zadań: **3 godz. i 30 min.**

Zadanie 1.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj „podstawowe twierdzenie rachunku całkowego".

(B) **[6= 2×3 pkt.]** Dla $x \in [-1; 1]$ niech $F(x) = \int_{[-1;\, x]} f(t)\, dt$, gdzie $f(t)$ równe jest

a) $\sin(t^2)$; **b)** $\begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [-1; 0] \\ 1 & \text{dla } t \in (0; 1]. \end{cases}$

Dla a) i dla b) zbadaj, czy F posiada pochodne jednostronne w 0 i oblicz je, jeśli posiada.

(C) **[10 pkt.]** Oblicz $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_{x^4}^{x^3} \sin(t^2)\, dt}{x^9}$.

Zadanie 2.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie Weierstrassa, dotyczące kresów funkcji „wielu zmiennych".

(B) **[7=2 + 4 pkt.]** Rozważamy zbiór $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + 2x_2^2 \leqslant 1\}$ i funkcję $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x_1 x_2$. Udowodnij, że f osiąga swe oba kresy. Niech g będzie obcięciem f do zbioru $D' = \{x \in D : \ x_1^2 + 2x_2^2 < 1\}$. Czy g osiąga któryś ze swych kresów?

(C) **[10 pkt.]** Znajdź najmniejszą i największą wartość f. *Uwaga: dziedziną f jest D.*

Zadanie 3.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj twierdzenie „o zbieżności majoryzowalnej" dla granicy całek.

(B) **[6= 3×2 pkt.]** Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$ i niech $\mathcal{A} = \{\{4\}\}$ (tzn. rodzina $\mathcal{A}$ składa się z tylko jednego zbioru: $\{4\}$). Dla X ustalamy σ–ciało jego podzbiorów będące σ–ciałem generowanym przez $\mathcal{A}$, tzn. $\sigma(\mathcal{A})$. Znajdź wszystkie elementy tego σ–ciała. Podaj przykład funkcji mierzalnej, nie będącej stałą, z X w $\mathbb{R}$ oraz przykład funkcji niemierzalnej z X w $\mathbb{R}$.

(C) **[10 pkt.]** Oblicz $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_K f_n\, d\lambda^2$, gdzie K — koło domknięte w $\mathbb{R}^2$ o środku w punkcie $(1, 1)$ i o promieniu $\sqrt{2}$ oraz $f_n(x) = x_1 \left(1 + \frac{x_2}{n^2}\right)^n + x_2 \left(1 + \frac{x_1}{n^2}\right)^n$ dla $x \in K$.

Zadanie 4.

(A) **[4 pkt.]** Sformułuj „globalne twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności" dla rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.

(B) **[6 pkt.]** W oparciu o powyższe twierdzenie wykaż, że istnieje dokładnie jedna para funkcji różniczkowalnych f_1, f_2 określonych na $\mathbb{R}$, takich, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi:
$f_1'(t) = f_1(t) + t^2 f_2(t)$, $f_2'(t) = t f_1(t) + f_2(t) + t^{2010}$ oraz $f_1(0) = f_2(0) = 0$
(radzę nie podejmować prób znalezienia jawnych wzorów na te funkcje...).

(C) **[10 pkt.]** Wartość $b(t)$ oznacza liczebność pewnej populacji bakterii w chwili t. Zakładamy, że dla tej populacji obowiązuje równanie różniczkowe $b' = c \cdot \sqrt{b}$, gdzie c jest pewną stałą. Początkowo populacja liczyła 100 bakterii, a po minucie było ich 169. Ile bakterii będzie liczyła ta populacja po kolejnej minucie?

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 22 VI 2012, godz. 15.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, oznaczonych* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać z* ***notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*** *Rozwiązania (prócz (A) w zad. 1, 3, 4), muszą być poparte dowodami, a poszczególne kroki dowodów, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń.* ***Proszę się na te twierdzenia powoływać*** *w sposób umożliwiający ich identyfikację (np. podając nazwę, ew., w przypadku braku nazwy, pełne sformułowanie).*
Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 15 min.***

Zadanie 1.

(A) **[6 pkt.]** Sformułuj twierdzenie Lagrange'a o postaci reszty Taylora.

(B) **[5 pkt.]** Czy to prawda, że 1 przybliża wartość $\sqrt[1000]{1,01}$ z dokładnością do 10^{-4}?

(C) **[10 pkt.]** Znajdź jakieś wymierne przybliżenie liczby $\sqrt[1000]{1,01}$ z dokładnością do 10^{-5}.

Zadanie 2.

(A) **[5 pkt.]** Sformułuj twierdzenie o ciągłości granicy (dla ciągów funkcyjnych).

(B) **[10 pkt.]** Podaj dowód powyższego twierdzenia.

(C) **[10 pkt.]** Rozważamy funkcję $f : (-5; 5) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną dla $x \in (-5; 5)$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}.$$

Wykaż, że f jest ciągła. Czy f jest różniczkowalna? Jeśli tak, oblicz $f'(0)$.

Zadanie 3.

(A) **[6 pkt.]** Sformułuj „podstawowe twierdzenie rachunku całkowego".

(B) **[6 pkt.]** Niech $g(x) = \int_{e\cdot x}^{e^2\cdot x} \sqrt{\ln(t)}\, dt$ dla $x > 1$. Oblicz $g'(e)$.

(C) **[10 pkt.]** Oblicz $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2}(\ln(n+k) - \ln n)$,
lub wykaż, że powyższa granica nie istnieje.

Zadanie 4.

(A) **[5 pkt.]** Podaj definicję różniczki funkcji wielu zmiennych.

(B) **[9=3+3+3 pkt.]** Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ posiada w każdym punkcie x swej dziedziny pochodne cząstkowe po każdej ze zmiennych, zadane wzorami

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = x_3.$$

Rozstrzygnij, czy: **a)** f jest różniczkowalna; **b)** f jest ciągła;
c) funkcja g, będąca obcięciem f do zbioru $A := \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2(x_1-x_2)^2+(x_1-7)^2+\ln(1+x_3^2) \leqslant 2\}$ osiąga swój kres dolny.

(C) **[10 pkt.]** Funkcja h zadana jest na $K := \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_1+2x_2+3x_3 \leqslant 6\}$ wzorem $h(x) = x_1 e^{(x_1+2x_2+3x_3)}$. Znajdź kres górny i kres dolny zbioru wartości h.

Egzamin „poprawkowy”z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 6 IX 2012, godz. 10.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, oznaczonych* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać z* ***notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*** *Rozwiązania części (B) i (C) wszystkich zadań muszą być poparte dowodami, a poszczególne kroki dowodów, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń.* ***Proszę się na te twierdzenia powoływać*** *w sposób umożliwiający ich identyfikację (np. podając nazwę, ew., w przypadku braku nazwy, pełne sformułowanie).*
Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 15 min.***

Zadanie 1.

(A) [**7 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Peano o postaci reszty Taylora. Wyjaśnij co to jest n-ty wielomian[8] funkcji f w punkcie x_0.
Wyjaśnij znaczenie zapisu: $f(x) = o\left(x^{2012}\right)$ przy $x \to 0$.

(B) [**6 pkt.**] Zbadaj, czy $\sin(x^2) = o(x)$ przy $x \to 0$ oraz czy $\sin(x) - x = o(x^3)$ przy $x \to 0$.

(C) [**10 pkt.**] Znajdź jakieś wymierne przybliżenie liczby $\cos(2)$ z dokładnością do $\frac{1}{10}$.

Zadanie 2.

(A) [**5 pkt.**] Sformułuj twierdzenie o ciągłości granicy (dla ciągów funkcyjnych).

