Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 29 I 2018 — Część I

Czas na rozwiązanie zadań cz. I: ***2 godz.*** *Do zdobycia: 60 pkt.*
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 1.
Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)***, ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [2 pkt] Podaj definicję ***zbieżności*** ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ do granicy $g \in \mathbb{R}$.

A. b) [2 pkt] Podaj definicję ***rozbieżności*** ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ do $-\infty$.

A. c) [3 pkt] Podaj przykład takiego ciągu liczbowego, który ma zarówno pewien podciąg zbieżny, jak i pewien podciąg rozbieżny do $-\infty$.

VERTE

B. [8 pkt] Sformułuj twierdzenie *„o granicy iloczynu ciągów”* (będące częścią twierdzenia ***„o rachunkowych własnościach granicy”***) i udowodnij je dla szczególnego przypadku obu ciągów zbieżnych.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 2.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [3 pkt] Sformułuj kryterium ***Leibniza*** zbieżności szeregów.

A. b) [3 pkt] Podaj przykład takiego ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ **zbieżnego do zera**, o wyrazach większych bądź równych 0, że $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest rozbieżny.

VERTE

B. [9=2+2+2+3 pkt] Rozstrzygnij, czy to prawda, że dla każdego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$:

a) jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

b) jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

c) jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny, to $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n)^5$ jest zbieżny.

d) jeśli $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest dodatni i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k\right)$ jest zbieżny.

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 3.

Rozwiązanie punktu ***A*** *(i ew. podp.* ***a)****,* ***b)****,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie **Bolzano** (o własności Darboux).

A. b) [3 pkt] Sformułuj definicję jednostajnej ciągłości funkcji $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$).

A. c) [2 pkt] Podaj przykład ciągłej funkcji $f : (0; 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła.

VERTE

B. [6=3x2 pkt] Dla każdego z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem (całej dziedziny) dla pewnej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $(0; 1)$

b) $\{0,\ 1\}$

c) $[0; 1]$

Imię i nazwisko: .... **numer indeksu:** ....

Zadanie 4.

*Rozwiązanie punktu **A** (i ew. podp. **a)**, **b)**,...) — bez uzasadnień, dla punktu* **B** — ***musi być dowód.***

A. a) [4 pkt] Sformułuj twierdzenie **Lagrange'a** o wartości średniej.

A. b) [3 pkt] Znajdź 2-gi wielomian Taylora o środku w $x_0 = 1$ dla funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = x + e^{2x}$.

VERTE

B. [8 pkt] Podaj sformułowanie twierdzenia o ekstremach lokalnych. Przedstaw jego dowód dla przypadku maksimum.

Egzamin z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 29 I 2018 — Część II

Czas na rozwiązanie zadań cz. II: ***2 godz.***
Nie wolno *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*

Rozwiązania ***muszą zawierać dowód****, jako swą zasadniczą część. Kolejne kroki dowodu, pomijając zupełnie elementarne, powinny opierać się na twierdzeniach (w tym: lematach, faktach itp.) z wykładu, ew. także z ćwiczeń. Twierdzenia te należy wskazywać, najlepiej podając ich nazwę, ew. sformułowanie.*

Rozwiązania zadań muszą być napisane na ***osobnych*** *kartkach, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu* ***imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu*** *oraz poniżej —* ***numerem zadania****.*
Każde zadanie jest warte ***15 pkt****.*

Zadanie 1.

Wykaż zbieżność i znajdź granice ciągów o wyrazach zadanych dla $n \geqslant 1$ następująco:

a) $a_n = \sqrt[n]{e^n - (\sqrt{e})^n}$, **b)** $b_n = \sqrt[n]{e^n - \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{(n^2)}}$.

Zadanie 2.

Zbadaj zbieżność oraz bezwzględną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{x^2 n + \frac{70}{n}}$$

w zależności od wartości parametru $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3.

Znajdź zbiór **wszystkich** takich parametrów $a \in \mathbb{R}$, że funkcja $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana dla każdego $x \in \mathbb{R}$ wzorem

$$f_a(x) := ax - \ln(e^x + 1)$$

jest ściśle rosnąca.

Zadanie 4.

Zakładamy, że ciąg $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ jest malejący, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ oraz że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dla każdego $x \in \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Wykaż, że dla pewnego $x \in [-1; 0]$ zachodzi $f(x) = -1$.