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia.

(C) [**10 pkt.**] Rozważamy funkcję $f : (-5; 5) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną dla $x \in (-5; 5)$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{x \cdot \sqrt{n}}{n^2 - x^2}.$$

Czy istnieje $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? Jeśli istnieje, to zbadaj, czy ta granica jest większa od zera. Czy f jest różniczkowalna? Jeśli tak, to zbadaj, czy $f'(0) > 0$.

Zadanie 3.

(A) [**5 pkt.**] Sformułuj twierdzenie o sumach Riemanna.

(B) [**6 pkt.**] Niech $g(x) = \int_{[0;\ 2^x]} \sin(t^2)\, dt$ dla $x \in \mathbb{R}$. Oblicz $g'(0)$.

(C) [**10 pkt.**] Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 - 4n^2}$ lub wykaż, że powyższa granica nie istnieje.

Zadanie 4.

(A) [**6 pkt.**] Podaj definicje następujących rodzajów podzbiorów R^k: otwartego, domkniętego, ograniczonego, zwartego. Sformułuj twierdzenie Weierstrassa, dotyczące kresów funkcji „wielu zmiennych”.

(B) [**7 pkt.**] Rozważamy zbiór $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + 2x_2^2 \leqslant 1\}$ i funkcję $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x_1 x_2$. Udowodnij, że f osiąga swe oba kresy. Niech g będzie obcięciem f do zbioru $U := \{x \in D : \ x_1^2 + 2x_2^2 < 1\}$. Czy g osiąga któryś ze swych kresów?

(C) [**10 pkt.**] Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji f zdefiniowanej w części (B) zadania. *Uwaga: dziedziną f jest D, a nie U.*

[8] zapomniane słowo: Taylora

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 21 VI. 2013, godz. 10.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać* ***z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.***

UWAGA! *Rozwiązania wszystkich punktów (poza częściami „podaj/sformułuj definicję/twierdzenie”, „wyjaśnij znaczenie”,...) powinny zawierać* **dowody**. *Poszczególne kroki dowodu, poza zupełnie elementarnymi, powinny opierać się na* **twierdzeniach** *(w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu; ew. także z ćwiczeń. Użyte twierdzenia należy każdorazowo* ***wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 30 min.***

Zadanie 1.

(A) **[10=5+5 pkt.]** Podaj definicje sumy górnej i sumy dolnej dla funkcji ograniczonej $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i dla ustalonego podziału przedziału $[a; b]$ oraz definicję całkowalności f i całki w sensie Riemanna z f. Sformułuj twierdzenie „o wartości średniej” dla całki Riemanna.

(B) **[10=6+4 pkt.]** Podaj dowód powyższego twierdzenia „o wartości średniej”. Znajdź punkt osiągania całkowej wartości średniej w przypadku funkcji $f : [0; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = 5^x$.

(C) **[10=5+5 pkt.]** Dla $n, k \in \mathbb{N}$ określamy

$$S(n,k) := \sum_{s=1}^{k} \frac{\sin\left(n + \frac{s}{k}\right)}{\sqrt[7]{nk^7 + sk^6}}.$$

Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje skończona granica $\lim_{k\to\infty} S(n,k)$. Granicę tę oznaczamy przez G_n. Wykaż zbieżność ciągu $\{G_n\}_{n\geqslant 1}$ i znajdź jego granicę.

Zadanie 2.

(A) **[10=5+3+2 pkt.]** Sformułuj twierdzenie Peano (o postaci reszty Taylora), wyjaśnij co to jest n-ty wielomian Taylora funkcji f w punkcie x_0 oraz wyjaśnij znaczenie zapisu: $f(x) = o\left((x-2013)^{10}\right)$ przy $x \to 2013$. Co to jest szereg Taylora funkcji f o środku w punkcie x_0? Czy zdarza się, że taki szereg jest jednostajnie zbieżny na całej prostej $\mathbb{R}$?

(B) **[10=2+4+4 pkt.]** Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x) = 1 + x - 4x^{999}$, niech T_{n,x_0} będzie n-tym wielomianem Taylora f w punkcie x_0 i niech funkcja S_{x_0} będzie sumą szeregu Taylora funkcji f o środku w punkcie x_0. **a)** Znajdź wartość $\lim_{n\to\infty} T_{n,3}(1)$. **b)** Znajdź wszystkie takie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dla których $T_{n,0}(1) = f(1)$. **c)** Znajdź wszystkie takie $x_0 \in \mathbb{R}$, dla których $S_{x_0}(1) = f(1)$.

(C) **[10 pkt.]** Znajdź jakiekolwiek wymierne przybliżenie liczby $\cos(\sqrt{2})$ z dokładnością do $\frac{1}{10}$.

VERTE!

Zadanie 3.

(A) [**10=4+6 pkt.**] Podaj definicje zbieżności punktowej, jednostajnej i niemal jednostajnej ciągu funkcyjnego. Sformułuj twierdzenie "o różniczkowalności granicy (ciągu funkcyjnego)"

(B) [**10=2+3+5 pkt.**] Podaj przykład ciągu funkcyjnego
a) zbieżnego punktowo, ale nie jednostajnie; **b)** złożonego z funkcji ciągłych i przy tym zbieżnego punktowo do funkcji nieciągłej; **c)** złożonego z funkcji różniczkowalnych i przy tym zbieżnego jednostajnie do funkcji nieróżniczkowalnej.

(C) [**10 pkt.**] Rozważamy funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+x)}{n^2+x^2}.$$

W jakich punktach $x \in \mathbb{R}$ funkcja f jest ciągła, a w jakich jest różniczkowalna? Jeśli $f'(0)$ istnieje, to zbadaj, czy $f'(0) > 0$.

Zadanie 4.

(A) [**10=4+6 pkt.**] Podaj definicję przestrzeni metrycznej, kuli, zbioru otwartego i zbioru domkniętego. Sformułuj twierdzenie "o mnożnikach Lagrange'a".

(B) [**10=2+4+4 pkt.**] Rozważamy zbiór $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2+2x_2^2+3x^2 \leqslant 1\}$ [9] i funkcję $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ taką, że $f(x)$ jest odległością (euklidesową) punktu x od punktu 0. Niech g będzie obcięciem f do zbioru $U := \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1^2 + 2x_2^2 + 3x^2 < 1\}$ [10]. Zbadaj otwartość i domkniętość zbiorów D i U. Udowodnij, że f osiąga swe oba kresy. Czy g też osiąga swe oba kresy?

(C) [**10 pkt.**] Znajdź największą wartość funkcji f zdefiniowanej w części (B) zadania. *Uwaga: dziedziną f jest D, a nie U.*

---

[9] Powinno być x_3^2 zamiast x^2.
[10] Powinno być x_3^2 zamiast x^2.

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków — termin II, 5 IX 2013, godz. 10.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać* ***z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.***

UWAGA! *Rozwiązania wszystkich punktów (poza częściami „podaj/sformułuj definicję/twierdzenie", „wyjaśnij znaczenie",...) powinny zawierać* **dowody***. Poszczególne kroki dowodu, oprócz zupełnie elementarnych, powinny opierać się na* **twierdzeniach** *(w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. z ćwiczeń. Użyte twierdzenia należy każdorazowo* ***wskazywać****, podając ich nazwę lub treść — gdy brak nazwy.*

Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 30 min.***

Zadanie 1.

(A) [**10=5+5 pkt.**] Podaj definicje pochodnej funkcji (jednej zmiennej) w punkcie oraz różniczkowalności w punkcie. Sformułuj twierdzenie Lagrange'a „o wartości średniej".

(B) [**10=2+3+5 pkt.**] Podaj przykład
a) funkcji określonej na $\mathbb{R}$, ciągłej w punkcie 3 ale nie posiadającej pochodnej w tym punkcie;
b) funkcji określonej na $\mathbb{R}$, posiadającej pochodną w punkcie 3 lecz nieciągłej w tym punkcie;
c) ciągu funkcyjnego złożonego z funkcji różniczkowalnych i przy tym zbieżnego jednostajnie do funkcji nieróżniczkowalnej.

(C) [**10 pkt.**] Dla każdej liczby $c \in \mathbb{R}$ znajdź liczbę rozwiązań $x \in \mathbb{R}$ równania $x^{17} - 17x = c$.

Zadanie 2.

(A) [**10=5+5 pkt.**] Podaj definicje n-tego wielomianu Taylora i n-tej reszty Taylora funkcji f w punkcie x_0, a następnie sformułuj twierdzenie Peano (o postaci reszty Taylora). Podaj definicję szeregu Taylora funkcji f o środku w punkcie x_0 i rozstrzygnij, czy dla każdej funkcji określonej na $\mathbb{R}$ i dowolną liczbę razy różniczkowalnej jej szereg Taylora o środku w punkcie 0 jest punktowo zbieżny (na całej prostej $\mathbb{R}$).

(B) [**10=2+4+4 pkt.**] Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x) = x^{1000}$, niech T_{n,x_0} będzie n-tym wielomianem Taylora f w punkcie x_0 i niech funkcja S_{x_0} będzie sumą szeregu Taylora funkcji f o środku w punkcie x_0. **a)** Wyznacz wartość $\lim_{n\to+\infty} T_{n,0}(1)$. **b)** Znajdź wszystkie takie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dla których $T_{n,0}(1) = f(1)$. **c)** Znajdź wszystkie takie $x \in \mathbb{R}$, dla których $S_0(x) = f(x)$.

(C) [**10 pkt.**] Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $f(x) = e^x + e^{-x}$. Znajdź jakiekolwiek wymierne przybliżenie liczby $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ z dokładnością do $\frac{1}{20}$.

Zadanie 3.

(A) [**10=6+4 pkt.**] Wyjaśnij pojęcie sumy Riemanna i sformułuj twierdzenie „o sumach Riemanna". Podaj definicję zbieżności całki niewłaściwej (dla niewłaściwości prawostronnej).

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód twierdzenia „o sumach Riemanna" wraz z dowodem użytego tu lematu.

(C) [**10=5+5 pkt.**] Wykaż zbieżność i oblicz całkę niewłaściwą

$$\int_0^{+\infty} x^{21} e^{-x^2}\, dx.$$

VERTE!

Zadanie 4.

(A) **[10=3+7 pkt.]** Podaj definicję zbioru otwartego i zbioru domkniętego w przestrzeni metrycznej. Sformułuj twierdzenie "o mnożnikach Lagrange'a".

(B) **[10=2+4+4 pkt.]** Rozważamy zbiór $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \leqslant 6\}$ i funkcję $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = 2x_1 + 4x_2 - 6x_3$. Niech g będzie obcięciem f do zbioru $U := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 < 6\}$. Zbadaj otwartość i domkniętość zbiorów D i U. Dla każdej z funkcji f i g zbadaj, czy osiąga ona swój kres dolny oraz czy osiąga swój kres górny.

(C) **[10 pkt.]** Znajdź kres górny i kres dolny funkcji f zdefiniowanej w części (B) zadania. *Uwaga: dziedziną f jest D, a nie U.*

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 11. VI 2014, godz. 10.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać* ***z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.***

UWAGA! *Rozwiązania wszystkich punktów (poza częściami „podaj/sformułuj definicję/twierdzenie", „wyjaśnij znaczenie",...) powinny zawierać* **dowody***. Poszczególne kroki dowodu, oprócz zupełnie elementarnych, powinny opierać się na* **twierdzeniach** *(w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. z ćwiczeń. Użyte twierdzenia należy każdorazowo* ***wskazywać****, podając ich nazwę lub treść — gdy brak nazwy.*

Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 30 min.***

Zadanie 1.

(A) **[10=2+2+3+3 pkt.]** Podaj definicję pochodnej funkcji jednej zmiennej w punkcie oraz definicję różniczkowalności takiej funkcji. Sformułuj twierdzenia: „o ekstremach lokalnych" (dla jednej zmiennej) i Lagrange'a „o wartości średniej".

(B) **[10 pkt.]** Podaj dowód twierdzenia **Rolle'a** „o wartości średniej".

(C) **[10 pkt.]** Znajdź jakiekolwiek wymierne przybliżenie q liczby $a := \frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ z dokładnością do $d := \frac{1}{500}$ (tzn. takie $q \in \mathbb{Q}$, że $|a - q| \leqslant d$).

Zadanie 2.

(A) **[10=2+2+3+3 pkt.]** Podaj definicje zbieżności punktowej i jednostajnej **ciągu** funkcyjnego. Sformułuj twierdzenie „o warunku koniecznym zbieżności jednostajnej **szeregów** funkcyjnych" oraz kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej **szeregów** funkcyjnych.

(B) **[10=3+3+4 pkt.]** Podaj przykład **szeregu** funkcyjnego $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ o wszystkich wyrazach f_n będących funkcjami różniczkowalnymi, który ponadto
a) jest zbieżny punktowo ale nie jest zbieżny jednostajnie; **b)** nie jest zbieżny jednostajnie i zachodzi $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0$; **c)** jest zbieżny jednostajnie do funkcji nieróżniczkowalnej.

(C) **[10 pkt.]** Rozważamy funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{n(1+e^x)}}.$$

Wykaż, że f jest klasy C^1 i oblicz $f'(0)$.

Zadanie 3.

(A) **[10=3+7 pkt.]** Sformułuj i udowodnij „kryterium porównawcze dla całek niewłaściwych", dla przypadku funkcji określonych na półprostej $[a; +\infty)$.

(B) **[10=5+5 pkt.]** Zbadaj, czy poniższe całki niewłaściwe są zbieżne; jeśli tak, to znajdź ich wartość:
a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx$; **b)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

(C) **[10 pkt.]** Funkcja $f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest zadana wzorem $f(x) = \displaystyle\int_{[-1;\, x]} (\sin t)\, e^{(t^4)}\, dt$ dla $x \in [-1; 1]$. Znajdź wszystkie punkty $x \in [-1; 1]$, w których f posiada ekstremum lokalne. Wykaż, że f osiąga swą wartość naj**większą** i znajdź ją.

VERTE!

Zadanie 4.

(A) **[10=4+2+2+2 pkt.]** Podaj definicję przestrzeni metrycznej oraz definicje zbioru otwartego, zbioru domkniętego i ciągu zbieżnego w przestrzeni metrycznej.

(B) **[10=2+2+3+3 pkt.]** Podaj definicję pochodnej kierunkowej i różniczki dla funkcji wielu zmiennych. Dla funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = (1+2x_1)(2+5x_2)$, $x \in \mathbb{R}^2$ i dla $a = (0,0)$ rozstrzygnij o istnieniu różniczki f w a oraz o istnieniu pochodnej kierunkowej w a w kierunku $v = (7, 19)$; jeśli istnieją — znajdź je.

(C) **[10 pkt.]** Rozważamy zbiór $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \quad 7x_1^2 + 11x_2^2 \leqslant 51\}$ i funkcję $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = 14x_1 + 44x_2$. Znajdź kres górny i kres dolny f. Dla obu kresów zbadaj, czy są one osiągane przez f w D oraz czy są osiągane przez nią w $\mathrm{Int} D$.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 5 IX 2014, godz. 10.00

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****. Nie wolno korzystać* ***z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.***

UWAGA! *Rozwiązania wszystkich punktów (poza częściami „podaj/sformułuj definicję/twierdzenie") powinny zawierać* **dowody**. *Poszczególne kroki dowodu, oprócz zupełnie elementarnych, powinny opierać się na* **twierdzeniach** *(w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. z ćwiczeń. Użyte twierdzenia należy każdorazowo* ***wskazywać****, podając ich nazwę lub treść.*

Czas na rozwiązanie zadań: ***3 godz. i 30 min.***

Zadanie 1.

(A) **[10=5+5 pkt.]** Sformułuj twierdzenia Lagrange'a i Cauchy'ego „o wartości średniej".

(B) **[10 pkt.]** Sformułuj i podaj dowód tej części twierdzenia „o własnościach rachunkowych pochodnej", która dotyczy pochodnej iloczynu.

(C) **[10 pkt.]** Zbadaj istnienie granicy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[15]{2+x} - \sqrt[15]{2} - \frac{\sqrt[15]{2}}{30}x}{e^{2x} - 1 - 2x}.$$

Jeśli ta granica istnieje, to znajdź jej wartość.

Zadanie 2.

(A) **[10=3+3+4 pkt.]** Podaj definicję sumy Riemanna i sformułuj twierdzenie „o sumach Riemanna" oraz „podstawowe twierdzenie rachunku całkowego".

(B) **[10=3+3+4 pkt.]** Niech $g(x) = \int_{-(1+x^2)}^{(1+x^2)} \sin(t^3)\, dt$ dla $x \in \mathbb{R}$. Oblicz $g(0)$, $g'(0)$ oraz $g''(0)$.

(C) **[10 pkt.]** Zbadaj czy istnieje granica $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k^4+n^4}$,

a jeśli istnieje, to oblicz jej wartość.

Zadanie 3.

(A) **[10=4+1+1+4 pkt.]** Podaj definicję przestrzeni metrycznej (z warunkami na metrykę), definicję kuli („otwartej") $K(a,r)$ o środku a i promieniu r oraz definicję zbioru otwartego. Udowodnij, że w każdej przestrzeni metrycznej $K(a,r)$ jest zbiorem otwartym.

(B) **[10=2+2+3+3 pkt.]** W każdym z poniższych podpunktów rozstrzygnij, czy istnieje ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ o wyrazach $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, spełniający podane warunki: **a)** $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny punktowo ale nie jest zbieżny jednostajnie; **b)** $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny punktowo ale nie jest zbieżny niemal jednostajnie; **c)** dla pewnych ciągłych ale różnych od stałych funkcji f i g ciąg $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny punktowo do funkcji f i jest zbieżny jednostajnie do funkcji g oraz $\forall_{t\in\mathbb{R}} (f(t))^2 = 3g(t) - 2$; **d)** $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji ciągłej i każda z funkcji f_n jest nieciągła w punkcie 0.

(C) **[10 pkt.]** Rozważamy funkcję $f : [0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną dla $x \in [0;+\infty)$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n}.$$

Czy istnieje $\lim_{x\to 0} f(x)$? Jeśli tak, to znajdź jej wartość. Czy f jest różniczkowalna? Jeśli tak, to zbadaj, czy $f'(0) > 0$.

VERTE!

Zadanie 4.

(A) **[10=2+3+2+3 pkt.]** Podaj definicję pochodnej kierunkowej i różniczki dla funkcji wielu zmiennych. Niech $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana dla $x \in \mathbb{R}^3$ wzorem $f(x) = x_1 x_2 + x_3$. Wykaż, że f jest klasy C^1 i rozstrzygnij czy istnieje różniczka f w punkcie $a = (0, 0, 0)$; jeśli istnieje — znajdź ją.

(B) **[10=2+4+4 pkt.]** Podaj definicję maksimum lokalnego oraz sformułuj twierdzenia „o ekstremach lokalnych" i „o warunkach dostatecznych na ekstrema lokalne" (wszystko to dla przypadku funkcji wielu zmiennych).

(C) **[10 pkt.]** Wyznacz wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej dla $x \in \mathbb{R}^2$ wzorem $f(x) = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2)$.

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2015 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***1 godz. 50 min***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [2 pkt] Podaj definicję n***-tego wielomianu Taylora funkcji*** f ***w punkcie*** x_0 (oznaczanego tu dalej przez T_{n,f,x_0}) oraz definicję n***-tej reszty Taylora funkcji*** f ***w punkcie*** x_0 (oznaczanej tu dalej przez R_{n,f,x_0}).

A. b) [3 pkt] Podaj wartość $T_{2,f,0}(3)$ oraz $R_{2,f,0}(3)$ dla $f = \exp$.

A. c) [5 pkt] Sformułuj twierdzenie ***Lagrange'a o postaci reszty Taylora***.

B. a) [5 pkt] Wykaż, że dla każdej funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^∞ jeżeli

$$\forall_{n \geqslant 2015} \, \forall_{x \in \mathbb{R}} \, |f^{(n)}(x)| \leqslant 7,$$

to ciąg funkcyjny $\{T_{n,f,0}\}_{n \geqslant 0}$ jest punktowo zbieżny do f.

B. b) [2 pkt] Czy powyżej musi zachodzić także zbieżność niemal jednostajna?

B. c) [3 pkt] Podaj przykład funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającej założenia z punktu B. a), dla której $\{T_{n,f,0}\}_{n \geqslant 0}$ **nie** jest jednostajnie zbieżny (na $\mathbb{R}$).

Zadanie 2.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj definicję ***sumy górnej dla funkcji*** $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ***i podziału*** P ***przedziału*** $[a; b]$ (oznaczanej tu dalej przez $\widehat{S}(f, P)$) oraz definicję ***całki górnej z*** f (oznaczanej tu dalej przez $\widehat{\int}_{[a;b]} f$).

A. b) [3 pkt] Podaj wartość $\widehat{\int}_{[0;\pi]} f$ dla f bedącej funkcją sin obciętą do przedziału $[0; \pi]$ oraz $\widehat{S}(g, P)$) dla funkcji $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stale równej jeden i podziału P przedziału $[0; 1]$ "na 9 przedziałów o równej długości".

A. c) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o całkowalności funkcji ciągłych***.

B. a) [3 pkt] Oblicz całkę $\displaystyle\int_{[0;\pi]} x \sin x \, dx$.

B. b) [3 pkt] Zbadaj zbieżność i oblicz całkę niewłaściwą („mieszaną") $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(3-x)^2}} \right) dx.$

B. c) [4 pkt] Oblicz pochodną w punkcie 0 funkcji $h : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem
$h(x) := (x+1)^{2015} \displaystyle\int_{[0;x]} e^{t^2} dt, \; x \geqslant 0.$

Zadanie 3.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj definicję ***metryki*** w zbiorze X.

A. b) [3 pkt] Podaj po jednym przykładzie:
(i) ograniczonego zbioru otwartego, **(ii)** nieograniczonego zbioru domkniętego, **(iii)** zbioru zwartego

w przestrzeni metrycznej $\mathbb{R}^2$ (ze standardową metryką euklideswą), przy czym **nie mogą** to być zbiory ani $\mathbb{R}^2$, ani kula (otwarta, domknieta), ani żaden zbiór skończony.

A. c) [4 pkt] Sformułuj Twierdzenie ***o działaniach na zbiorach otwartych i domkniętych***.

B [10 pkt] Udowodnij część dotyczącą zbiorów otwartych Twierdzenia ***o działaniach na zbiorach otwartych i domkniętych***.

Zadanie 4.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj definicję ***różniczki funkcji w punkcie*** dla funkcji wielu zmiennych i punktu należącego do wnętrza jej dziedziny.

A. b) [3 pkt] Dla funkcji f różniczkowalnej w punkcie wewnetrznym p dziedziny opisz związki pomiędzy: **(i)** różniczką funkcji f w punkcie p a pochodną kierunkową f w punkcie p w kierunku v, **(ii)** różniczką funkcji f w punkcie p a pochodną cząstkową f w punkcie p po zmiennej j, **(iii)** różniczką funkcji f w punkcie p a macierzą Jacobiego f w punkcie p.

A. c) [4 pkt] Sformułuj Twierdzenie ***o mnożnikach Lagrange'a***.

B. a) [4 pkt] Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie
$M := \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 = 1 \text{ i } x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ oraz $f(x) = x_1 + 5x_2$ dla $x \in M$.

B. b) [4 pkt] Rozstrzygnij o różniczkowalności w punkcie 0 funkcji $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanych wzorami: **(i)** $f(x) = |x_1 x_2|$; **(ii)** $g(x) = \ln(1 + (x_1 + e^{x_2})^2)$; $x \in \mathbb{R}^2$.

B. c) [2 pkt] Funkcja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ma pochodną w 0 równą $(7, 8)$ i $g(0) = (1, 1)$. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $(\text{grad} f)(1, 1) = (2, 3)$. Znajdź $(f \circ g)'(0)$.

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2015
— Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***1 godz. 50 min.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***10 pkt.***

Zadanie 1. Rozstrzygnij, czy to prawda, że dla każdego $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$1 + \sqrt[3]{e^{2a}}\sqrt[5]{e^b}\sqrt[15]{e^{2c}} \leqslant \sqrt[3]{(1+e^a)^2}\sqrt[5]{(1+e^b)}\sqrt[15]{(1+e^c)^2}.$$

Zadanie 2. Dla każdego $n \geqslant 0$ określamy funkcję $f_n : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \sqrt[n+1]{n+1}\left(\frac{x+x^2}{2}\right)^n, \qquad x \in [-1; 1].$$

(uwaga: "0^0" pojawiające sie tu dla $n = x = 0$ określamy jako 1).

a) Zbadaj, czy ciąg funkcyjny $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ jest zbieżny jednostajnie.

b) Wykaż, że funkcja $S : (-1; 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \qquad x \in (-1; 1),$$

jest poprawnie określona (tzn. szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ dla wszystkich $x \in (-1; 1)$ jest zbieżny). Oblicz jej granicę w punkcie 0 oraz pochodną w punkcie 0, jeśli istnieją.

Zadanie 3. Oblicz całkę Riemanna z funkcji $g : [0; \pi/4] \longrightarrow \mathbb{R}$ (po przedziale $[0; \pi/4]$) zadanej wzorem

$$g(x) = \frac{\operatorname{tg}(x)}{(\cos x)^2 - 4}, \qquad x \in [0; \pi/4].$$

Zadanie 4. Znajdź wszystkie maksima lokalne i minima lokalne funkcji $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 (4 - x_1 - x_2 - x_3), \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Egzamin „poprawkowy z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 4 IX 2015 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***1 godz. 50 min.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Sformułuj dwa twierdzenia dotyczące funkcji różniczkowalnych na przedziale: jedno — gwarantujące, że funkcja jest rosnąca przy pewnych założeniach o jej (pierwszej) pochodnej oraz drugie — gwarantujące jej wypukłość przy pewnych założeniach o pochodnej (też pierwszej). W obu przypadkach rozstrzygnij, czy wspomniane założenie o pochodnej jest także warunkiem koniecznym.

A. b) [3 pkt] Podaj przykład funkcji różniczkowalnej $f\colon [-1;1]\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ o pochodnej mniejszej od zera (w każdym punkcie), która nie jest malejąca.

A. c) [3 pkt] Podaj przykład **ściśle** rosnącej funkcji różniczkowalnej $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ takiej, że $f'(2015) \leqslant 0$.

B [10 pkt] Sformułuj twierdzenie ***Lagrange'a o wartości średniej*** i **podaj jego dowód** (w przypadku powoływania się na twierdzenie Rolle'a nie należy już przytaczać jego dowodu).

Zadanie 2.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [5 pkt] Podaj definicje zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego i szeregu funkcyjnego oraz zbieżności niemal jednostajnej ciągu funkcyjnego i szeregu funkcyjnego.

A. b) [5 pkt] Sformułuj ***Kryterium Weierstrassa*** (zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego).

B. a) [3 pkt] Czy jest możliwe aby ciąg funkcyjny, którego wyrazami są funkcje ciągłe był zbieżny punktowo do funkcji nieciągłej?

B. b) [2 pkt] Czy jest możliwe aby ciąg funkcyjny był zbieżny punktowo do granicy f i zbieżny jednostajnie do granicy g różnej od f?

B. c) [5 pkt] Czy szereg Taylora funkcji cos (rozważanej na całym $\mathbb{R}$) jest jednostajnie zbieżny?

Zadanie 3.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Podaj definicję ***sumy dolnej*** ($\check{S}(f,P)$) ***dla funkcji*** $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ***i podziału*** P ***przedziału*** $[a;b]$ oraz definicję ***całki dolnej*** ($\underline{\int}_{[a;b]} f$) ***z*** f.

A. b) [3 pkt] Podaj definicję całkowalności funkcji w sensie Riemanna oraz przykład funkcji ograniczonej na $[0;17]$, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

A. c) [3 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o sumach Riemanna***.

B. a) [5 pkt] Oblicz całkę $\displaystyle\int_{[0;1]} x^3 e^{(x^2)}\,dx$.

B. b) [5 pkt] Oblicz drugą pochodną w punkcie 0 funkcji $h\colon [0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej dla $x \geqslant 0$ wzorem $h(x) := e^x \displaystyle\int_{[0;5x]} e^{t^2}\,dt$.

Zadanie 4.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj definicje ***domkniętego*** podzbioru przestrzeni metrycznej oraz ***zwartego*** podzbioru $\mathbb{R}^d$.

A. b) [3 pkt] Sformułuj twierdzenie ***Weierstrassa o osiąganiu kresów*** (dla funkcji wielu zmiennych).

A. c) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o ekstremach lokalnych*** (dla funkcji wielu zmiennych).

B. a) [5 pkt] Znajdź przykład zwartego zbioru $D \subset \mathbb{R}^2$ o niepustym wnętrzu oraz różniczkowalnej funkcji $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie ma ekstremum lokalnego w żadnym punkcie wewnętrznym zbioru D.

B. b) [5 pkt] Podaj przykład funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, nieróżniczkowalnej w pewnym punkcie $a \in \mathbb{R}^2$, takiej że ma ona obydwie pochodne cząstkowe w a równe 1.

Egzamin „poprawkowy" z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 4 IX 2015
— Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***10 pkt****.*

Zadanie 1. Rozstrzygnij, czy to prawda, że

$$e^{\sin(3{,}14)}e^{3{,}14} \leqslant e^{\sin(3{,}15)}e^{3{,}15}.$$

Rozstrzygnij też, czy powyżej zachodzi równość.

Zadanie 2. Dla każdego $n \geqslant 1$ określamy funkcję $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}\left(n^{\frac{1}{4}}x^2\right)}{n^{\frac{3}{2}}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Wykaż, że wzór $S(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ poprawnie określa funkcję $S\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (tzn., że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$).

b) Zbadaj, czy S jest różniczkowalna i jeśli istnieje pochodna funkcji S w punkcie 0, to oblicz ją.

c) Zbadaj, czy istnieje granica funkcji S w punkcie 0 oraz oblicz ją, jeśli istnieje.

Zadanie 3. Zbadaj czy istnieje granica

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(\frac{k^2+n^2}{n^2}\right),$$

a jeśli istnieje, to oblicz jej wartość.

Zadanie 4. Rozważamy zbiór $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \quad x_1^2 + 44x_2^2 \leqslant 5\}$ i funkcję $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = 13x_1 - 22x_2$. Znajdź kres górny i kres dolny f. Dla obu kresów zbadaj, czy są one osiągane przez f w D oraz czy są one osiągane w jakimś punkcie wewnętrznym zbioru D.

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2016 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [6 pkt] Sformułuj dwa różne twierdzenia z wykładu, dotyczące ***postaci reszty Taylora***.

A. b) [2 pkt] Wypisz trzeci wielomian Taylora funkcji f o środku w 1 oraz podaj **jego** wartość w punkcie 1 dla funkcji zadanej na $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = e^{(x^2)}$.

B.) [7 pkt] Sformułuj twierdzenie ***Rolle'a o wartości średniej*** i **przedstaw jego dowód**.

Zadanie 2.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Uzupełnij treść znanego z wykładu twierdzenia ***o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie*** (tzn. o różniczkowaniu granicy ciągu funkcyjnego — w wersji dla szeregów).

Niech I będzie przedziałem oraz $f_n : I \to \mathbb{R}$ niech będą funkcjami różniczkowalnymi dla wszystkich $n \geqslant 1$. Wówczas jeśli

to funkcja zadana na I wzorem $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest różniczkowalna oraz dla każdego $x \in I$

$$f'(x) = \qquad\qquad\qquad .$$

A. b) [za <5 poprawnych 0 pkt, za 5 poprawnych 2 pkt, za wszystkie 4 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań, dotyczących funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Granica punktowa każdego ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją ciągłą.

☐ Granica jednostajna każdego ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją ciągłą.

☐ Granica punktowa każdego ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną.

☐ Granica jednostajna każdego ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną.

☐ Granica punktowa każdego ciągu funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

☐ Granica jednostajna każdego ciągu funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

B. [7 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o ciągłości granicy*** (dotyczące granic ciagów funkcyjnych) i **przedstaw jego dowód**.

Zadanie 3.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Sformułuj ***twierdzene o sumach Riemanna.***

A. b) [2 pkt] Podaj wartość $\int_1^2 x \ln x \mathrm{d}x$.

A. c) [2 pkt] Podaj wartość $\int_{[0;\frac{\pi}{4}]} \operatorname{tg} x \mathrm{d}x$.

B. a) [4 pkt] Podaj jeden przykład takiego ciągu liczb $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, który jest ciągiem pewnych sum Riemanna dla funkcji $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = e^{(x^2)}$ (i dla pewnych podziałów przedziału $[0;1]$) i który jest zbieżny do całki Riemanna z tej funkcji.

B. b) [2 pkt] Znajdź wszystkie $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których całka $\int_0^\infty x\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^\alpha \mathrm{d}x$ jest zbieżna.

B. c) [2 pkt] Znajdź wszystkie $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi nierówność

$$\int_0^\infty x\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^\alpha \mathrm{d}x \leqslant 1.$$

Zadanie 4.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj definicje następujących rodzajów podzbiorów w przestrzeni metrycznej (X,ρ): ***otwartego, ograniczonego, domkniętego.***

A. b) [3 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o przeciwobrazach*** (dotyczące własności przeciwobrazów pewnych zbiorów względem funkcji ciagłych).

A. c) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o mnożnikach Lagrange'a.***

B. [5 pkt] Podaj przykład pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, która jest różniczkowalna w 0 i jej różniczka w 0 **nie** jest zerowa,

a następnie ***znajdź dla niej:***

a) ***macierz Jakobiego*** w 0

$$MJf(0) =$$

b) ***różniczkę*** w 0

$$DJf(0) =$$

c) ***pochodną kierunkową*** w 0 w kierunku wektora $v = (1, 2)$

$$\partial_v f(0) =$$

d) ***pochodną cząstkową*** po drugiej zmiennej w 0

$$\partial_2 f(0) =$$

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2016 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1. Zbadaj ile pierwiastków $x \in \mathbb{R}$, w zależności od parametru $a > 0$, posiada równanie

$$a^x = 2016x.$$

Zadanie 2.

a) Wykaż **Twierdzenie „o zerach"**:
Jeżeli ciąg $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ ciągłych funkcji rzeczywistych określonych na $D \subset \mathbb{R}$ jest zbieżny jednostajnie do f oraz ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ z D spełnia
(i) $f_n(x_n) = 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *i* **(ii)** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in D$,
to $f(x) = 0$.

b) Czy zastępując w twierdzeniu „o zerach" założenie o ciagłości wszystkich funkcji f_n założeniem, że f jest ciągła, także uzyskamy twierdzenie (tzn. zdanie prawdziwe)?

c) Czy zastępując w twierdzeniu „o zerach" zbieżność jednostajną przez punktową, także uzyskamy twierdzenie?

Zadanie 3. Zbadaj, czy ciągi zadane poniższymi wzorami (z indeksem n) mają granice.
Jeśli tak — znajdź je:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{2k+n}$, **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Zadanie 4. Niech $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant 1, \ \ 0 \leqslant z \leqslant 5\}$ oraz niech $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x, y, z) = 4x - 3y - 6z$.
a) Czy $f(M)$ posiada element największy?
b) Znajdź $\sup f(M)$.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 5 IX 2016 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie ***Peano o postaci reszty Taylora***.

A. b) [4=2+1+1 pkt] Dla funkcji f zadanej na $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \sin(\sin(x))$ wypisz 1-szy wielomian Taylora o środku w $x_0 = 0$. Podaj wartość tego wielomianu w punkcie $x = \frac{1}{2016}$. Podaj także wartość 1-szej reszty Taylora dla f, dla tych samych x_0 i x.

B.) [7=2 x 3,5 pkt] Znajdź poniższe granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$

Zadanie 2.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [6=3 x 2 pkt] Podaj definicje trzech rodzajów zbieżności ciągu funkcyjnego: punktowej, jednostajnej i niemal jednostajnej.

A. b) [2 pkt] Podaj przykład takiego **szeregu** funkcyjnego, który **nie** jest zbieżny punktowo.

B. a) [3,5 pkt] Czy jest możliwe, aby ciąg funkcyjny, którego wyrazami są funkcje różniczkowalne, był zbieżny punktowo do funkcji nieciągłej?

B. b) [3,5 pkt] Czy jest możliwe, aby ciąg funkcyjny, którego wyrazami są funkcje nieciągłe, był zbieżny jednostajnie do funkcji różniczkowalnej?

Zadanie 3.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Dla funkcji $f\colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = x$ i podziału P „na trzy przedziały równej długości" podaj wartości sumy dolnej ($\check{S}(f,P)$) oraz górnej ($\hat{S}(f,P)$).

A. b) [3 pkt] Oblicz całkę górną i całkę dolną z powyższej funkcji f.

A. c) [1 pkt] Czy to prawda, że dla każdej funkcji ciągłej $g\colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ całka Riemanna z g (tzn. $\int_{[0;1]} g(t)\,dt$) jest równa całce oznaczonej z g (tzn. $\int_0^1 g(t)\,dt$)?

B. a) [4 pkt] Oblicz całkę $\int_{[0;1]} x^7 e^{(x^4)}\,dx$.

B. b) [3 pkt] Znajdź wszystkie $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których całka niewłaściwa $\int_0^2 \dfrac{\sin(x^2)}{x^\alpha}\,dx$ jest zbieżna.

Zadanie 4.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a), b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** *—* ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj przykład takiej metryki dla zbioru $\mathbb{R}$, że każda kula otwarta o promieniu $\sqrt{2}$ jest zbiorem jednopunktowym.

A. b) [5 pkt] Sformułuj twierdzenie ***o mnożnikach Lagrange'a***.

B. [7 pkt] Podaj dowód twierdzenia ***o ciągłości funkcji różniczkowalnej*** (dla wielu zmiennych).

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 5 IX 2016 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1. Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x) = e^{(e^x - 1)}$.
Zbadaj, czy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(a) - 1 - a \geqslant 0$.
Dodatkowo możesz pomyśleć nad kolejnym pytaniem *(ale za niewielką i nieznaną jeszcze liczbę punktów, więc najlepiej myślenie rozpocznij dopiero, jeśli zostanie Ci czas po zrobieniu reszty zadań...)*:
Czy dla każdego $a \geqslant 0$ zachodzi $f(a) - 1 - a \geqslant a^2$?

Zadanie 2. Dla każdego $n \geqslant 1$ określamy funkcję $f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n + x^2}}{n^2 + e^x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Wykaż, że wzór $F(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ poprawnie określa funkcję $F \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (tj., że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$).

b) Udowodnij, że F jest różniczkowalna i zbadaj jaki znak ma liczba $F'(0)$ ($-$, $+$, czy 0).

c) Zbadaj, czy istnieje skończona granica funkcji F w punkcie 0, a jeśli TAK, to zbadaj, czy ta granica jest większa niż $\frac{3}{4}$.

Zadanie 3. Funkcja $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i wypukła. Wykaż, że

$$\int_{[0;1]} f(t)\, dt \leqslant \frac{f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)}{4} \leqslant \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Wskazówka: ewentualnie wykaż najpierw
Lemat *Jeśli* $b \geqslant a$ *i* $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest ciągła i wypukła, to*

$$\int_{[a;b]} g(t)\, dt \leqslant \frac{g(a) + g(b)}{2}(b - a).$$

Zadanie 4. Niech $K = \{(x, y, z) : x^2 + 4y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ oraz niech $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$.
a) Czy $f(K)$ posiada element największy?
b) Znajdź $\sup f(K)$.

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2017 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Dla funkcji skalarnej f określonej na przedziale I sformułuj definicję ***wypukłości*** lub inny znany z wykładu warunek równoważny wypukłości.

A. b) [za <5 poprawnych: 0 pkt; za 5 poprawnych: 2 pkt; za 6: 3 pkt; za wszystkie: 5 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań, dotyczących funkcji skalarnych określonych na **całym** $\mathbb{R}$, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Jeśli funkcja jest wklęsła to jest różniczkowalna.

☐ Jeśli funkcja wypukła jest dwukrotnie różniczkowalna, to jej pochodna jest funkcją rosnącą.

☐ Pochodna funkcji różniczkowalnej ściśle rosnącej jest w każdym punkcie większa od zera.

☐ Pochodna różniczkowalnej funkcji lipschitzowskiej jest funkcją ograniczoną.

☐ Jeśli pochodna funkcji rózniczkowalnej jest ograniczona, to funkcja ta jest jednostajnie ciągła.

☐ Jeśli funkcja różniczkowalna ma ścisłe minimum lokalne, to jej pochodna przyjmuje zarówno wartość większą od zera, jak i wartość mniejszą od zera.

☐ Jeśli funkcja jest wypukła to ma minimum lokalne.

B.) [7=2+5 pkt] Sformułuj twierdzenie ***Lagrange'a o wartości średniej*** i **przedstaw jego dowód** *(jak zwykle można tu korzystać z wcześniejszych wyników z wykładu już bez ich dowodzenia).*

Zadanie 2.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Uzupełnij poniższe sformułowanie twierdzenia ***o różniczkowalności granicy***.

Niech I będzie przedziałem oraz $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ niech będą funkcjami różniczkowalnymi dla wszystkich $n \geqslant 1$. Jeśli funkcja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taka, że dla każdego $x \in I$ zachodzi $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ oraz

to f jest różniczkowalna oraz dla każdego $x \in I$

$$f'(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

A. b) [3 pkt] Podaj sformułowanie twierdzenia ***o ciągłości granicy***.

B. [8=2x4 pkt] Dla funkcji $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, zdefiniowanych podanymi niżej wzorami dla wszystkich $x \in D$, rozstrzygnij o ciągłości oraz o różniczkowalności f:

- $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(7n)!}$ dla $D := \mathbb{R}$
- $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + x}$ dla $D := [0; +\infty)$

Zadanie 3.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4=2x2 pkt] Dla funkcji $f\colon [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$
i podziału $P = (-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1)$ podaj wartości sumy dolnej (tzn. $\check{S}(f,P)$) oraz górnej (tzn. $\hat{S}(f,P)$):

A. b) [2 pkt] Podaj wartość całki górnej i całki dolnej z powyższej funkcji f.

A. c) [tylko za oba poprawne: 2 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości poniższych zdań, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Jeśli funkcja $g\colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje funkcja pierwotna do niej.

☐ Jeśli istnieje funkcja pierwotna do funkcji $g\colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, to g jest ciągła.

B. a) [4 pkt] Wartość $g(x)$ funkcji $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest dla każdego $x \in \mathbb{R}$ całką **Riemanna** po przedziale $[x^2; x^4+1]$ z funkcji zadanej wzorem $e^{(t^2)}$ (dla wszystkich t z tego przedziału). Wykaż różniczkowalność funkcji g.

B. b) [3 pkt] Zbadaj, czy to prawda, że dla pewnego $a \in (0;1)$ zachodzi

$$e^{(a^2)} = \int_0^1 e^{(t^2)}\, dt.$$

Zadanie 4.
*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj przykład przestrzeni metrycznej (X, ρ) oraz pewnej takiej rodziny podzbiorów otwartych w tej przestrzeni, że przecięcie tej rodziny nie jest zbiorem otwartym ani domkniętym.

A. b) [2 pkt] Podaj przykład takiej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem zwartym nieskończonym.
Uwaga: proszę nie mylić nieskończonego z nieograniczonym...

A. c) [2 pkt] Znajdź macierz Jakobiego w punkcie 0 funkcji $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zadanej wzorem

$$f(x) := (x_1 + 2x_2 + 7x_3,\ x_1x_2 + e^{x_3}), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

A. d) [2 pkt] Funkcja $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $(\operatorname{grad} G)(0,0,0) = (1,1,1)$ i $(\operatorname{grad} G)(1,1,1) = (6,3,2)$. Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana jest wzorem

$$f(t) := G(t, t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podaj wartość $f'(1)$.

B. [6=1+5 pkt] Sformułuj i wykaż twierdzenie **o ciągłości funkcji różniczkowalnej** dla funkcji d-zmiennych ($d \geqslant 1$).

B. DODATKOWE [za dodatkowe 5 pkt] Rozważamy zbiór $X := \{1, 2, 3\}$ oraz funkcję μ określoną na rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru X:

$$\mu(A) := \begin{cases} 3 & \text{dla } A \text{ będącego każdym ze zbiorów: } \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, X \\ 0 & \text{dla wszystkich pozostałych zbiorów } A \end{cases}$$

Rozstrzygnij, czy tak zdefiniowane μ jest miarą.

Egzamin z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 20 VI 2017 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2,5 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.

Rozważamy "przybliżenie" $p := 1,1$ liczby $\sqrt[10]{e}$.

(i) Wykaż, że $p < \sqrt[10]{e} < p + 0,006$.

(ii) Czy oszacowanie powyższe można "poprawić" do $\sqrt[10]{e} \leqslant p + 0,005$?

Zadanie 2.

(i) Funkcja $g : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $g(x) := \frac{x}{1+x^3}$ dla $x \geqslant 0$. Znajdź pewną jej funkcję pierwotną.

(ii) Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^6}\,dx$, a jeśli jest zbieżna, to oblicz jej wartość

(uwaga: przy tym obliczaniu może przydać się punkt (i)).

Zadanie 3.

Rozważamy $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = y^2 + z^2 = 1\}$ oraz funkcję $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ daną dla $(x, y, z) \in M$ wzorem

$$f(x, y, z) = x + y + z.$$

Znajdź kres górny oraz dolny zbioru wartości f. Zbadaj, czy f posiada wartość największą oraz czy posiada wartość najmniejszą.

Zadanie 4.

Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ określonej dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wzorem

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)xy.$$

Wskazówka: Naszkicuj zbiór punktów, w których f ma wartość równą 0.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 5 IX 2017 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)***,*...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3,5 pkt] Uzupełnij poniższe sformułowanie ***reguły de l'Hospitala*** dla przypadku granicy prawostronnej (obydwa warianty):

Niech $-\infty \leqslant x_0 < b$ *i* $f : (x_0; b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *niech będzie taką funkcją różniczkowalną*[11], *że spełnione są warunki*

oraz zachodzi jedno z dwóch założeń:

wariant 1. ,

wariant 2. .

Wówczas, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{x \to x_0} \qquad ,$$

to istnieje granica

$$\lim_{x \to x_0}$$

oraz $\lim\limits_{x \to x_0} \qquad = \lim\limits_{x \to x_0} \qquad .$

A. b) [3,5 pkt] Sformułuj twierdzenie ***Peano o postaci reszty Taylora***

B.) [8=2x4 pkt] Przedstaw zastosowanie:

a) reguły de l'Hospitala,

b) twierdzenia Peano

do dowodu istnienia i obliczania granicy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x) - x}{x^3}$ („obustronnej").

Zadanie 2.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)***,*...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Uzupełnij treść znanego z wykładu twierdzenia ***o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie*** (tzn. o różniczkowaniu granicy ciągu funkcyjnego — w wersji dla szeregów).

Niech I *będzie przedziałem oraz* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *niech będą funkcjami różniczkowalnymi dla wszystkich* $n \geqslant 1$, *takimi, że dla każdego* $x \in I$ *szereg liczbowy* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *jest zbieżny. Wówczas jeśli*

[11] Powinno tu było być: ... i $f, g : (x_0; b) \longrightarrow \mathbb{R}$ niech będą takimi funkcjami różniczkowalnymi

to funkcja zadana na I wzorem $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *jest różniczkowalna oraz dla każdego* $x \in I$

$$S'(x) =$$

A. b) [za <5 poprawnych 0 pkt, za 5 poprawnych 2 pkt, za wszystkie 4 pkt] Rozstrzygnij o prawdziwości każdego z poniższych zdań, dotyczących funkcji skalarnych określonych na przedziale $(-1;\ 1)$, wpisując odpowiednio "TAK" lub "NIE" w ramce.

☐ Granica jednostajna każdego ciągu wielomianów jest funkcją różniczkowalną.

☐ Granica jednostajna każdego ciągu funkcji różniczkowalnych jest funkcją ciągłą.

☐ Granica niemal jednostajna każdego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

☐ Granica punktowa każdego ciągu funkcji nieujemnych jest funkcją nieujemną.

☐ Granica jednostajna każdego ciągu funkcji nieujemnych jest funkcją nieujemną.

☐ Granica niemal jednostajna każdego ciągu funkcji parzystych jest funkcją parzystą.

B. [7=3,5+3,5 pkt] Zbadaj zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną:

a) ciągu funkcyjnego $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, gdzie $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < n \\ 1 & \text{dla } x \geqslant n \end{cases}$ dla $n \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b) szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$, gdzie $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ dla $n \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a), b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [1,5 pkt] Podaj definicję sumy Riemanna dla funkcji $f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i podziału $P = (x_0, \ldots, x_m)$ przedziału $[a;b]$.

A. b) [1,5 pkt] Podaj przykład czterech różnych liczb, będących sumami Riemanna dla $f\colon [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = x$ dla $x \in [0;1]$ i podziału $P = (0,\ 1)$ (tzn. „$m = 1$").

A. c) [4 pkt] Sformułuj **Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego („p.t.r.c.")**.

B. [8=2+6 pkt] Sformułuj i udowodnij ***fakt o zbieżności po współrzędnych*** (dotyczący pewnego warunku równoważnego zbieżności ciągu o wyrazach z przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^d$).

Zadanie 4.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a), b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Podaj definicję metryki ρ w zbiorze X.

A. b) [2 pkt] Podaj definicję podzbioru otwartego oraz definicję podzbioru domkniętego w przestrzeni metrycznej X.

A. c) [2 pkt] Znajdź macierz Jakobiego w punkcie $(0, 1)$ funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ zadanej wzorem

$$f(x) := (x_1 e^{(x_1 x_2)},\ \ x_1,\ \ x_2^2,\ \ \ln(1 + x_1^2 + 2x_2^2)), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

A. d) [3 pkt] Sformułuj znany z wykładu wynik dotyczący związku różniczki funkcji różniczkowalnej f w punkcie x_0 z pochodnymi cząstkowymi f i z pochodnymi kierunkowymi f w x_0.

B. [5 pkt] Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej dla $x \in \mathbb{R}^2$ wzorem

$$f(x) = (x_1 - 1)^{100} + (x_2 - 2)^{200}.$$

B. DODATKOWE [za dodatkowe 5 pkt] Podaj przykład σ-ciała podzbiorów zbioru $X := \{1, 2, 3\}$ posiadającego conajmniej 3 elementy ale różnego od rodziny wszystkich podzbiorów zbioru X.

Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II
dla Informatyków, 5 IX 2017 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2,5 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te* ***należy każdorazowo wskazywać*** *w sposób umożliwiający identyfikację (np. podając ich nazwę).*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.
Niech $x, y, z \in [0; \frac{\pi}{4}]$. Wykaż, że

$$\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right)^3 \geqslant (1 - \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} z).$$

Zadanie 2.
Zbadaj, czy istnieje granica

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k^2}{n+k}, \qquad (*)$$

a jeśli istnieje, to oblicz jej wartość.
Uwaga: jeżeli zbyt trudno uporać Ci się z granicą $(*)$, to możesz zrobić inną, uproszczoną nieco, wersję tego zadania — z granicą

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n+k}. \qquad (**)$$

Możesz jednak wybrać **tylko jedną** z tych granic do zbadania. I za zadanie z granicą $(**)$ można zdobyć **maksymalnie tylko 10 pkt.**

Zadanie 3.
Zbadaj, czy istnieje granica

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_{[x;\ 5x^2]} 2^{\frac{1}{t}}\, dt}{x^2},$$

a jeśli istnieje, to oblicz jej wartość.

Zadanie 4.

Rozważamy zbiory $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ oraz $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Funkcja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ponadto spełnia następujące warunki:

(i) dla każdego $(x,y) \in S$ zachodzi $f(x,y) = x + y^2 + 2$;

(ii) f obcięta do zbioru $D \setminus S$ jest różniczkowalna, $\{(x,y) \in D \setminus S : \mathrm{grad} f(x,y) = 0\} = \{P, Q\}$ oraz $f(P) = 0$ i $f(Q) = 1$.

Zbadaj, czy f osiąga wartość największą oraz czy osiąga wartość najmniejszą. Znajdź kres górny oraz dolny zbioru wartości f.